FRANK AYRES JR.
EQUAÇÕES DIFERENCIAIS
Resumo da teoria
560 problemas resolvidos
509 problemas propostos
Traduzido
por
José Rodrigues de Carvalho
COLEÇÃO SCHAUM
AO LIVRO TECNICO LTDA. - RIO

FRANK AYRES JR.
PROFESSOR E CHEFE DO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
DO "DICKINSON COLLEGE"

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

RESUMO DA TEORIA
560 PROBLEMAS RESOLVIDOS
509 PROBLEMAS PROPOSTOS

TRADUZIDO POR
JOSÉ RODRIGUES DE CARVALHO
ENGENHEIRO

RIO DE JANEIRO, BRASIL
1963

ÍNDICE

CAP. PÁG.

I – Origem das Equações Diferenciais.......................... 11

II – Soluções das Equações Diferenciais.......................... 18

III – Equações de Primeira Ordem e Primeiro Grau.......... 24

IV – Equações de Primeira Ordem e Primeiro Grau. Equações de Variáveis Separáveis e Redução à Equação de Variáveis Separáveis.......................... 28

V – Equações de Primeira Ordem e Primeiro Grau. Equações Diferenciais Exatas e Redução a Equações Diferenciais Exatas.......................... 39

VI – Equações de Primeira Ordem e Primeiro Grau. Equações Lineares e Equações Redutíveis a Essa Forma.......... 53

VII – Aplicações Geométricas.......................... 61

VIII – Aplicações à Física.......................... 71

IX – Equações de Primeira Ordem e Grau Superior.......... 89

X – Soluções Singulares. Soluções Estranhas à Equação.... 96

XI – Aplicações das Equações de Primeira Ordem e Grau Superior.......................... 106

XII – Equações Lineares de Ordem n.......................... 111

XIII – Equações Lineares Homogêneas com Coeficientes Constantes.......................... 116

XIV – Equações Lineares com Coeficientes Constantes.......... 122

XV – Equações Lineares com Coeficientes Constantes. Variação de Parâmetros, Coeficientes Indeterminados.......... 129

XVI – Equações Lineares com Coeficientes Constantes. Métodos Abreviados.......................... 137

XVII – Equações Lineares com Coeficientes Variáveis. Equações Lineares de Cauchy e Legendre.......................... 148

XVIII – Equações Lineares com Coeficientes Variáveis. Equações de Segunda Ordem.......................... 152

XIX – Equações Lineares com Coeficientes Variáveis. Tipos Diversos.......................... 165

XX – Aplicações das Equações Lineares.......................... 179

XXI – Sistemas de Equações Lineares.......................... 212

XXII – Equações Diferenciais Totais.......................... 221

XXIII – Aplicações das Equações Diferenciais Totais e dos Sistemas de Equações Diferenciais.......................... 239

CAP. PÁG.

XXIV – Solução Numérica das Equações Diferenciais. Valores Aproximados 249
XXV – Aplicação das Séries na Solução das Equações Diferenciais........ 264
XXVI – Aplicação das Séries na Solução das Equações Diferenciais........ 277
XXVII – Equações de Legendre, Bessel e Gauss........ 295
XXVIII – Equações Diferenciais Parciais........ 310
XXIX – Equações Diferenciais Parciais Lineares de Primeira Ordem........ 319
XXX – Equações Diferenciais Parciais Não Lineares de Primeira Ordem........ 327
XXXI – Equações Diferenciais Parciais Homogêneas de Ordem Superior com Coeficientes Constantes........ 342
XXXII – Equações Lineares Não-Homogêneas com Coeficientes Constantes........ 356
XXXIII – Equações Diferenciais Parciais de Segunda Ordem com Coeficientes Variáveis........ 370

ÍNDICE ALFABÉTICO........ 395

CAPÍTULO I

ORIGEM DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Equação Diferencial é a equação que encerra derivadas. Por exemplo :

(1) $\frac{dy}{dx} = x + 5$

(2) $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0$

(3) $xy' + y = 3$

(4) $y''' + 2(y'')^2 + y' = \cos x$

(5) $(y'')^2 + (y')^3 + 3y = x^2$

(6) $\frac{\partial z}{\partial x} = z + x\frac{\partial z}{\partial y}$

(7) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 + y.$

Havendo uma só variável independente, como em (1) a (5), as derivadas são ordinárias e a equação é denominada *equação diferencial ordinária*.

Havendo duas ou mais variáveis independentes, como em (6) e (7), as derivadas são parciais e a equação é denominada *equação diferencial parcial*.

A *ordem* de uma equação diferencial é a ordem da mais alta derivada que nela aparece. As equações (1), (3) e (6) são de primeira ordem; (2), (5) e (7) são de segunda ordem e (4) é de terceira ordem.

O *grau* de uma equação diferencial, que pode ser escrita, considerando as derivadas, como um polinômio, é o grau da derivada de mais alta ordem que nela aparece. Tôdas as equações dos exemplos acima são do primeiro grau, exceto (5) que é do segundo grau.

As equações diferenciais parciais serão discutidas no Capítulo XXVIII. Primeiramente, serão consideradas, apenas, equações diferenciais com uma só variável dependente.

Origem das Equações Diferenciais.

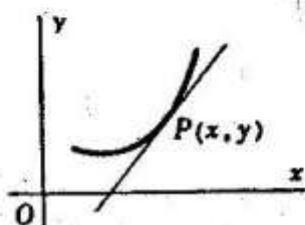
a) *Problemas Geométricos.* (Ver Problemas 1 e 2, abaixo).

b) *Problemas de Física.* (Ver Problemas 3 e 4, abaixo).

c) *Primitivas.*

Uma relação entre as variáveis, encerrando n constantes arbitrárias essenciais, como $y = x^4 + Cx$ ou $y = Ax^2 + Bx$, é chamada uma *primitiva*. As n constantes, representadas sempre, aqui, por letras maiúsculas, serão denominadas *essenciais* se não puderem ser substituídas por um número menor de constantes. (Ver Problema 5).

Em geral, uma primitiva, encerrando n constantes arbitrárias essenciais, dará origem a uma equação diferencial, de ordem n, livre de constantes arbitrárias. Esta equação aparece eliminando-se as n constantes entre as $(n + 1)$ equações obtidas juntando-se à primitiva as n equações provenientes de n derivadas sucessivas, em relação à variável independente, da primitiva. (Ver Problemas 6-14, abaixo).

PROBLEMAS RESOLVIDOS

1) Uma curva é definida pela condição de ter em todos os pontos, (x, y), a inclinação $\frac{dy}{dx}$ igual ao dôbro da soma das coordenadas do ponto. Exprimir a condição por meio de uma equação diferencial.

A equação é: $\frac{dy}{dx} = 2(x + y)$.

2) Uma curva é definida pela condição de ter a soma dos segmentos determinados sôbre os eixos dos x e dos y, pela tangente à curva, em qualquer ponto, constante e igual a 2. Exprimir a condição por meio de uma equação diferencial.

A equação da tangente à curva em (x, y) é: $Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x)$.

Os segmentos determinados sôbre os eixos são:

$$X = x - y\frac{dx}{dy} \quad \text{e} \quad Y = y - x\frac{dy}{dx}.$$

A equação diferencial procurada é: $X + Y = x - y\frac{dx}{dy} + y - x\frac{dy}{dx} = 2$

ou $x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - (x + y - 2)\frac{dy}{dx} + y = 0.$

3) Cem gramas de açúcar de cana, em água, estão sendo transformadas em dextrose numa razão que é proporcional à quantidade não transformada. Determinar a equação diferencial que exprime a razão de transformação depois de t minutos.

Seja q o número de gramas convertido em t minutos. $(100 - q)$ será a quantidade, em gramas, não transformada. A razão de transformação é dada por $\frac{dq}{dt} = k(100 - q)$ sendo k a constante de proporcionalidade.

4) Uma partícula, de massa m, move-se ao longo de uma reta, (o eixo dos x), sujeita a duas fôrças; uma, proporcional ao seu deslocamento a partir de um ponto fixo O da sua trajetória e dirigida para O e a outra, uma fôrça resistente proporcional à sua velocidade. Exprimir a fôrça total por uma equação diferencial.

A primeira fôrça pode ser expressa por $-k_1x$ e a segunda por $-k_2\,\dfrac{dx}{dt}$, onde k_1 e k_2 são fatôres de proporcionalidade.

A fôrça total (massa × aceleração) é dada por:

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} = -k_1x - k_2\,\frac{dx}{dt}.$$

5) Mostrar que em cada uma das equações seguintes sòmente uma das duas constantes arbitrárias é essencial:

$a)$ $y = x^2 + A + B$, $b)$ $y = Ae^{x+B}$, $c)$ $y = A + \ln Bx$.

a) Como $A + B$ não é mais do que uma só constante arbitrária conclui-se que sòmente uma constante essencial está presente.

b) $y = Ae^{x+B} = Ae^xe^B$ e Ae^B não é mais do que uma só constante arbitrária.

c) $y = A + \ln Bx = A + \ln B + \ln x$ e $(A + \ln B)$ não é mais do que uma só constante arbitrária.

6) Obter a equação diferencial associada à primitiva $y = Ax^2 + Bx + C$.

Como existem 3 constantes devemos considerar as 4 equações seguintes:

$$y = Ax^2 + Bx + C,\ \frac{dy}{dx} = 2Ax + B,\ \frac{d^2y}{dx^2} = 2A,\ \frac{d^3y}{dx^3} = 0.$$

A última equação, $\dfrac{d^3y}{dx^3}$, não apresentando nenhuma constante arbitrária e sendo de terceira ordem, é a equação procurada.

Note-se que as constantes poderiam não ter sido eliminadas entre as três primeiras das equações acima. Note-se, também, que a primitiva pode ser fàcilmente obtida por integração da equação diferencial.

7) Obter a equação diferencial associada à primitiva $x^2y^3 + x^3y^5 = C$.

Derivando uma vez, em relação a x, vem:

$$\left(2xy^3 + 3x^2y^2\,\frac{dy}{dx}\right) + \left(3x^2y^5 + 5x^3y^4\,\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

ou, quando $xy \neq 0$,

$$\left(2y + 3x\,\frac{dy}{dx}\right) + xy^2\left(3y + 5x\,\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

que é a equação procurada.

Escrevendo as equações considerando as diferenciais, temos:

(1) $$(2xy^3\,dx + 3x^2y^2\,dy) + (3x^2y^5\,dx + 5x^3y^4\,dy) = 0$$

e

(2) $$(2y\,dx + 3x\,dy) + xy^2\,(3y\,dx + 5x\,dy) = 0.$$

Note-se que a primitiva pode ser fàcilmente obtida de (1) por integração, não havendo porém a mesma simplicidade quando se considera (2). Partindo de (2) é necessário determinar o fator xy^2 que foi simplificado.

8) Obter a equação diferencial associada com a primitiva $y = A\cos ax + B\,\text{sen}\,ax$, A e B sendo constantes arbitrárias e a uma constante fixada.

Aqui: $\dfrac{dy}{dx} = -Aa\,\text{sen}\,ax + Ba\cos ax$

e $$\frac{d^2y}{dx^2} = -Aa^2\cos ax - Ba^2\,\text{sen}\,ax = -a^2\,(A\cos ax + B\,\text{sen}\,ax) = -a^2y.$$

A equação procurada é: $\dfrac{d^2y}{dx^2} + a^2y = 0.$

9) Obter a equação diferencial associada à primitiva $y = Ae^{2x} + Be^x + C$.

Aqui, $\dfrac{dy}{dx} = 2Ae^{2x} + Be^x$, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 4Ae^{2x} + Be^x$, $\dfrac{d^3y}{dx^3} = 8Ae^{2x} + Be^x$.

Então,

$$\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^2y}{dx^2} = 4Ae^{2x}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 2Ae^{2x} \quad \text{e} \quad \frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^2y}{dx^2} = 2\left(\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\right).$$

A equação procurada é: $\dfrac{d^3y}{dx^3} - 3\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} = 0$.

10) Obter a equação diferencial associada à primitiva $y = C_1e^{3x} + C_2e^{2x} + C_3e^x$.

Aqui, $\dfrac{dy}{dx} = 3C_1e^{3x} + 2C_2e^{2x} + C_3e^x$, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 9C_1e^{3x} + 4C_2e^{2x} + C_3e^x$

e $\dfrac{d^3y}{dx^3} = 27C_1e^{3x} + 8C_2e^{2x} + C_3e^x$.

A eliminação das constantes pelos métodos elementares é um pouco trabalhosa. Empregando determinantes, podem-se achar C_1, C_2 e C_3 com três das equações e, substituindo seus valores na quarta equação, o resultado pode ser escrito sob a seguinte forma (denominada *eliminante*):

$$\begin{vmatrix} e^{3x} & e^{2x} & e^x & y \\ 3e^{3x} & 2e^{2x} & e^x & y' \\ 9e^{3x} & 4e^{2x} & e^x & y'' \\ 27e^{3x} & 8e^{2x} & e^x & y''' \end{vmatrix} = e^{6x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & y \\ 3 & 2 & 1 & y' \\ 9 & 4 & 1 & y'' \\ 27 & 8 & 1 & y''' \end{vmatrix} = e^{6x}(-2y''' + 12y'' - 22y' + 12y) = 0.$$

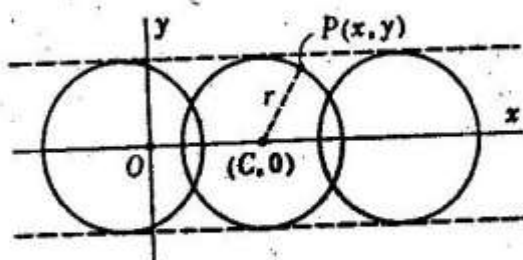
A equação diferencial procurada é: $\dfrac{d^3y}{dx^3} - 6\dfrac{d^2y}{dx^2} + 11\dfrac{dy}{dx} - 6y = 0$.

11) Obter a equação diferencial associada à primitiva $y = Cx^2 + C^2$.

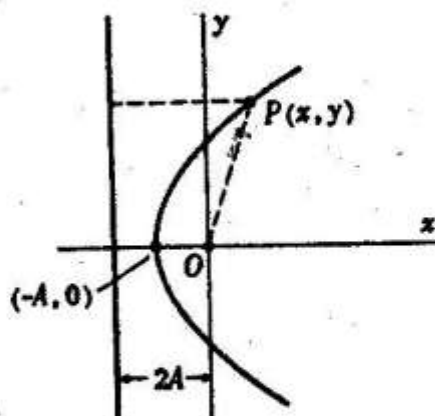
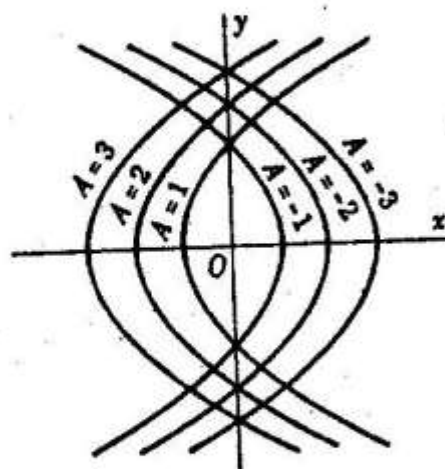
Como $\dfrac{dy}{dx} = 2Cx$, $C = \dfrac{1}{2x}\dfrac{dy}{dx}$ e $y = Cx^2 + C^2 = \dfrac{1}{2x}\dfrac{dy}{dx}x^2 + \dfrac{1}{4x^2}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$.

A equação diferencial procurada é $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + 2x^3\dfrac{dy}{dx} - 4x^2y = 0$.

Nota. A primitiva encerra uma constante arbitrária do segundo grau e a equação diferencial resultante é de primeira ordem e do segundo grau.

12) Achar a equação diferencial da família de círculos de raios r, com centros no eixo dos x.

A equação da família é $(x - C)^2 + y^2 = r^2$, onde C é uma constante arbitrária.

Então $(x - C) + y\dfrac{dy}{dx} = 0$, $x - C = -y\dfrac{dy}{dx}$ e a equação diferencial é $y^2\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = r^2$.

13) Achar a equação diferencial da família de parábolas com focos na origem e eixos ao longo do eixo dos x.

A equação da família de parábolas é $y^2 = 4A(A + x)$.

Então $yy' = 2A$, $A = \frac{1}{2}yy'$, e $y^2 = 2yy'\left(\frac{1}{2}yy' + x\right)$.

A equação procurada é $y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2x\frac{dy}{dx} - y = 0$.

14) Formar a equação diferencial de tôdas as tangentes à parábola $y^2 = 2x$.

Em qualquer ponto (A, B) da parábola, a equação da tangente é

$$y - B = \frac{(x - A)}{B}$$

ou, como

$$A = \frac{1}{2}B^2, \quad By = x + \frac{1}{2}B^2.$$

Eliminando B entre esta equação e $By' = 1$, obtida por derivação em relação a x, tem-se a equação diferencial procurada: $2x(y')^2 - 2yy' + 1 = 0$.

PROBLEMAS PROPOSTOS

15) Classificar, quanto à ordem e ao grau, as seguintes equações:

a) $dy + (xy - \cos x)\,dx = 0$

Resp.: Primeira ordem; primeiro grau

b) $L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0$

Resp.: Segunda ordem; primeiro grau

c) $y''' + xy'' + 2y(y')^2 + xy = 0$

Resp.: Terceira ordem; primeiro grau

d) $\frac{d^2v}{dx^2}\frac{dv}{dx} + x\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + v = 0$

Resp.: Segunda ordem; primeiro grau

e) $\left(\frac{d^3w}{dv^3}\right)^2 - \left(\frac{d^2w}{dv^2}\right)^4 + vw = 0$

Resp.: Terceira ordem; segundo grau

f) $e^{y'''} - xy'' + y = 0$

Resp.: Terceira ordem; não se classifica quanto ao grau

g) $\sqrt{\rho' + \rho} = \text{sen}\,\theta$

Resp.: Primeira ordem; primeiro grau

h) $y' + x = (y - xy')^{-3}$

Resp.: Primeira ordem; quarto grau

i) $\frac{d^2\rho}{d\theta^2} = \sqrt[4]{\rho + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2}$

Resp.: Segunda ordem; quarto grau

16) Escrever a equação diferencial para cada uma das curvas determinadas pelas condições especificadas.

a) Em todos os pontos (x, y) a inclinação da tangente é igual ao quadrado da abscissa do ponto.

Resp.: $y' = x^2$

b) Em todos os pontos (x, y) o comprimento da subtangente é igual à soma das coordenadas do ponto.

Resp.: $y/y' = x + y$ ou $(x + y)\,y' = y$

c) O segmento unindo $P(x, y)$ e o ponto de intersecção da normal em P com o eixo dos x é dividido ao meio pelo eixo dos y.

Resp.: $y + x\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2}\,y$ ou $yy' + 2x = 0$

d) Em qualquer ponto (ρ, θ) a tangente do ângulo formado pelo raio vetor com a tangente à curva é igual a $\frac{1}{3}$ da tangente do ângulo vetorial, θ.

Resp.: $\rho\,\frac{d\theta}{d\rho} = \frac{1}{3}\tan\theta$

e) A área limitada pelo arco de uma curva, o eixo dos x, e duas ordenadas, uma fixa e outra variável, é igual ao dôbro do comprimento do arco situado entre as ordenadas.

Sugestão: $\int_a^x y\,dx = 2\int_a^x \sqrt{1 + (y')^2}\,dx.$ *Resp.:* $y = 2\sqrt{1 + (y')^2}$

17) Exprimir cada um dos fatos abaixo sob a forma de uma equação diferencial.

a) O rádio se decompõe numa razão proporcional à quantidade Q, presente.

Resp.: $\frac{dQ}{dt} = -kQ$

b) A população P de uma cidade aumenta numa razão proporcional à população e à diferença entre 200000 e a população.

$$Resp.: \frac{dP}{dt} = kP(200000 - P)$$

c) Para uma certa substância, a razão de variação da pressão do vapor (P) em relação à temperatura (T) é proporcional à pressão do vapor e inversamente proporcional ao quadrado da temperatura.

$$Resp.: \frac{dP}{dT} = k\frac{P}{T^2}$$

d) A diferença de potencial E através de um elemento de indutância L é igual ao produto de L pela taxa de variação, em relação ao tempo, da corrente i na indutância.

$$Resp.: E = L\frac{di}{dt}$$

e) *Massa × aceleração = fôrça.*

$$Resp.: m\frac{dv}{dt} = F \quad \text{ou} \quad m\frac{d^2s}{dt^2} = F$$

18) Obter a equação diferencial associada com a primitiva dada, A e B sendo constantes arbitrárias.

a) $y = Ax$ — *Resp.:* $y' = y/x$

b) $y = Ax + B$ — *Resp.:* $y'' = 0$

c) $y = e^{x+A} = Be^x$ — *Resp.:* $y' = y$

d) $y = A \operatorname{sen} x$ — *Resp.:* $y' = y \operatorname{cotg} x$

e) $y = \operatorname{sen}(x + A)$ — *Resp.:* $(y')^2 = 1 - y^2$

f) $y = Ae^x + B$ — *Resp.:* $y'' = y'$

g) $x = A \operatorname{sen}(y + B)$ — *Resp.:* $y'' = x(y')^3$

h) $\ln y = Ax^2 + B$ — *Resp.:* $xyy'' - yy' - x(y')^2 = 0$

19) Achar a equação diferencial da família de círculos de raios variáveis r, com o centro no eixo dos x. (Comparar com o Problema 12).

Sugestão: $(x - A)^2 + y^2 = r^2$, A e r sendo constantes arbitrárias.

Resp.: $yy'' + (y')^2 + 1 = 0$

20) Achar a equação diferencial da família de cardióides $\rho = a(1 - \cos\theta)$.

Resp.: $(1 - \cos\theta)\, d\rho = \rho \operatorname{sen}\theta\, d\theta$

21) Achar a equação diferencial da família de retas distantes uma unidade da origem.

Resp.: $(xy' - y)^2 = 1 + (y')^2$

22) Achar a equação diferencial de todos os círculos do plano.

Sugestão: Usar $x^2 + y^2 - 2Ax - 2By + C = 0$.

Resp.: $[1 + (y')^2]y''' - 3y'(y'')^2 = 0$

Capítulo II

SOLUÇÕES DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

O problema nas equações diferenciais elementares é, essencialmente, a descoberta da primitiva que deu origem à equação. Em outras palavras, a solução de uma equação diferencial de ordem n é, essencialmente, a determinação de uma relação entre as variáveis, envolvendo n constantes arbitrárias independentes, que, juntamente com as derivadas dela obtidas, satisfaz à equação diferencial. Por exemplo:

	EQUAÇÃO DIFERENCIAL	PRIMITIVA
(1)	$\frac{d^3y}{dx^3} = 0$	$y = Ax^2 + Bx + C$ (Prob. 6, Cap. I)
(2)	$\frac{d^3y}{dx^3} - 6\frac{d^2y}{dx^2} + 11\frac{dy}{dx} - 6y = 0$	$y = C_1e^{3x} + C_2e^{2x} + C_3e^x$ (Prob. 10, Cap. I)
(3)	$y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = r^2$	$(x - C)^2 + y^2 = r^2$. (Prob. 12, Cap. I)

As condições que permitem afirmar que uma equação diferencial tem solução aparecem nos *Teoremas da Existência*.

Por exemplo, uma equação diferencial da forma $y' = g(x, y)$ em que

a) $g(x, y)$ é contínua e unívoca numa região R, de pontos (x, y),

b) $\frac{\partial g}{\partial y}$ existe e é contínua em todos os pontos de R,

admite uma infinidade de soluções $f(x, y, C) = 0$ (C, uma constante arbitrária) tais que em cada ponto de R passa uma e sòmente uma curva da família $f(x, y, C) = 0$. (Ver Problema 5).

Uma solução particular de uma equação diferencial é a que se obtém quandos se dão, para as constantes arbitrárias que aparecem na primitiva, valores definidos. Por exemplo, em (1) acima $y = 0\ (A = B = C = 0)$, $y = 2x + 5\ (A = 0, B = 2, C = 5)$ e $y = x^2 + 2x + 3\ (A = 1, B = 2, C = 3)$ são soluções particulares.

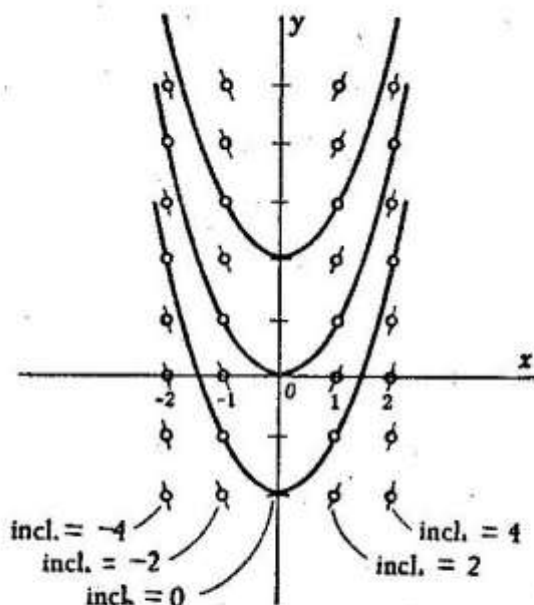
Geomètricamente, a primitiva é a equação de uma família de curvas e uma solução particular é a equação de uma dessas curvas. Estas curvas são denominadas *curvas integrais* da equação diferencial.

Como se verá no Problema 6, uma determinada forma da primitiva pode não incluir tôdas as soluções particulares. Além disso, como se verá no Problema 7, uma equação diferencial pode ter soluções que não podem ser obtidas da primitiva, por combinações efetuadas com as constantes arbitrárias, como no Problema 6. Tais soluções, denominadas *soluções singulares*, serão consideradas no Capítulo X.

A primitiva de uma equação diferencial é usualmente chamada *a solução geral* da equação. Certos autores, tendo em vista as observações feitas acima, chamam-na *uma solução geral* da equação.

Uma equação diferencial $\frac{dy}{dx} = g(x,y)$ associa a cada ponto (x_0, y_0) da região R, do teorema de existência acima, uma direção $M = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x_0, y_0)} = g(x_0, y_0)$. A direção em cada um dêsses pontos é a da tangente à curva da família $f(x, y, C) = 0$, isto é, à primitiva passando pelo ponto.

A região R com a indicação, em cada um dos seus pontos, da direção é chamada um *campo de direção*. Na figura ao lado, as direções estão indicadas, para um certo número de pontos, para a equação $\frac{dy}{dx} = 2x$. As curvas integrais da equação diferencial são aquelas que têm em cada um dos seus pontos a direção dada pela equação. Neste exemplo as curvas integrais são parábolas.

Tais diagramas são úteis para tornar mais clara a relação existente entre a equação diferencial e sua primitiva, porém, como as curvas integrais são, geralmente, muito complexas, tais diagramas não ajudam, pràticamente, na obtenção de suas equações.

PROBLEMAS RESOLVIDOS

1) Mostrar por substituição direta na equação diferencial e verificando as constantes arbitrárias que cada primitiva dá a equação diferencial correspondente.

a) $y = C_1 \operatorname{sen} x + C_2 x$ $\qquad (1 - x \operatorname{cotg} x) \dfrac{d^2y}{dx^2} - x \dfrac{dy}{dx} + y = 0$

b) $y = C_1 e^x + C_2 xe^x + C_3 e^{-x} + 2x^2 e^x$ $\qquad \dfrac{d^3y}{dx^3} - \dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} + y = 8e^x$

a) Substituindo $y = C_1 \operatorname{sen} x + C_2 x$, $\dfrac{dy}{dx} = C_1 \cos x + C_2$, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -C_1 \operatorname{sen} x$ na equação diferencial, temos:

$$(1 - x \operatorname{cotg} x)(-C_1 \operatorname{sen} x) - x(C_1 \cos x + C_2) + (C_1 \operatorname{sen} x + C_2 x) =$$
$$= -C_1 \operatorname{sen} x + C_1 x \cos x - C_1 x \cos x - C_2 x + C_1 \operatorname{sen} x + C_2 x = 0.$$

A ordem da equação diferencial (2) e o número de constantes arbitrárias (2) concordam:

b)
$$\begin{aligned}
y &= C_1 e^x + C_2 xe^x + C_3 e^{-x} + 2x^2 e^x,\\
y' &= (C_1 + C_2) e^x + C_2 xe^x - C_3 e^{-x} + 2x^2 e^x + 4xe^x,\\
y'' &= (C_1 + 2C_2) e^x + C_2 xe^x + C_3 e^{-x} + 2x^2 e^x + 8xe^x + 4e^x,\\
y''' &= (C_1 + 3C_2) e^x + C_2 xe^x - C_3 e^{-x} + 2x^2 e^x + 12xe^x + 12e^x,
\end{aligned}$$
e $y''' - y'' - y' + y = 8e^x$. A ordem da equação diferencial e o número de constantes arbitrárias concordam.

2) Mostrar que $y = 2x + Ce^x$ é a primitiva da equação diferencial $\dfrac{dy}{dx} - y = 2(1 - x)$ e achar a solução particular relativa a $x = 0$, $y = 3$ [i. e. a equação da curva integral que passa por $(0, 3)$].

Substituindo $y = 2x + Ce^x$ e $\dfrac{dy}{dx} = 2 + Ce^x$ na equação diferencial, temos: $2 + Ce^x - (2x + Ce^x) = 2 - 2x$. Quando $x = 0$, $y = 3$, $3 = 2 \cdot 0 + Ce^0$ e $C = 3$. A solução particular é $y = 2x + 3e^x$.

3) Mostrar que $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + x$ é a primitiva da equação diferencial $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = 2x - 3$ e achar a equação da curva integral que passa pelos pontos $(0, 0)$ e $(1, 0)$.

Substituindo

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + x, \quad \frac{dy}{dx} = C_1 e^x + 2C_2 e^{2x} + 1, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = C_1 e^x + 4C_2 e^{2x}$$

na equação diferencial, temos:

$$C_1 e^x + 4C_2 e^{2x} - 3(C_1 e^x + 2C_2 e^{2x} + 1) + 2(C_1 e^x + C_2 e^{2x} + x) = 2x - 3.$$

Quando $x = 0$, $y = 0$: $C_1 + C_2 = 0$. Quando $x = 1$, $y = 0$: $C_1 e + C_2 e^2 = -1$.

Então $C_1 = -C_2 = \dfrac{1}{e^2 - e}$ e a equação procurada é $y = x + \dfrac{e^x - e^{2x}}{e^2 - e}$.

4) Mostrar que $(y-C)^2 = Cx$ é a primitiva da equação diferencial $4x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2x\frac{dy}{dx} - y = 0$ e achar as equações das curvas integrais que passam pelo ponto (1, 2).

Aqui $2(y-C)\frac{dy}{dx} = C$ e $\frac{dy}{dx} = \frac{C}{2(y-C)}$.

$$\text{Então } 4x\frac{C^2}{4(y-C)^2} + 2x\frac{C}{2(y-C)} - y = \frac{C^2x + Cx(y-C) - y(y-C)^2}{(y-C)^2} =$$

$$= \frac{y[Cx-(y-C)^2]}{(y-C)^2} = 0.$$

Quando $x = 1$, $y = 2$: $(2-C)^2 = C$ e $C = 1, 4$.

As equações das curvas integrais que passam pelo ponto (1, 2) são $(y-1)^2 = x$ e $(y-4)^2 = 4x$.

5) A primitiva da equação diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ é $y = Cx$. Achar a equação da curva integral que passa por *a*) (1, 2) e *b*) (0, 0).

a) Quando $x=1$, $y=2$: $C = 2$ e a equação procurada é $y = 2x$.

b) Quando $x=0$, $y=0$: C não é determinado, isto é, tôdas as curvas integrais passam pela origem. Note-se que $g(x,y) = \frac{y}{x}$ não é contínua na origem e, assim, o teorema da existência assegura uma e sòmente uma curva da família $y = Cx$ em cada ponto do plano, exceto na origem.

6) Derivando $xy = C(x-1)(y-1)$ e substituindo na derivada o valor de C tirado da expressão dada, tem-se a equação diferencial:

$$x\frac{dy}{dx} + y = C\left\{(x-1)\frac{dy}{dx} + y - 1\right\} = \frac{xy}{(x-1)(y-1)}\left\{(x-1)\frac{dy}{dx} + y - 1\right\}$$

ou

$$(1) \qquad x(x-1)\frac{dy}{dx} + y(y-1) = 0.$$

Tanto $y = 0$ como $y = 1$ são soluções de (1) porque $\frac{dy}{dx} = 0$ e (1) fica satisfeita. O primeiro valor é obtido da primitiva fazendo $C = 0$, porém o segundo, $y = 1$, não pode ser obtido por nenhum valor finito dado a C. Anàlogamente, (1) pode ser obtida da primitiva sob a forma $Bxy = (x-1)(y-1)$. Agora a solução $y = 1$ aparece para $B = 0$, enquanto que a solução $y = 0$ não pode ser obtida. Assim, uma forma da primitiva pode não incluir tôdas as soluções particulares da equação diferencial. (Note-se que $x = 1$ é também uma solução particular).

7) Derivando $y = Cx + 2C^2$, determinando $C = \frac{dy}{dx}$, e substituindo êsse valor na primitiva tem-se a equação diferencial

$$(1) \qquad 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x\left(\frac{dy}{dx}\right) - y = 0.$$

Como $y = -\frac{1}{8}x^2$, $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{4}x$ satisfaz (1), $x^2 + 8y = 0$ é uma solução de (1).

A primitiva é representada por uma família de retas e é claro que a equação da parábola não pode ser obtida por meio de operações com as constantes arbitrárias. Tal solução é chamada uma solução singular da equação diferencial.

8) Mostrar que $y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x$ e $y = A \cos(x + B)$ são primitivas de $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$. Fazer a transformação de uma na outra.

De $y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x$, $y' = -C_1 \operatorname{sen} x + C_2 \cos x$ e

$$y'' = -C_1 \cos x - C_2 \operatorname{sen} x = -y$$

$$\text{ou} \quad \frac{d^2y}{dx^2} + y = 0.$$

De $y = A\cos(x+B)$, $y' = -A \operatorname{sen}(x+B)$ e $y'' = -A\cos(x+B) = -y$.

Como $y = A\cos(x + B) = A(\cos x \cos B - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} B) =$

$$= (A \cos B) \cos x + (-A \operatorname{sen} B) \operatorname{sen} x =$$

$$= C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x.$$

9) Mostrar que $\ln x^2 + \ln \frac{y^2}{x^2} = A + x$ pode ser escrito $y^2 = Be^x$.

$$\ln x^2 + \ln \frac{y^2}{x^2} = \ln\left(x^2 \frac{y^2}{x^2}\right) = \ln y^2 = A + x.$$

Então $y^2 = e^{A+x} = e^A \cdot e^x = Be^x$.

10) Mostrar que $\operatorname{arc sen} x - \operatorname{arc sen} y = A$ pode ser escrito $x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2} = B$.
$\operatorname{sen}(\operatorname{arc sen} x - \operatorname{arc sen} y) = \operatorname{sen} A = B$.

Então $\operatorname{sen}(\operatorname{arc sen} x)\cos(\operatorname{arc sen} y) - \cos(\operatorname{arc sen} x)\operatorname{sen}(\operatorname{arc sen} y) =$
$= x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2} = B$.

11) Mostrar que $\ln(1 + y) + \ln(1 + x) = A$ pode ser escrito $xy + x + y = C$.

$\ln(1 + y) + \ln(1 + x) = \ln(1 + y)(1 + x) = A$.

Então $(1+y)(1+x) = xy+x+y+1 = e^A = B$ e $xy+x+y = B - 1 = C$.

12) Mostrar que $\operatorname{senh} y + \cosh y = Cx$ pode ser escrito $y = \ln x + A$.

Aqui $\operatorname{senh} y + \cosh y = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y}) + \frac{1}{2}(e^y + e^{-y}) = e^y = Cx$.

Então $y = \ln C + \ln x = A + \ln x$.

PROBLEMAS PROPOSTOS

Mostrar que cada uma das expressões seguintes é uma solução da equação diferencial correspondente. Dizer se é solução particular ou geral (primitiva).

13) $y = 2x^2$,	$xy' = 2y$.	Solução Particular
14) $x^2 + y^2 = C$,	$yy' + x = 0$.	Primitiva
15) $y = Cx + C^4$,	$y = xy' + (y')^4$.	Primitiva
16) $(1-x)\,y^2 = x^3$,	$2x^3\,y' = y\,(y^2 + 3x^2)$.	Solução Particular
17) $y = e^x(1+x)$,	$y'' - 2y' + y = 0$.	Solução Particular
18) $y = C_1\,x + C_2\,e^x$,	$(x-1)\,y'' - xy' + y = 0$.	Solução Geral
19) $y = C_1\,e^x + C_2\,e^{-x}$,	$y'' - y = 0$.	Solução Geral
20) $y = C_1\,e^x + C_2\,e^{-x} + x - 4$,	$y'' - y = 4 - x$.	Solução Geral
21) $y = C_1\,e^x + C_2\,e^{2x}$,	$y'' - 3y' + 2y = 0$.	Solução Geral
22) $y = C_1\,e^x + C_2\,e^{2x} + x^2\,e^x$,	$y'' - 3y' + 2y = 2e^x(1-x)$.	Solução Geral

CAPÍTULO III

EQUAÇÕES DE PRIMEIRA ORDEM E PRIMEIRO GRAU

Uma equação diferencial de primeira ordem e primeiro grau pode ser escrita na forma

(1) $$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0.$$

EXEMPLO 1. *a*) $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y+x}{y-x} = 0$ pode ser escrita $(y+x)\,dx + (y-x)\,dy = 0$
onde $M(x, y) = y + x$ e $N(x, y) = y - x$.

b) $\dfrac{dy}{dx} = 1 + x^2y$ pode ser escrita $(1+x^2y)dx - dy = 0$
onde $M(x, y) = 1 + x^2y$ e $N(x, y) = -1$.

Se $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy$ fôr a diferencial total de uma função $\mu(x, y)$, isto é, se

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = d\mu(x, y).$$

(1) é chamada equação diferencial exata e $\mu(x, y) = C$ é sua primitiva ou solução geral.

EXEMPLO 2. $3x^2y^2\,dx + 2x^3y\,dy = 0$ é uma equação diferencial exata porque $3x^2y^2\,dx + 2x^3y\,dy = d(x^3y^2)$. Sua primitiva é $x^3y^2 = C$.

Se (1) não fôr equação diferencial exata, porém

$$\xi(x, y)\{M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy\} = d\mu(x, y),$$

$\xi(x, y)$ é chamado um fator de integração de (1) e $\mu(x, y) = C$ é sua primitiva.

EXEMPLO 3. $3y\,dx + 2x\,dy = 0$ não é uma equação diferencial exata, porém quando multiplicada por $\xi(x, y) = x^2y$, temos $3x^2y^2\,dx + 2x^3y\,dy = 0$, que o é. Assim, a primitiva de $3y\,dx + 2x\,dy = 0$ é $x^3y^2 = C$. (Ver Exemplo 2).

Se (1) não fôr equação diferencial exata e não se puder determinar fàcilmente um fator de integração, será possível, por meio de uma troca de uma ou de ambas as variáveis, obter uma equação para a qual se possa determinar o fàtor de integração.

EXEMPLO 4. A transformação $x = t - y$, $dx = dt - dy$, (i. e., $x + y = t$), reduz a equação

$$(x + y + 1)\,dx + (2x + 2y + 3)\,dy = 0$$

a $$(t + 1)\,(dt - dy) + (2t + 3)\,dy = 0$$

ou $$(t + 1)\,dt + (t + 2)\,dy = 0.$$

Por meio do fator de integração $\frac{1}{t+2}$ a equação toma a forma

$$dy + \frac{t+1}{t+2}\,dt = dy + dt - \frac{1}{t+2}\,dt = 0.$$

Então $$y + t - \ln(t + 2) = C$$

e, como $t = x + y$, $2y + x - \ln(x + y + 2) = C.$

NOTA. A transformação $x+y+1=t$ ou $2x+2y+3=2s$ é também sugerida pela forma da equação.

Uma equação diferencial que permite encontrar fàcilmente um fator de integração é

(2) $$f_1(x)\cdot g_2(y)\,dx + f_2(x)\cdot g_1(y)\,dy = 0.$$

Por meio do fator de integração $\frac{1}{f_2(x)\cdot g_2(y)}$, (2) se reduz a

(2′) $$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\,dx + \frac{g_1(y)}{g_2(y)}\,dy = 0$$

cuja primitiva é

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}\,dx + \int \frac{g_1(y)}{g_2(y)}\,dy = C.$$

A equação (2) é classificada como de *Variáveis Separáveis* e em (2′) as variáveis estão separadas.

EXEMPLO 5. Quando a equação diferencial

$$(3x^2y - xy)\,dx + (2x^3y^2 + x^3y^4)\,dy = 0$$

é posta sob a forma

$$y(3x^2 - x)\,dx + x^3(2y^2 + y^4)\,dy = 0$$

vê-se que é do tipo de Variáveis Separáveis. O fator de integração

$\frac{1}{yx^3}$ transforma-a em $\left(\frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx + (2y + y^3)\, dy = 0$ em que as variáveis estão separadas. Integrando, obtém-se a primitiva:

$$3 \ln x + \frac{1}{x} + y^2 + \frac{1}{4} y^4 = C.$$

Se a equação (1) admite uma solução $f(x, y, C) = 0$, onde C é uma constante arbitrária, existe uma infinidade de valores de integração $\xi(x, y)$ tais que

$$\xi(x, y) \{ M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dx \} = 0$$

é uma equação diferencial exata. Existem, também, transformações de variáveis que levam (1) para o tipo de Variáveis Separáveis. Entretanto, nenhuma regra geral pode aqui ser estabelecida para se achar êste ou aquêle fator ou esta ou aquela transformação. Assim, estamos limitados a resolver certos tipos de equações diferenciais de primeira ordem e primeiro grau, isto é, aquelas para as quais se pode estabelecer uma regra para se determinar um fator de integração ou uma transformação efetiva.

As equações do tipo de Variáveis Separáveis, juntamente com as equações que podem ser reduzidas a êsse tipo, por uma transformação de variáveis, serão estudadas no Capítulo IV.

As equações diferenciais exatas e outros tipos a elas redutíveis, por meio de fatôres de integração, serão estudados no Capítulo V.

A equação linear de primeira ordem

$$\frac{dy}{dx} + P(x) \cdot y = Q(x) \tag{3}$$

e as equações redutíveis à forma (3), por meio de transformações, serão estudadas no Capítulo VI.

Êste grupamento é apenas uma questão de conveniência. Uma dada equação pode ser enquadrada em mais de um grupo.

Exemplo 6. A equação $x\,dy - y\,dx = 0$ pode ser enquadrada em qualquer um dos grupos porque

a) por meio do fator de integração $1/xy$ as variáveis são separadas; então, $dy/y - dx/x = 0$ de modo que $\ln y - \ln x = \ln C$ ou $y/x = C$.

b) por meio do fator de integração $1/x^2$ ou $1/y^2$ a equação se transforma em equação diferencial exata; então, $\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} = 0$

$$\text{e } \frac{y}{x} = C \text{ ou } \frac{x\,dy - y\,dx}{y^2} = 0 \text{ e } -\frac{x}{y} = C_1,\ \frac{y}{x} = -\frac{1}{C_1} = C.$$

c) quando escrita $\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}\, y = 0$, é uma equação linear de primeira ordem.

Tem sido destacado o fato de não ter a primitiva uma forma única. Assim, a primitiva no Exemplo 6 pode ser:

a) $\ln y - \ln x = \ln C$, *c*) $y = Cx$,

b) $y/x = C$, *d*) $x/y = K$, etc.

É usual aceitar qualquer uma dessas formas, sabendo-se, como já se viu, que certas soluções particulares podem não aparecer. Há, assim, uma dificuldade a mais.

Exemplo 7. É claro que $y = 0$ é uma solução particular de $\frac{dy}{dx} = y$ ou $dy - y\,dx = 0$. Quando $y \neq 0$, podemos escrever $\frac{dy}{y} - dx = 0$, obtendo $\ln y - x = \ln C$ com $C \neq 0$. Por sua vez, isto pode ser escrito $y = Ce^x$, $C \neq 0$. Assim, para incluir tôdas as soluções devemos escrever $y = 0$; $y = Ce^x$; $C \neq 0$. Note-se, porém, que $y = Ce^x$, livre das restrições impostas a y e C, inclui tôdas as soluções.

Êste fato aparecerá repetidas vêzes adiante, porém, como é costume, deixaremos de apontar as restrições; isto é, escreveremos a primitiva como $y = Ce^x$, com C completamente arbitrário. Como justificativa faremos a seguinte observação: multiplicando a equação dada por e^{-x} obtemos $e^{-x}\,dy - ye^{-x}\,dx = 0$ e, por integração, temos $e^{-x}y = C$ ou $y = Ce^x$. Com êste processo, não é necessário fazer nenhuma restrição a y ou C.

Capítulo IV

EQUAÇÕES DE PRIMEIRA ORDEM E PRIMEIRO GRAU

Equações de Variáveis Separáveis e Redução a Equações de Variáveis Separáveis

Variáveis Separáveis. As variáveis da equação

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0$$

são separáveis se a equação admite a forma:

$$f_1(x) \cdot g_2(y)\, dx + f_2(x) \cdot g_1(y)\, dy = 0. \tag{1}$$

O fator de integração $\frac{1}{f_2(x) \cdot g_2(y)}$, determinado por inspeção, reduz (1) à forma

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\, dx + \frac{g_1(y)}{g_2(y)}\, dy = 0$$

da qual a primitiva pode ser obtida por integração.

Por exemplo, $(x-1)^2 y\, dx + x^2(y+1)\, dy = 0$ é da forma (1). O fator de integração $\frac{1}{x^2 y}$ reduz a equação a

$$\frac{(x-1)^2}{x^2}\, dx + \frac{(y+1)}{y}\, dy = 0$$

na qual as variáveis estão separadas. (Ver Problemas 1-5).

Equações Homogêneas. Uma função $f(x, y)$ é homogênea do grau n se

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y).$$

Por exemplo:

a) $f(x, y) = x^4 - x^3 y$ é homogênea do 4.º grau porque

$$f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^4 - (\lambda x)^3 (\lambda y) = \lambda^4 (x^4 - x^3 y) = \lambda^4 f(x, y).$$

b) $f(x, y) = e^{y/x} + \operatorname{tg}\frac{y}{x}$ é homogênea do grau 0 porque

$$f(\lambda x, \lambda y) = e^{\lambda y/\lambda x} + \operatorname{tg}\frac{\lambda y}{\lambda x} = e^{y/x} + \operatorname{tg}\frac{y}{x} = \lambda^0 \ f(x, y).$$

c) $f(x, y) = x^2 + \operatorname{sen} x \cos y$ não é homogênea porque
$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 x^2 + \operatorname{sen}(\lambda x)\cos(\lambda y) \neq \lambda^n f(x, y)$.

A equação diferencial $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ é homogênea se $M(x, y)$ e $N(x, y)$ são homogêneas e do mesmo grau. Por exemplo, $x \ln\frac{y}{x}\,dx + \frac{y^2}{x}\operatorname{arc\,sen}\frac{y}{x}\,dy = 0$ é homogênea do grau 1, porém nem

$$(x^2 + y^2)\,dx - (xy^2 - y^3)\,dy = 0 \quad \text{nem} \quad (x + y^2)\,dx + (x - y)\,dy = 0$$

é uma equação homogênea.

A transformação

$$y = vx, \qquad dy = v\,dx + x\,dv$$

reduzirá qualquer equação homogênea à forma

$$P(x, v)\,dx + Q(x, v)\,dv = 0$$

em que as variáveis são separáveis. Depois da integração v é substituído por y/x para voltar às variáveis originais. (Ver Problemas 6-11).

Equações em que $M(x, y)$ e $N(x, y)$ são lineares, porém não homogêneas.

a) A equação

$(a_1x + b_1y + c_1)\,dx + (a_2x + b_2y + c_2)\,dy = 0$, $(a_1b_2 - a_2b_1 = 0)$,

é reduzida pela transformação

$$a_1x + b_1y = t, \qquad dy = \frac{dt - a_1\,dx}{b_1}$$

à forma $\qquad P(x, t)\,dx + Q(x, t)\,dt = 0$

em que as variáveis são separáveis. (Ver Problema 12).

b) A equação

$(a_1x + b_1y + c_1)\,dx + (a_2x + b_2y + c_2)\,dy = 0$, $(a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0)$,

se reduz à forma homogênea

$$(a_1x' + b_1y')\,dx' + (a_2x' + b_2y')\,dy' = 0$$

pela transformação

$$x = x' + h, \qquad y = y' + k$$

onde $x = h$, $y = k$ são as soluções das equações

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad \text{e} \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0.$$

(Ver Problemas 13-14).

Equações da forma $y \cdot f(xy)\,dx + x \cdot g(xy)\,dy = 0$. A transformação

$$xy = z, \quad y = \frac{z}{x}, \quad dy = \frac{x\,dz - z\,dx}{x^2}$$

reduz uma tal equação à forma

$$P(x, z)\,dx + Q(x, z)\,dz = 0$$

em que as variáveis são separáveis. (Ver Problemas 15-17).

Outras substituições. Equações de tipos diferentes das que foram discutidas acima podem ser reduzidas a uma forma em que as variáveis são separadas por meio de uma transformação escolhida convenientemente. Não se pode dar uma regra ou processo geral; em cada caso, a forma da equação sugerirá a transformação.

(Ver Problemas 18-22).

PROBLEMAS RESOLVIDOS

VARIÁVEIS SEPARÁVEIS

1) Resolver $x^3\,dx + (y+1)^2\,dy = 0$.

As variáveis estão separadas. Assim, integrando têrmo a têrmo:

$$\frac{x^4}{4} + \frac{(y+1)^3}{3} = C_1 \quad \text{ou} \quad 3x^4 + 4(y+1)^3 = C.$$

2) Resolver $x^2(y+1)\,dx + y^2(x-1)\,dy = 0$.

O fator de integração $\dfrac{1}{(y+1)(x-1)}$ reduz a equação a

$$\frac{x^2}{x-1}\,dx + \frac{y^2}{y+1}\,dy = 0.$$

Então, integrando $\left(x + 1 + \dfrac{1}{x-1}\right)dx + \left(y - 1 + \dfrac{1}{y+1}\right)dy = 0.$

$$\tfrac{1}{2}x^2 + x + \ln(x-1) + \tfrac{1}{2}y^2 - y + \ln(y+1) = C_2,$$

$$x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2\ln(x-1)(y+1) = C_1,$$

e

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 + 2\ln(x-1)(y+1) = C.$$

3) Resolver $4x\,dy - y\,dx = x^2\,dy$ ou $y\,dx + (x^2 - 4x)\,dy = 0$.

O fator de integração $\dfrac{1}{y(x^2-4x)}$ reduz a equação a $\dfrac{dx}{x(x-4)} + \dfrac{dy}{y} = 0$ em que as variáveis são separáveis.

A última equação pode ser escrita

$$\frac{\frac{1}{4}\,dx}{x-4} - \frac{\frac{1}{4}\,dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{dx}{x-4} - \frac{dx}{x} + 4\frac{dy}{y} = 0.$$

Integrando, $\ln(x-4) - \ln x + 4\ln y = \ln C$ ou $(x-4)y^4 = Cx$.

4) Resolver $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4y}{x(y-3)}$ ou $x(y-3)\,dy = 4y\,dx$.

O fator de integração $\dfrac{1}{xy}$ reduz a equação a $\dfrac{y-3}{y}dy = \dfrac{4}{x}dx$.

Integrando, $y - 3\ln y = 4\ln x + \ln C_1$ ou $y = \ln(C_1 x^4 y^3)$.
Isto pode ser escrito: $C_1 x^4 y^3 = e^y$ ou $x^4 y^3 = Ce^y$.

5) Achar a solução particular de $(1+x^3)\,dy - x^2y\,dx = 0$ satisfazendo a condição inicial $x = 1$, $y = 2$.

Achar primeiro a primitiva, usando o fator de integração $\dfrac{1}{y(1+x^3)}$.

Então $\quad \dfrac{dy}{y} - \dfrac{x^2}{1+x^3}dx = 0$, $\ln y - \dfrac{1}{3}\ln(1+x^3) = C_1$;

$$3\ln y = \ln(1+x^3) + \ln C, \; y^3 = C(1+x^3).$$

Quando $x=1$, $y=2$: $2^3 = C(1+1)$, $C=4$, e a solução particular procurada é $y^3 = 4(1+x^3)$.

EQUAÇÕES HOMOGÊNEAS

6) Sendo $M\,dx + N\,dy = 0$ homogênea, mostrar que a transformação $y = vx$ separará as variáveis:

Quando $M\,dx + N\,dy = 0$ é homogênea, do grau n, pode-se escrever

$$M\,dx + N\,dy = x^n\left\{M_1\left(\frac{y}{x}\right)dx + N_1\left(\frac{y}{x}\right)dy\right\} = 0$$

e daí

$$M_1\left(\frac{y}{x}\right)dx + N_1\left(\frac{y}{x}\right)dy = 0.$$

A transformação $y = vx$, $dy = v\,dx + x\,dv$ dá:

$M_1(v)\,dx + N_1(v)\left\{v\,dx + x\,dv\right\} = 0$ ou $\left\{M_1(v) + vN_1(v)\right\}dx + xN_1(v)\,dv = 0$

ou, finalmente, $\dfrac{dx}{x} + \dfrac{N_1(v)\,dv}{M_1(v)+vN_1(v)} = 0$ estando as variáveis separadas.

7) Resolver $(x^3 + y^3)\,dx - 3xy^2\,dy = 0$.

A equação é homogênea do terceiro grau. Usando a transformação $y = vx$, $dy = v\,dx + x\,dv$, temos

(1) $\quad x^3\left\{(1+v^3)\,dx - 3v^2(v\,dx + x\,dv)\right\} = 0$ ou $(1-2v^3)\,dx - 3v^2x\,dv = 0$

em que as variáveis são separáveis.

Usando o fator de integração $\dfrac{1}{x(1-2v^3)}$, $\dfrac{dx}{x} - \dfrac{3v^2\,dv}{1-2v^3} = 0$, e

$\ln x + \frac{1}{2}\ln(1-2v^3) = C_1$, $2\ln x + \ln(1-2v^3) = \ln C$, ou $x^2(1-2v^3) = C$.

Como $v = y/x$, a primitiva é $x^2(1-2y^3/x^3) = C$ ou $x^3 - 2y^3 = Cx$.

Note que a equação é do terceiro grau e que depois da transformação x^3 é um fator do primeiro membro de (1). Êste fator pode ser retirado ao fazer a transformação.

8) Resolver $x\,dy - y\,dx - \sqrt{x^2-y^2}\,dx = 0$.

A equação é homogênea do primeiro grau. Usando a transformação $y = vx$, $dy = v\,dx + x\,dv$ e dividindo por x, vem:

$$v\,dx + x\,dv - v\,dx - \sqrt{1-v^2}\,dx = 0 \quad \text{ou} \quad x\,dv - \sqrt{1-v^2}\,dx = 0.$$

Usando o fator de integração $\dfrac{1}{x\sqrt{1-v^2}}$, $\dfrac{dv}{\sqrt{1-v^2}} - \dfrac{dx}{x} = 0$.

Então, $\text{arc sen}\,v - \ln x = \ln C$ ou $\text{arc sen}\,v = \ln(Cx)$, e voltando às variáveis originais, usando $v = y/x$, vem:

$$\text{arc sen}\,\frac{y}{x} = \ln(Cx) \quad \text{ou} \quad Cx = e^{\text{arc sen}\,y/x}.$$

9) Resolver $\left(2x\,\text{senh}\,\dfrac{y}{x} + 3y\cosh\dfrac{y}{x}\right)dx - 3x\cosh\dfrac{y}{x}\,dy = 0$.

A equação é homogênea do primeiro grau. Usando a transformação padrão e dividindo por x, vem:

$$2\,\text{senh}\,v\,dx - 3x\cosh v\,dv = 0.$$

Então, separando as variáveis, $2\dfrac{dx}{x} - 3\dfrac{\cosh v}{\text{senh}\,v}\,dv = 0$.

Integrando,

$$2\ln x - 3\ln\text{senh}\,v = \ln C, \quad x^2 = C\,\text{senh}^3 v, \quad \text{e} \quad x^2 = C\,\text{senh}^3\frac{y}{x}.$$

10) Resolver $(2x + 3y)\,dx + (y - x)\,dy = 0$.

A equação é homogênea do primeiro grau. A transformação reduz a equação a

[illegible]

Separando as variáveis,

$$\frac{dx}{x} + \frac{v-1}{v^2+2v+2}\,dv = \frac{dx}{x} + \frac{1}{2}\,\frac{2v+2}{v^2+2v+2}\,dv - \frac{2\,dv}{(v+1)^2+1} = 0.$$

Integrando, $\ln x + \frac{1}{2}\ln(v^2+2v+2) - 2\,\text{arc tg}\,(v+1) = C_1$,

$\ln x^2(v^2+2v+2) - 4\,\text{arc tg}\,(v+1) = C$, e $\ln(y^2+2xy+2x^2) - 4\,\text{arc tg}\,\dfrac{x+y}{x} = C$.

11) Resolver $(1 + 2e^{x/y})\,dx + 2e^{x/y}\left(1 - \dfrac{x}{y}\right)dy = 0$.

A equação é homogênea do grau 0. A presença de x/y em tôda a equação sugere o uso da transformação $x = vy$, $dx = v\,dy + y\,dv$.

Então

$$(1 + 2e^v)(v\,dy + y\,dv) + 2e^v(1-v)\,dy = 0, \quad (v + 2e^v)\,dy + y(1 + 2e^v)\,dv = 0,$$

e
$$\frac{dy}{y} + \frac{1 + 2e^v}{v + 2e^v}\,dv = 0.$$

Integrando e substituindo v por x/y,

$$\ln y + \ln(v + 2e^v) = \ln C \quad \text{e} \quad x + 2ye^{x/y} = C.$$

EQUAÇÕES LINEARES PORÉM NÃO HOMOGÊNEAS

12) Resolver $(x + y)\,dx + (3x + 3y - 4)\,dy = 0$.

As expressões $(x+y)$ e $(3x+3y)$ sugerem a transformação $x+y = t$.

Usamos $y = t - x$, $dy = dt - dx$ para obter $t\,dx + (3t-4)(dt - dx) = 0$
ou $(4 - 2t)\,dx + (3t - 4)\,dt = 0$
em que as variáveis são separáveis.

Então $2\,dx + \dfrac{3t-4}{2-t}\,dt = 2\,dx - 3\,dt + \dfrac{2}{2-t}\,dt = 0.$

Integrando e substituindo t por $x + y$, temos

$$2x - 3t - 2\ln(2-t) = C_1, \quad 2x - 3(x+y) - 2\ln(2-x-y) = C_1,$$

e
$$x + 3y + 2\ln(2 - x - y) = C.$$

13) Resolver $(2x - 5y + 3)\,dx - (2x + 4y - 6)\,dy = 0$.

Resolver primeiro o sistema $2x - 5y + 3 = 0$, $2x + 4y - 6 = 0$ para obter $x = h = 1$, $y = k = 1$.

A transformação
$$x = x' + h = x' + 1, \qquad dx = dx'$$
$$y = y' + k = y' + 1, \qquad dy = dy'$$

reduz a equação dada a $(2x' - 5y')\,dx' - (2x' + 4y')\,dy' = 0$ que é homogênea do primeiro grau. (Note que esta última equação pode ser escrita sem se passar pelos detalhes da transformação).

Usando a transformação $y' = vx'$, $dy' = v\,dx' + x'\,dv$, vem:

$$(2-5v)\,dx' - (2+4v)(v\,dx' + x'\,dv) = 0, \quad (2 - 7v - 4v^2)\,dx' - x'(2+4v)\,dv = 0,$$

e, finalmente:
$$\frac{dx'}{x'} + \frac{4}{3}\,\frac{dv}{4v-1} + \frac{2}{3}\,\frac{dv}{v+2} = 0.$$

Integrando,

$$\ln x' + \frac{1}{3}\ln(4v-1) + \frac{2}{3}\ln(v+2) = \ln C_1 \quad \text{ou} \quad x'^3(4v-1)(v+2)^2 = C.$$

Substituindo v por y'/x', $(4y' - x')(y' + 2x')^2 = C$,

e substituindo x' por $x - 1$ e y' por $y - 1$, obtém-se a primitiva

$$(4y - x - 3)(y + 2x - 3)^2 = C.$$

14) Resolver $(x - y - 1)\,dx + (4y + x - 1)\,dy = 0$.

Resolvendo o sistema $x - y - 1 = 0$, $4y + x - 1 = 0$ vem

$$x = h = 1, \quad y = k = 0.$$

A transformação

$$x = x' + h = x' + 1, \qquad dx = dx'$$
$$y = y' + k = y', \qquad dy = dy'$$

reduz a equação dada a $(x' - y')\,dx' + (4y' + x')\,dy' = 0$ que é homogênea do primeiro grau. [Note que esta transformação, $x - 1 = x'$, $y = y'$, poderia ser obtida por inspeção, isto é, pelo exame dos têrmos $(x - y - 1)$ e $(4y + x - 1)$].

Usando a transformação $y' = vx'$, $dy' = v\,dx' + x'\,dv$

temos: $$(1 - v)\,dx' + (4v + 1)(v\,dx' + x'\,dv) = 0.$$

Então

$$\frac{dx'}{x'} + \frac{4v + 1}{4v^2 + 1}\,dv = \frac{dx'}{x'} + \frac{1}{2}\,\frac{8v}{4v^2 + 1}\,dv + \frac{dv}{4v^2 + 1} = 0,$$

$$\ln x' + \frac{1}{2}\ln(4v^2 + 1) + \frac{1}{2}\,\text{arc tg}\,2v = C_1,$$

$$\ln x'^2(4v^2 + 1) + \text{arc tg}\,2v = C, \quad \ln(4y'^2 + x'^2) + \text{arc tg}\,\frac{2y'}{x'} = C,$$

e $$\ln[4y^2 + (x - 1)^2] + \text{arc tg}\,\frac{2y}{x - 1} = C.$$

FORMA $y\,f(xy)\,dx + x\,g(xy)\,dy = 0$.

15) Resolver $y(xy + 1)\,dx + x(1 + xy + x^2y^2)\,dy = 0$.

A transformação $xy = v$, $y = v/x$, $dy = \dfrac{x\,dv - v\,dx}{x^2}$ reduz a equação a

$$\frac{v}{x}(v + 1)\,dx + x(1 + v + v^2)\,\frac{x\,dv - v\,dx}{x^2} = 0$$

que, depois de efetuada, se transforma em: $v^3\,dx - x(1 + v + v^2)\,dv = 0$. Separando as variáveis, temos:

$$\frac{dx}{x} - \frac{dv}{v^3} - \frac{dv}{v^2} - \frac{dv}{v} = 0.$$

Então

$$\ln x + \frac{1}{2v^2} + \frac{1}{v} - \ln v = C_1, \quad 2v^2 \ln\left(\frac{v}{x}\right) - 2v - 1 = Cv^2,$$

e $$2x^2y^2 \ln y - 2xy - 1 = Cx^2y^2.$$

16) Resolver $(y - xy^2)\,dx - (x + x^2y)\,dy = 0$ ou $y(1 - xy)\,dx - x(1 + xy)\,dy = 0$.

A transformação $xy = v$, $y = v/x$, $dy = \dfrac{x\,dv - v\,dx}{x^2}$ reduz a equação a

$$\frac{v}{x}(1 - v)\,dx - x(1 + v)\frac{x\,dv - v\,dx}{x^2} = 0 \quad \text{ou} \quad 2v\,dx - x(1 + v)\,dv = 0.$$

Então

$$2\frac{dx}{x} - \frac{1+v}{v}dv = 0,\ 2\ln x - \ln v - v = \ln C,\ \frac{x^2}{v} = Ce^v,\ \text{ e }\ x = Cye^{xy}.$$

17) Resolver

$(1-xy+x^2y^2)\,dx+(x^3y-x^2)\,dy=0$ ou $y\,(1-xy+x^2y^2)\,dx+x\,(x^2y^2-xy)\,dy=0.$

A transformação $xy = v,\ y = v/x,\ dy = \dfrac{x\,dv - v\,dx}{x^2}$ reduz a equação a

$$\frac{v}{x}\,(1-v+v^2)\,dx + x\,(v^2-v)\,\frac{x\,dv - v\,dx}{x^2} = 0 \quad \text{ou} \quad v\,dx + x\,(v^2-v)\,dv = 0.$$

Então

$$\frac{dx}{x} + (v-1)\,dv = 0,\ \ \ln x + \tfrac{1}{2}\,v^2 - v = C,\ \text{ e }\ \ln x = xy - \tfrac{1}{2}\,x^2y^2 + C.$$

OUTRAS SUBSTITUIÇÕES

18) Resolver $\dfrac{dy}{dx} = (y-4x)^2$ ou $dy = (y-4x)^2\,dx.$

A transformação, sugerida, $y-4x = v,\ dy = 4dx + dv$ reduz a equação a

$$4\,dx + dv = v^2\,dx \quad \text{ou} \quad dx - \frac{dv}{v^2-4} = 0.$$

Então

$$x + \tfrac{1}{4}\ln\frac{v+2}{v-2} = C_1,\quad \ln\frac{v+2}{v-2} = \ln C - 4x,\ \ \frac{v+2}{v-2} = Ce^{-4x},$$

e

$$\frac{y-4x+2}{y-4x-2} = Ce^{-4x}.$$

19) Resolver $\operatorname{tg}^2(x+y)\,dx - dy = 0.$

A equação sugere a transformação $x + y = v,\ dy = dv - dx$ que reduz a equação a

$$\operatorname{tg}^2 v\,dx - (dv - dx) = 0,\ \ dx - \frac{dv}{1+\operatorname{tg}^2 v} = 0,\ \ \text{ou}\ \ dx - \cos^2 v\,dv = 0.$$

Integrando, $x - \tfrac{1}{2}\,v - \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 2v = C_1$ e $2\,(x-y) = C + \operatorname{sen} 2\,(x+y).$

20) Resolver $(2 + 2x^2\,y^{1/2})\,y\,dx + (x^2\,y^{1/2} + 2)\,x\,dy = 0.$

A transformação sugerida é $x^2\,y^{1/2} = v,\ y = \dfrac{v^2}{x^4},\ dy = \dfrac{2v}{x^4}\,dv - \dfrac{4v^2}{x^5}\,dx$ que reduz a equação a

$$(2+2v)\,\frac{v^2}{x^4}\,dx + x\,(v+2)\left(\frac{2v}{x^4}\,dv - \frac{4v^2}{x^5}\,dx\right) = 0$$

ou

$$v\,(3+v)\,dx - x\,(v+2)\,dv = 0.$$

Então $\dfrac{dx}{x} - \dfrac{2}{3}\,\dfrac{dv}{v} - \dfrac{1}{3}\,\dfrac{dv}{v+3} = 0,\ 3\ln x - 2\ln v - \ln(v+3) = \ln C_1,$

$$x^3 = C_1 v^2\,(v+3),\quad \text{e}\quad 1 = C_1\,xy\,(x^2y^{1/2}+3)\quad \text{ou}\quad xy\,(x^2\,y^{1/2}+3) = C.$$

21) Resolver $(2x^2 + 3y^2 - 7)\,x\,dx - (3x^2 + 2y^2 - 8)\,y\,dy = 0.$

A transformação sugerida é $x^2 = u$, $y^2 = v$ que reduz a equação a

$$(2u + 3v - 7)\,du - (3u + 2v - 8)\,dv = 0$$

que é linear porém não homogênea.

A transformação $u = s + 2$, $v = t + 1$ dá a equação homogênea $(2s + 3t)\,ds - (3s + 2t)\,dt = 0$, e a transformação $s = rt$, $ds = r\,dt + t\,dr$ dá $2(r^2 - 1)\,dt + (2r + 3)\,t\,dr = 0.$

Separando as variáveis, temos:

$$2\frac{dt}{t} + \frac{2r + 3}{r^2 - 1}dr = 2\frac{dt}{t} - \frac{1}{2}\frac{dr}{r + 1} + \frac{5}{2}\frac{dr}{r - 1} = 0.$$

Então $\quad 4 \ln t - \ln(r + 1) + 5 \ln(r - 1) = \ln C,$

$$\frac{t^4(r - 1)^5}{r + 1} = \frac{(s - t)^5}{s + t} = \frac{(u - v - 1)^5}{u + v - 3} = \frac{(x^2 - y^2 - 1)^5}{x^2 + y^2 - 3} = C$$

e

$$(x^2 - y^2 - 1)^5 = C(x^2 + y^2 - 3).$$

22) Resolver $x^2(x\,dx + y\,dy) + y\,(x\,dy - y\,dx) = 0.$

Aqui $x\,dx + y\,dy = \frac{1}{2}\,d(x^2 + y^2)$ e $x\,dy - dx = x^2\,d(y/x)$ sugerem $x^2 + y^2 = \rho^2$, $y/x = \operatorname{tg}\theta$, ou $x = \rho\cos\theta$, $y = \operatorname{sen}\theta$, $dx = -\rho\operatorname{sen}\theta\,d\theta + \cos\theta\,d\rho$, $dy = \rho\cos\theta\,d\theta + \operatorname{sen}\theta\,d\rho$.

A equação dada toma a forma

$$\rho^2\cos^2\theta\,(\rho\,d\rho) + \rho\operatorname{sen}\theta\,(\rho^2\,d\theta) = 0 \quad \text{ou} \quad d\rho + \operatorname{tg}\theta\sec\theta\,d\theta = 0.$$

Então

$$\rho + \sec\theta = C_1, \quad \sqrt{x^2 + y^2}\left(\frac{x + 1}{x}\right) = C_1, \text{ e } (x^2 + y^2)(x + 1)^2 = Cx^2.$$

PROBLEMAS PROPOSTOS

23) Dizer se as funções seguintes são ou não homogêneas e, nas homogêneas, dar o grau.

a) $x^2 - xy$, — homogênea do segundo grau.

b) $\dfrac{xy}{x + y^2}$, — não homogênea.

c) $\dfrac{xy}{x^2 + y^2}$, — homogênea do grau zero.

d) $x + y\cos\dfrac{y}{x}$, — homogênea do primeiro grau.

e) $\operatorname{arc\,sen} xy$, — não homogênea.

f) $xe^{y/x} + ye^{x/y}$, — homogênea do primeiro grau.

g) $\ln x - \ln y$ ou $\ln \frac{x}{y}$, homogênea do grau zero.

h) $\sqrt{x^2 + 2xy + 3y^2}$, homogênea do primeiro grau.

i) $x \operatorname{sen} y + y \operatorname{sen} x$, não homogênea.

Classificar cada uma das equações abaixo em uma ou mais das seguintes categorias:

(1) Variáveis separáveis.

(2) Equações homogêneas.

(3) Equações em que $M(x, y)$ e $N(x, y)$ são lineares porém não homogêneas.

(4) Equações da forma $y\, f(xy)\, dx + x\, g(xy)\, dy = 0$.

(5) Nenhuma das categorias acima.

24) $4y\, dx + x\, dy = 0$ *Resp.:* (1); (2), do primeiro grau

25) $(1 + 2y)\, dx + (4 - x^2)\, dy = 0$ *Resp.:* (1)

26) $y^2\, dx - x^2\, dy = 0$ *Resp.:* (1); (2), do segundo grau

27) $(1 + y)\, dx - (1 + x)\, dy = 0$ *Resp.:* (1); (3)

28) $(xy^2 + y)\, dx + (x^2 y - x)\, dy = 0$ *Resp.:* (4)

29) $\left(x \operatorname{sen} \frac{y}{x} - y \cos \frac{y}{x}\right) dx + x \cos \frac{y}{x}\, dy = 0$ *Resp.:* (2), do primeiro grau

30) $y^2 (x^2 + 2)\, dx + (x^3 + y^3)(y\, dx - x\, dy) = 0$ *Resp.:* (5)

31) $y \sqrt{x^2 + y^2}\, dx - x\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right) dy = 0$ *Resp.:* (2), do segundo grau

32) $(x + y + 1)\, dx + (2x + 2y + 1)\, dy = 0$ *Resp.:* (3)

33) Das equações acima, resolver as que se enquadram nas categorias (1) – (4).

Resp.: 24) $x^4 y = C$

Resp.: 25) $(1 + 2y)^2 = C \dfrac{2 - x}{2 + x}$

Resp.: 26) $y = x + Cxy$

Resp.: 27) $(1 + y) = C(1 + x)$

Resp.: 28) $y = Cxe^{xy}$

Resp.: 29) $x \operatorname{sen} \dfrac{y}{x} = C$

Resp.: 31) $Cx - \sqrt{x^2 + y^2} = x \ln\left(\sqrt{x^2 + y^2} - x\right)$

Resp.: 32) $x + 2y + \ln(x + y) = C$

Resolver as seguintes equações:

34) $(1 + 2y)\, dx - (4 - x)\, dy = 0$ *Resp.:* $(x - 4)^2 (1 + 2y) = C$

35) $xy\, dx + (1 + x^2)\, dy = 0$ *Resp.:* $y^2 (1 + x^2) = C$

36) $\operatorname{cotg}\theta\, d\rho + \rho\, d\theta = 0$ *Resp.:* $\rho = C \cos\theta$

37) $(x + 2y)\,dx + (2x + 3y)\,dy = 0$ *Resp.:* $x^2 + 4xy + 3y^2 = C$

38) $2x\,dy - 2y\,dx = \sqrt{x^2 + 4y^2}\,dx$ *Resp.:* $1 + 4Cy - C^2x^2 = 0$

39) $(3y - 7x + 7)\,dx + (7y - 3x + 3)\,dy = 0$ *Resp.:* $(y - x + 1)^2(y + x - 1)^5 = C$

40) $xy\,dy = (y + 1)(1 - x)\,dx$ *Resp.:* $y + x = \ln Cx(y + 1)$

41) $(y^2 - x^2)\,dx + xy\,dy = 0$ *Resp.:* $2x^2y^2 = x^4 + C$

42) $y(1 + 2xy)\,dx + x(1 - xy)\,dy = 0$ *Resp.:* $y = Cx^2e^{-1/xy}$

43) $dx + (1 - x^2)\cot g\, y\,dy = 0$ *Resp.:* $\operatorname{sen}^2 y = C\dfrac{1 - x}{1 + x}$

44) $(x^3 + y^3)\,dx + 3xy^2\,dy = 0$ *Resp.:* $x^4 + 4xy^3 = C$

45) $(3x + 2y + 1)\,dx - (3x + 2y - 1)\,dy = 0$ *Resp.:* $\ln(15x + 10y - 1) + \dfrac{5}{2}(x - y) = C$

Achar a solução particular indicada:

46) $x\,dy + 2y\,dx = 0$; quando $x = 2$, $y = 1$. *Resp.:* $x^2y = 4$

47) $(x^2 + y^2)\,dx + xy\,dy = 0$; quando $x = 1$, $y = -1$.

Resp.: $x^4 + 2x^2y^2 = 3$

48) $\cos y\,dx + (1 + e^{-x})\operatorname{sen} y\,dy = 0$; quando $x = 0$, $y = \pi/4$.

Resp.: $(1 + e^x)\sec y = 2\sqrt{2}$

49) $(y^2 + xy)\,dx - x^2\,dy = 0$; quando $x = 1$, $y = 1$.

Resp.: $x = e^{1 - x/y}$

50) Resolver a equação do Problema 30 usando a substituição $y = vx$.

Resp.: $x^2y\ln x - y + x^3 - \frac{1}{2}y^3 = Cx^2y$

51) Resolver $y' = -2(2x + 3y)^2$ usando a substituição $z = 2x + 3y$.

Resp.: $\dfrac{1 + \sqrt{3}(2x + 3y)}{1 - \sqrt{3}(2x + 3y)} = Ce^{4\sqrt{3}x}$

52) Resolver $(x - 2\operatorname{sen} y + 3)\,dx + (2x - 4\operatorname{sen} y - 3)\cos y\,dy = 0$ usando a substituição $\operatorname{sen} y = z$.

Resp.: $8\operatorname{sen} y + 4x + 9\ln(4x - 8\operatorname{sen} y + 3) = C$

CAPÍTULO V

EQUAÇÕES DE PRIMEIRA ORDEM E PRIMEIRO GRAU

Equações Diferenciais Exatas e Redução a Equações Diferenciais Exatas

A condição necessária e suficiente para que

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0 \tag{1}$$

seja uma equação diferencial exata é

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{2}$$

Algumas vêzes uma equação aparece como diferencial exata depois de um reagrupamento de seus têrmos. A equação, na sua nova forma, pode então ser integrada têrmo a têrmo.

Por exemplo,

$$(x^2 - y)\, dx + (y^2 - x)\, dy = 0$$

é uma equação diferencial exata, porque

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - y) = -1 = \frac{\partial}{\partial x}(y^2 - x) = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Isto pode ser evidenciado, também, com o seguinte arranjo:

$$x^2\, dx + y^2\, dy - (y\, dx + x\, dy) = 0.$$

Esta equação pode ser integrada têrmo a têrmo, dando a primitiva $x^3/3 + y^3/3 - xy = C$. A equação $(y^2 - x)\, dx + (x^2 - y)\, dy = 0$, entretanto, não é diferencial exata, porque $\dfrac{\partial M}{\partial y} = 2y \neq 2x = \dfrac{\partial N}{\partial x}$.

(Ver também Problema 1).

Se (1) é a diferencial exata da equação $\mu(x, y) = C$,

$$d\mu = \frac{\partial \mu}{\partial x}\, dx + \frac{\partial \mu}{\partial y}\, dy = M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy.$$

Então,

$$\frac{\partial \mu}{\partial x}\, dx = M(x, y)\, dx \quad \text{e} \quad \mu(x, y) = \int^{x} M(x, y)\, dx + \phi(y),$$

onde $\int^{x}$ indica que, na integração, y deve ser considerado como uma constante e $\phi(y)$ é a constante (em relação a x) de integração. Agora,

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left\{\int^{x} M(x, y)\, dx\right\} + \frac{d\phi}{dy} = N(x, y)$$

que dá $\dfrac{d\phi}{dy} = \phi'(y)$ e, assim, $\phi(y)$ pode ser determinado.

(Ver Problemas 2-3).

Fatôres de Integração. Se (1) não é equação diferencial exata, necessita-se de um fator de integração.

a) Se $\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N} = f(x)$, uma função de x, apenas, então $e^{\int f(x)\, dx}$ é um fator de integração de (1).

Se $\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{M} = -g(y)$, uma função de y apenas, então $e^{\int g(y)\, dy}$ é um fator de integração de (1). (Ver Problemas 4-6).

b) Se (1) é homogênea e $Mx + Ny \neq 0$, então $\dfrac{1}{Mx + Ny}$ é um fator de integração. (Ver Problemas 7-9).

c) Se (1) pode ser colocada na forma $y\, f(xy)\, dx + x\, g(xy)\, dy = 0$, onde $f(xy) \neq g(xy)$, então $\dfrac{1}{xy\{f(xy) - g(xy)\}} = \dfrac{1}{Mx - Ny}$ é um fator de integração. (Ver Problemas 10-12).

d) Às vêzes, depois de reagrupados os têrmos da equação, pode-se determinar um fator de integração pelo reconhecimento de um certo grupo de têrmos como parte de uma diferencial exata. Por exemplo:

GRUPO DE TÊRMOS	FATOR DE INTEGRAÇÃO	DIFERENCIAL EXATA
$x\,dy - y\,dx$	$\dfrac{1}{x^2}$	$\dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2} = d\left(\dfrac{y}{x}\right)$
$x\,dy - y\,dx$	$\dfrac{1}{y^2}$	$-\dfrac{y\,dx - x\,dy}{y^2} = d\left(-\dfrac{x}{y}\right)$
$x\,dy - y\,dx$	$\dfrac{1}{xy}$	$\dfrac{dy}{y} - \dfrac{dx}{x} = d\left(\ln\dfrac{y}{x}\right)$
$x\,dy - y\,dx$	$\dfrac{1}{x^2+y^2}$	$\dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} = \dfrac{\dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2}}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2} = d\left(\text{arc tg}\,\dfrac{y}{x}\right)$
$x\,dy + y\,dx$	$\dfrac{1}{(xy)^n}$	$\dfrac{x\,dy + y\,dx}{(xy)^n} = d\left\{\dfrac{-1}{(n-1)(xy)^{n-1}}\right\}$, se $n \neq 1$; $\dfrac{x\,dy + y\,dx}{xy} = d\left\{\ln(xy)\right\}$, se $n = 1$
$x\,dx + y\,dy$	$\dfrac{1}{(x^2+y^2)^n}$	$\dfrac{x\,dx + y\,dy}{(x^2+y^2)^n} = d\left\{\dfrac{-1}{2(n-1)(x^2+y^2)^{n-1}}\right\}$, se $n \neq 1$; $\dfrac{x\,dx + y\,dy}{x^2+y^2} = d\left\{\tfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\right\}$, se $n = 1$

(Ver Problemas 13-19).

e) A equação $x^r y^s(my\,dx + nx\,dy) + x^\rho y^\sigma(\mu y\,dx + \nu x\,dy) = 0$, onde $r, s, m, n, \rho, \sigma, \mu, \nu$ são constantes e $m\nu - n\mu \neq 0$ tem um fator de integração da forma $x^\alpha y^\beta$. O método de solução, comumente dado, consiste na determinação de α e β por meio de certas fórmulas. Nos Problemas 20-22 seguiu-se um processo essencialmente usado na dedução das fórmulas.

PROBLEMAS RESOLVIDOS

1 Mostrar, primeiro empregando (2) e, em seguida, pelo reagrupamento de têrmos, que as equações abaixo são equações diferenciais exatas. Resolvê-las.

a) $(4x^3y^3 - 2xy)\,dx + (3x^4y^2 - x^2)\,dy = 0$

b) $(3e^{3x}y - 2x)\,dx + e^{3x}\,dy = 0$

c) $(\cos y + y\cos x)\,dx + (\text{sen}\,x - x\,\text{sen}\,y)\,dy = 0$

d) $2x(ye^{x^2} - 1)\,dx + e^{x^2}\,dy = 0$

e) $(6x^5y^3 + 4x^3y^5)\,dx + (3x^6y^2 + 5x^4y^4)\,dy = 0$

a) Por (2): $\dfrac{\partial M}{\partial y} = 12x^3y^2 - 2x = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ e a equação é uma equação diferencial exata.

Pelo exame: $(4x^3y^3\,dx + 3x^4y^2\,dy) - (2xy\,dx + x^2\,dy) = d(x^4y^3) - d(x^2y) = 0$.

A primitiva é $x^4y^3 - x^2y = C$.

b) Por (2): $\dfrac{\partial M}{\partial y} = 3e^{3x} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ e a equação é uma equação diferencial exata.

Pelo exame: $(3e^{3x}\,y\,dx + e^{3x}\,dy) - 2x\,dx = d\,(e^{3x}\,y) - d\,(x^2) = 0.$

A primitiva é $e^{3x}\,y - x^2 = C.$

c) Por (2): $\dfrac{\partial M}{\partial y} = -\operatorname{sen} y + \cos x = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ e a equação é uma equação diferencial exata.

Pelo exame

$(\cos y\,dx - x \operatorname{sen} y\,dy) + (y \cos x\,dx + \operatorname{sen} x\,dy) = d\,(x \cos y) + d\,(y \operatorname{sen} x) = 0.$

A primitiva é $x \cos y + y \operatorname{sen} x = C.$

d) Por (2): $\dfrac{\partial M}{\partial y} = 2xe^{x^2} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ e a equação é uma equação diferencial exata.

Pelo exame: $(2xye^{x^2}\,dx + e^{x^2}\,dy) - 2x\,dx = d\,(ye^{x^2}) - d\,(x^2) = 0.$

A primitiva é $ye^{x^2} - x^2 = C.$

e) Por (2): $\dfrac{\partial M}{\partial y} = 18x^5\,y^2 + 20x^3\,y^4 = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ e a equação é uma equação diferencial exata.

Pelo exame:

$(6x^5\,y^3\,dx + 3x^6\,y^2\,dy) + (4x^3\,y^5\,dx + 5x^4\,y^4\,dy) = d\,(x^6\,y^3) + d\,(x^4\,y^5) = 0.$

A primitiva é $x^6\,y^3 + x^4\,y^5 = C.$

(2) Resolver $(2x^3 + 3y)\,dx + (3x + y - 1)\,dy = 0.$

$\dfrac{\partial M}{\partial y} = 3 = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ e a equação é uma equação diferencial exata.

Solução 1. Seja $\mu\,(x, y) = \displaystyle\int^x (2x^3 + 3y)\,dx = \tfrac{1}{2}\,x^4 + 3xy + \phi\,(y).$

Então

$\dfrac{\partial \mu}{\partial y} = 3x + \phi'\,(y) = N\,(x, y) = 3x + y - 1, \quad \phi'\,(y) = y - 1, \quad \phi\,(y) = \tfrac{1}{2}\,y^2 - y,$
e a primitiva é $\tfrac{1}{2}\,x^4 + 3xy + \tfrac{1}{2}\,y^2 - y = C_1$ ou $x^4 + 6xy + y^2 - 2y = C.$

Solução 2. Grupando os têrmos: $2x^3\,dx + y\,dy - dy + 3\,(y\,dx + x\,dy) = 0$ e lembrando que $y\,dx + x\,dy = d\,(xy)$, obtemos, por integração,

$$\tfrac{1}{2}\,x^4 + \tfrac{1}{2}\,y^2 - y + 3xy = C_1$$

como antes.

(3) Resolver $(y^2\,e^{xy^2} + 4x^3)\,dx + (2xye^{xy^2} - 3y^2)\,dy = 0.$

$\dfrac{\partial M}{\partial y} = 2y\,e^{xy^2} + 2xy^3\,e^{xy^2} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ e a equação é uma equação diferencial exata.

Seja $\mu(x, y) = \int^x (y^2 e^{xy^2} + 4x^3)\, dx = e^{xy^2} + x^4 + \phi(y)$.

Então

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = 2xye^{xy^2} + \phi'(y) = 2xye^{xy^2} - 3y^2, \quad \phi'(y) = -3y^2, \quad \phi(y) = -y^3,$$

e a primitiva é $e^{xy^2} + x^4 - y^3 = C$.

A equação pode ser resolvida com o reagrupamento

$$4x^3\, dx - 3y^2\, dy + (y^2 e^{xy^2}\, dx + 2xye^{xy^2}\, dy) = 0$$

e notando que $\quad y^2 e^{xy^2}\, dx + 2xye^{xy^2}\, dy = d\,(e^{xy^2})$.

4 Resolver $(x^2 + y^2 + x)\, dx + xy\, dy = 0$.

$\dfrac{\partial M}{\partial y} = 2y$, $\dfrac{\partial N}{\partial x} = y$; a equação não é uma equação diferencial exata.

Entretanto,

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{2y - y}{xy} = \frac{1}{x} = f(x) \quad \text{e} \quad e^{\int f(x)\, dx} = e^{\int dx/x} = e^{\ln x} = x$$

é um fator de integração. Introduzindo o fator de integração, temos:

$(x^3 + xy^2 + x^2)\, dx + x^2 y\, dy = 0$ ou $x^3\, dx + x^2\, dx + (xy^2\, dx + x^2 y\, dy) = 0$.

Então, notando que $xy^2\, dx + x^2 y\, dy = d\left(\frac{1}{2} x^2 y^2\right)$, tem-se a primitiva

$$\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} x^2 y^2 = C_1 \quad \text{ou} \quad 3x^4 + 4x^3 + 6x^2 y^2 = C.$$

5) Resolver $(2xy^4 e^y + 2xy^3 + y)\, dx + (x^2 y^4 e^y - x^2 y^2 - 3x)\, dy = 0$.

$\dfrac{\partial M}{\partial y} = 8xy^3 e^y + 2xy^4 e^y + 6xy^2 + 1$, $\dfrac{\partial N}{\partial x} = 2xy^4 e^y - 2xy^2 - 3$; a equação não é uma equação diferencial exata.

Entretanto,

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 8xy^3 e^y + 8xy^2 + 4 \quad \text{e} \quad \frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{M} = \frac{4}{y} = -g(y).$$

Então $e^{\int g(y)\, dy} = e^{-4\int dy/y} = e^{-4 \ln y} = 1/y^4$ é um fator de integração e, com êle, a equação toma a forma

$$\left(2xe^y + 2\frac{x}{y} + \frac{1}{y^3}\right) dx + \left(x^2 e^y - \frac{x^2}{y^2} - 3\frac{x}{y^4}\right) dy = 0$$

que é uma equação diferencial exata.

Seja

$$\mu(x, y) = \int^x \left(2xe^y + 2\frac{x}{y} + \frac{1}{y^3}\right) dx = x^2 e^y + \frac{x^2}{y} + \frac{x}{y^3} + \phi(y).$$

Então

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = x^2 e^y - \frac{x^2}{y^2} - 3\frac{x}{y^4} + \phi'(y) = x^2 e^y - \frac{x^2}{y^2} - 3\frac{x}{y^4}, \quad \phi'(y) = 0,$$

$$\phi(y) = \text{constante},$$

e a primitiva é $x^2 e^y + \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{x}{y^3} = C.$

6) Resolver $(2x^3 y^2 + 4x^2 y + 2xy^2 + xy^4 + 2y)\,dx + 2(y^3 + x^2 y + x)\,dy = 0.$

$\dfrac{\partial M}{\partial y} = 4x^3 y + 4x^2 + 4xy + 4xy^3 + 2, \quad \dfrac{\partial N}{\partial x} = 2(2xy + 1)$; a equação não é uma equação diferencial exata.

$\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N} = 2x$ e o fator de integração é $e^{\int 2x\,dx} = e^{x^2}$. Com êsse fator, a equação se transforma em:

$$(2x^3 y^2 + 4x^2 y + 2xy^2 + xy^4 + 2y)\,e^{x^2} dx + 2(y^3 + x^2 y + x)\,e^{x^2} dy = 0$$

que é uma equação diferencial exata.

$$\text{Seja } \mu(x, y) = \int^x (2x^3 y^2 + 4x^2 y + 2xy^2 + xy^4 + 2y)\,e^{x^2} dx =$$

$$= \int^x (2xy^2 + 2x^3 y^2)\,e^{x^2} dx + \int^x (2y + 4x^2 y)\,e^{x^2} dx + \int^x xy^4\, e^{x^2} dx =$$

$$= x^2 y^2 e^{x^2} + 2xy\, e^{x^2} + \tfrac{1}{2} y^4 e^{x^2} + \phi(y).$$

Então

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = 2x^2 y e^{x^2} + 2x e^{x^2} + 2y^3 e^{x^2} + \phi'(y) = 2(y^3 + x^2 y + x)\,e^{x^2}, \quad \phi'(y) = 0,$$

e a primitiva é $(2x^2 y^2 + 4xy + y^4)\,e^{x^2} = C.$

7) Mostrar que $\dfrac{1}{Mx + Ny}$, onde $Mx + Ny$ não é idênticamente nulo, é um fator de integração da equação homogênea $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ de grau n. Investigar o caso de $Mx + Ny = 0$.

Devemos mostrar que $\dfrac{M}{Mx + Ny}dx + \dfrac{N}{Mx + Ny}dy = 0$ é uma equação diferencial exata, isto é, que

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{M}{Mx + Ny}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{N}{Mx + Ny}\right).$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{M}{Mx + Ny}\right) = \frac{(Mx + Ny)\dfrac{\partial M}{\partial y} - M\left(x\dfrac{\partial M}{\partial y} + N + y\dfrac{\partial N}{\partial y}\right)}{(Mx + Ny)^2} =$$

$$= \frac{Ny\dfrac{\partial M}{\partial y} - MN - My\dfrac{\partial N}{\partial y}}{(Mx + Ny)^2}$$

e $$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{N}{Mx+Ny}\right) + \frac{(Mx+Ny)\dfrac{\partial N}{\partial x} - N\left(x\dfrac{\partial M}{\partial x} + M + y\dfrac{\partial N}{\partial x}\right)}{(Mx+Ny)^2} =$$

$$= \frac{Mx\dfrac{\partial N}{\partial x} - MN - Nx\dfrac{\partial M}{\partial x}}{(Mx+Ny)^2}.$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{M}{Mx+Ny}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{N}{Mx+Ny}\right) =$$

$$= \frac{N\left(x\dfrac{\partial M}{\partial x} + y\dfrac{\partial M}{\partial y}\right) - M\left(x\dfrac{\partial N}{\partial x} + y\dfrac{\partial N}{\partial y}\right)}{(Mx+Ny)^2} = \frac{N(nM) - M(nN)}{(Mx+Ny)^2} = 0$$

(pelo Teorema de Euler sôbre as funções homogêneas).

Se $Mx + Ny \equiv 0$, então $\dfrac{M}{N} = -\dfrac{y}{x}$ e a equação diferencial se reduz a $y\,dx - x\,dy = 0$ para a qual $1/xy$ é um fator de integração.

8) Resolver $(x^4 + y^4)\,dx - xy^3\,dy = 0$.

A equação é homogênea e $\dfrac{1}{Mx+Ny} = \dfrac{1}{x^5}$ é um fator de integração.

A equação se transforma em: $\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{y^4}{x^5}\right)dx - \dfrac{y^3}{x^4}\,dy = 0$ que é uma equação diferencial exata.

Seja $\mu(x, y) = \displaystyle\int^x \left(\frac{1}{x} + \frac{y^4}{x^5}\right)dx = \ln x - \frac{1}{4}\,\frac{y^4}{x^4} + \phi(y)$.

Então $\quad \dfrac{\partial\mu}{\partial y} = -\dfrac{y^3}{x^4} + \phi'(y) = -\dfrac{y^3}{x^4}, \quad \phi'(y) = 0,$

e a primitiva é $\ln x - \dfrac{1}{4}\,\dfrac{y^4}{x^4} = C_1$ ou $y^4 = 4x^4 \ln x + Cx^4$.

Nota. O mesmo fator de integração é obtido usando o processo de a) acima. A equação pode ser resolvida pelo método do Capítulo IV.

9) Resolver $y^2\,dx + (x^2 - xy - y^2)\,dy = 0$.

A equação é homogênea e $\dfrac{1}{Mx+Ny} = \dfrac{1}{y(x^2-y^2)}$ é um fator de integração.

A equação se transforma em: $\dfrac{y}{x^2-y^2}\,dx + \dfrac{x^2-xy-y^2}{y(x^2-y^2)}\,dy = 0$ que é uma equação diferencial exata.

Seja

$$\mu(x, y) = \int^x \frac{y}{x^2-y^2}\,dx = \frac{1}{2}\int^x \left(\frac{1}{x-y} - \frac{1}{x+y}\right)dx = \frac{1}{2}\ln\frac{x-y}{x+y} + \phi(y).$$

Então

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = -\frac{x}{x^2 - y^2} + \phi'(y) = \frac{x^2 - xy - y^2}{y(x^2 - y^2)} = \frac{1}{y} - \frac{x}{x^2 - y^2},$$

$$\phi'(y) = \frac{1}{y}, \quad \phi(y) = \ln y,$$

e a primitiva é $\frac{1}{2} \ln \frac{x - y}{x + y} + \ln y = \ln C_1$ ou $(x - y) y^2 = C(x + y)$.

10) Mostrar que $\frac{1}{Mx - Ny}$, quando $Mx - Ny$ não é idênticamente nulo, é um fator de integração da equação $M\,dx + N\,dy = yf_1(xy)\,dx + xf_2(xy)\,dy = 0$. Investigar o caso $Mx - Ny$ idênticamente nulo.

A equação

$$\frac{yf_1(xy)}{xy\left\{f_1(xy) - f_2(xy)\right\}}\,dx + \frac{xf_2(xy)}{xy\left\{f_1(xy) - f_2(xy)\right\}}\,dy = 0$$

é uma equação diferencial exata porque

$$\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{f_1}{x(f_1 - f_2)}\right\} = \frac{x(f_1 - f_2)\frac{\partial f_1}{\partial y} - f_1 x\left(\frac{\partial f_1}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial y}\right)}{x^2(f_1 - f_2)^2} = \frac{-f_2\frac{\partial f_1}{\partial y} + f_1\frac{\partial f_2}{\partial y}}{x(f_1 - f_2)^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{f_2}{y(f_1 - f_2)}\right\} = \frac{y(f_1 - f_2)\frac{\partial f_2}{\partial x} - f_2 y\left(\frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{\partial f_2}{\partial x}\right)}{y^2(f_1 - f_2)^2} = \frac{f_1\frac{\partial f_2}{\partial x} - f_2\frac{\partial f_1}{\partial x}}{y(f_1 - f_2)^2},$$

e

$$\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{f_1}{x(f_1 - f_2)}\right\} - \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{f_2}{y(f_1 - f_2)}\right\} =$$

$$= \frac{f_2\left(-y\frac{\partial f_1}{\partial y} + x\frac{\partial f_1}{\partial x}\right) + f_1\left(y\frac{\partial f_2}{\partial y} - x\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)}{xy(f_1 - f_2)^2}.$$

Esta expressão é idênticamente nula porque $y\frac{\partial f(xy)}{\partial y} = x\frac{\partial f(xy)}{\partial x}$.

Se $Mx - Ny = 0$, então $\frac{M}{N} = \frac{y}{x}$ e a equação se reduz a $x\,dy + y\,dx = 0$ com a solução $xy = C$.

11) Resolver $y(x^2 y^2 + 2)\,dx + x(2 - 2x^2 y^2)\,dy = 0$.

A equação é da forma $yf_1(xy)\,dx + xf_2(xy)\,dy = 0$ e $\frac{1}{Mx - Ny} = \frac{1}{3x^3 y^3}$ é um fator de integração.

Com êsse fator, a equação se transforma em

$$\frac{x^2 y^2 + 2}{3x^3 y^2}\,dx + \frac{2 - 2x^2 y^2}{3x^2 y^3}\,dy = 0$$

que é uma equação diferencial exata.

Seja $\mu(x, y) = \int^x \left(\frac{x^2 y^2 + 2}{3x^3 y^2}\right) dx = \int^x \left(\frac{1}{3x} + \frac{2}{3x^3 y^2}\right) dx =$

$$= \frac{1}{3} \ln x - \frac{1}{3x^2 y^2} + \phi(y).$$

Então

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{2}{3x^2 y^3} + \phi'(y) = \frac{2 - 2x^2 y^2}{3x^2 y^3}, \qquad \phi'(y) = -\frac{2}{3y}, \qquad \phi(y) = -\frac{2}{3} \ln y,$$

e a primitiva é $\frac{1}{3} \ln x - \frac{1}{3x^2y^2} - \frac{2}{3} \ln y = \ln C_1$ ou $x = Cy^2 e^{1/x^2y^2}$.

A equação pode ser resolvida pelo método do Capítulo IV.

12) Resolver $y(2xy + 1)\, dx + x(1 + 2xy - x^3 y^3)\, dy = 0$.

A equação é da forma $y f_1(xy)\, dx + x f_2(xy)\, dy = 0$ e $\frac{1}{Mx - Ny} = \frac{1}{x^4 y^4}$ é um fator de integração.

Com êsse fator, a equação se transforma em

$$\left(\frac{2}{x^3y^2} + \frac{1}{x^4y^3}\right) dx + \left(\frac{1}{x^3y^4} + \frac{2}{x^2y^3} - \frac{1}{y}\right) dy = 0$$

e é uma equação diferencial exata.

Seja $\mu(x, y) = \int^x \left(\frac{2}{x^3 y^2} + \frac{1}{x^4 y^3}\right) dx = -\frac{1}{x^2 y^2} - \frac{1}{3x^3 y^3} + \phi(y)$.

Então, $\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{2}{x^2 y^3} + \frac{1}{x^3 y^4} + \phi'(y) = \frac{1}{x^3 y^4} + \frac{2}{x^2 y^3} - \frac{1}{y}$,

$$\phi'(y) = -\frac{1}{y}, \qquad \phi(y) = -\ln y,$$

e a primitiva é $-\ln y - \frac{1}{x^2 y^2} - \frac{1}{3x^3 y^3} = C_1$ ou $y = Ce^{-(3xy+1)/(3x^3y^3)}$.

13) Pelo exame, obter um fator de integração para cada uma das seguintes equações:

a) $(2xy^4 e^y + 2xy^3 + y)\, dx + (x^2 y^4 e^y - x^2 y^2 - 3x)\, dy = 0$ (Problema 5)

b) $(x^2 y^3 + 2y)\, dx + (2x - 2x^3 y^2)\, dy = 0$ (Problema 11)

c) $(2xy^2 + y)\, dx + (x + 2x^2 y - x^4 y^3)\, dy = 0$ (Problema 12)

a) Quando a equação é escrita na forma

$$y^4 (2x e^y\, dx + x^2 e^y\, dy) + 2xy^3\, dx - x^2 y^2\, dy + y\, dx - 3x\, dy = 0$$

o têrmo $y^4 (2xe^y\, dx + x^2 e^y\, dy) = y^4$. (uma diferencial exata) sugere que $1/y^4$ é um possível fator de integração. Para mostrar que é um fator de integração, verificamos que, com êle, a equação se transforma numa equação diferencial exata.

b) Quando a equação é escrita na forma $2(y\,dx+x\,dy)+x^2y^3\,dx-2x^3y^2\,dy=0$, o têrmo $(y\,dx+x\,dy)$ sugere $1/(xy)^k$ como um possível fator de integração. Um exame dos têrmos restantes mostra que cada um dêles será uma diferencial exata se $k=3$, isto é, $1/(xy)^3$ fôr um fator de integração.

c) Quando se escreve a equação na forma

$$(x\,dy+y\,dx)+2xy\,(x\,dy+y\,dx)-x^4\,y^3\,dy=0$$

os dois primeiros têrmos sugerem $1/(xy)^k$. O terceiro têrmo será também uma diferencial exata se $k=4$; então, $1/(xy)^4$ é um fator de integração.

14) Resolver $y\,dx+x\,(1-3x^2\,y^2)\,dy=0$ ou $x\,dy+y\,dx-3x^3\,y^2\,dy=0$.

Os têrmos $x\,dy+y\,dx$ sugerem $1/(xy)^k$ e o último têrmo exige $k=3$.

Com o fator $\dfrac{1}{(xy)^3}$, a equação se transforma em $\dfrac{x\,dy+y\,dx}{x^3\,y^3}-\dfrac{3}{y}\,dy=0$ cuja primitiva é $\dfrac{-1}{2x^2\,y^2}-3\ln y=C_1$, $6\ln y=\ln C-\dfrac{1}{x^2\,y^2}$ ou $y^6=Ce^{-1(x^2y^2)}$.

15) Resolver $x\,dx+y\,dy+4y^3\,(x^2+y^2)\,dy=0$.

O último têrmo sugere $1/(x^2+y^2)$ como um fator de integração.

A equação se transforma em $\dfrac{x\,dx+y\,dy}{x^2+y^2}+4y^3dy=0$ e é uma equação diferencial exata.

A primitiva é $\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+y^4=\ln C_1$ ou $(x^2+y^2)\,e^{2y^4}=C$.

16) Resolver $x\,dy-y\,dx-(1-x^2)\,dx=0$.

Aqui $1/x^2$ é o fator de integração, porque tôdas as outras possibilidades sugeridas por $x\,dy-y\,dx$ não satisfazem ao último têrmo.

Com êsse fator, a equação se transforma em

$$\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2}-\left(\frac{1}{x^2}-1\right)dx=0$$

cuja primitiva é $\dfrac{y}{x}+\dfrac{1}{x}+x=C$ ou $y+x^2+1=Cx$.

17) Resolver $(x+x^4+2x^2\,y^2+y^4)\,dx+y\,dy=0$ ou $x\,dx+y\,dy+(x^2+y^2)^2\,dx=0$.

Um fator de integração, sugerido pela forma da equação, é $\dfrac{1}{(x^2+y^2)^2}$.

Com êle, vem: $\dfrac{x\,dx+y\,dy}{(x^2+y^2)^2}+dx=0$ cuja primitiva é $-\dfrac{1}{2(x^2+y^2)}+x=C_1$ ou $(C+2x)(x^2+y^2)=1$.

18) Resolver $x^2 \dfrac{dy}{dx} + xy + \sqrt{1-x^2y^2} = 0$ ou $x\,(x\,dy + y\,dx) + \sqrt{1-x^2y^2}\,dx = 0$.

O fator de integração $\dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2y^2}}$ reduz a equação à forma

$$\frac{x\,dy + y\,dx}{\sqrt{1-x^2\,y^2}} + \frac{dx}{x} = 0$$

cuja primitiva é $\operatorname{arc\,sen}(xy) + \ln x = C$.

19) Resolver $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y - xy^2 - x^3}{x + x^2\,y + y^3}$ ou $(x^3 + xy^2 - y)\,dx + (y^3 + x^2\,y + x)\,dy = 0$.

Dando-se à equação a forma $(x^2 + y^2)\,(x\,dx + y\,dy) + x\,dy - y\,dx = 0$, os têrmos $x\,dy - y\,dx$ sugerem vários fatôres de integração. Por tentativa, determina-se $1/(x^2 + y^2)$ que reduz a equação dada à forma

$$x\,dx + y\,dy + \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2} = x\,dx + y\,dy + \frac{\dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2}}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2} = 0.$$

A primitiva é

$$\tfrac{1}{2}\,x^2 + \tfrac{1}{2}\,y^2 + \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} = C_1 \quad \text{ou} \quad x^2 + y^2 + 2\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} = C.$$

20) Resolver $x\,(4y\,dx + 2x\,dy) + y^3\,(3y\,dx + 5x\,dy) = 0$.

Admitamos que multiplicando a equação dada por $x^\alpha\, y^\beta$ tenhamos a equação

$A)$ $(4x^{\alpha+1}\,y^{\beta+1}\,dx + 2x^{\alpha+2}\,y^\beta\,dy) + (3x^\alpha\,y^{\beta+4}\,dx + 5x^{\alpha+1}\,y^{\beta+3}\,dy) = 0$

em que cada dois têrmos seja uma diferencial exata. Então, o primeiro têrmo de $A)$ é proporcional a

$B)$ $$d\,(x^{\alpha+2}\,y^{\beta+1}) = (\alpha + 2)\,x^{\alpha+1}\,y^{\beta+1}\,dx + (\beta + 1)\,x^{\alpha+2}\,y^\beta\,dy,$$

isto é,

$C)$ $$\frac{\alpha + 2}{4} = \frac{\beta + 1}{2} \quad \text{e} \quad \alpha - 2\beta = 0.$$

Do mesmo modo, o segundo têrmo de $A)$ é proporcional a

$D)$ $$d(x^{\alpha+1}\,y^{\beta+4}) = (\alpha + 1)\,x^\alpha\,y^{\beta+4}\,dx + (\beta + 4)\,x^{\alpha+1}\,y^{\beta+3}\,dy,$$

isto é,

$E)$ $$\frac{\alpha + 1}{3} = \frac{\beta + 4}{5} \quad \text{e} \quad 5\alpha - 3\beta = 7.$$

Resolvendo o sistema $\alpha - 2\beta = 0$, $5\alpha - 3\beta = 7$, temos $\alpha = 2$, $\beta = 1$.

Com êsses valores, a equação $A)$ se transforma em:

$$(4x^3\,y^2\,dx + 2x^4\,y\,dy) + (3x^2\,y^5\,dx + 5x^3\,y^4\,dy) = 0.$$

A primitiva é $\qquad x^4\,y^2 + x^3\,y^5 = C.$

21) Resolver $(8y\,dx + 8x\,dy) + x^2 y^3 (4y\,dx + 5x\,dy) = 0$.

Admitamos que multiplicando a equação dada por $x^{\alpha} y^{\beta}$ tenhamos a equação

A) $(8x^{\alpha} y^{\beta+1}\,dx + 8x^{\alpha+1} y^{\beta}\,dy) + (4x^{\alpha+2} y^{\beta+4}\,dx + 5x^{\alpha+3} y^{\beta+3}\,dy) = 0$
em que cada dois têrmos seja uma diferencial exata. Então o primeiro têrmo é proporcional a

B) $$d\,(x^{\alpha+1} y^{\beta+1}) = (\alpha + 1)\,x^{\alpha} y^{\beta+1}\,dx + (\beta + 1)\,x^{\alpha+1} y^{\beta}\,dy,$$

isto é,

C) $$\frac{\alpha+1}{8} = \frac{\beta+1}{8} \quad \text{e} \quad \alpha - \beta = 0.$$

Do mesmo modo, o segundo têrmo é proporcional a

D) $$d\,(x^{\alpha+3} y^{\beta+4}) = (\alpha + 3)\,x^{\alpha+2} y^{\beta+4}\,dx + (\beta + 4)\,x^{\alpha+3} y^{\beta+3}\,dy,$$

isto é,

E) $$\frac{\alpha+3}{4} = \frac{\beta+4}{5} \quad \text{e} \quad 5\alpha - 4\beta = 1.$$

Resolvendo o sistema $\alpha - \beta = 0$, $5\alpha - 4\beta = 1$, vem $\alpha = 1$, $\beta = 1$.

Com êsses valores a equação *A*), se transforma em

$$(8xy^2\,dx + 8x^2 y\,dy) + (4x^3 y^5\,dx + 5x^4 y^4\,dy) = 0.$$

A primitiva é $\qquad 4x^2 y^2 + x^4 y^5 = C.$

Nota. Neste problema e no anterior não havia necessidade de se tornarem explícitos os itens *B*) e *D*) pois, com um pouco de prática, as relações *C*) e *E*) poderiam ser obtidas diretamente de *A*).

22) Resolver $x^3 y^3 (2y\,dx + x\,dy) - (5y\,dx + 7x\,dy) = 0$.

Multiplicando a equação dada por $x^{\alpha} y^{\beta}$, vem

A) $$(2x^{\alpha+3} y^{\beta+4}\,dx + x^{\alpha+4} y^{\beta-3})\,dy - (5x^{\alpha} y^{\beta+1}\,dx + 7x^{\alpha+1} y^{\beta}\,dy) = 0.$$

Se o primeiro têrmo de *A*) deve ser uma diferencial exata, vem

$$\frac{\alpha+4}{2} = \frac{\beta+4}{1} \quad \text{e} \quad \alpha - 2\beta = 4.$$

Se o segundo têrmo de *A*) deve ser uma diferencial exata, vem

$$\frac{\alpha+1}{5} = \frac{\beta+1}{7} \quad \text{e} \quad 7\alpha - 5\beta = -2.$$

Resolvendo o sistema $\alpha - 2\beta = 4$, $7\alpha - 5\beta = -2$, achamos $\alpha = -8/3$, $\beta = -10/3$.

Então, de *A*),

$$(2x^{1/3} y^{2/3}\,dx + x^{4/3} y^{-1/3}\,dy) - (5x^{-8/3} y^{-7/3}\,dx + 7x^{-5/3} y^{-10/3}\,dy) = 0,$$

onde cada grupo de dois têrmos é uma diferencial exata.

A primitiva é:

$$\frac{3}{2} x^{4/3} y^{2/3} + 3x^{-5/3} y^{-7/3} = C_1, \quad x^{4/3} y^{2/3} + 2x^{-5/3} y^{-7/3} = C$$

ou

$$x^3 y^3 + 2 = C x^{5/3} y^{7/3}.$$

PROBLEMAS PROPOSTOS

23) Selecionar, das equações abaixo, as que são diferenciais exatas e resolvê-las.

a) $(x^2 - y)\,dx - x\,dy = 0$ *Resp.:* $xy = x^3/3 + C$

b) $y(x - 2y)\,dx - x^2\,dy = 0$

c) $(x^2 + y^2)\,dx + xy\,dy = 0$

d) $(x^2 + y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$ *Resp.:* $xy^2 + x^3/3 = C$

e) $(x + y\cos x)\,dx + \operatorname{sen} x\,dy = 0$ *Resp.:* $x^2 + 2y \operatorname{sen} x = C$

f) $(1 + e^{2\theta})\,d\rho + 2\rho\, e^{2\theta}\,d\theta = 0$ *Resp.:* $\rho(1 + e^{2\theta}) = C$

g) $dx - \sqrt{a^2 - x^2}\,dy = 0$

h) $(2x + 3y + 4)\,dx + (3x + 4y + 5)\,dy = 0$
Resp.: $x^2 + 3xy + 2y^2 + 4x + 5y = C$

i) $\left(4x^3 y^3 + \frac{1}{x}\right)dx + \left(3x^4 y^2 - \frac{1}{y}\right)dy = 0$
Resp.: $x^4 y^3 + \ln(x/y) = C$

j) $2(u^2 + uv)\,du + (u^2 + v^2)\,dv = 0$ *Resp.:* $2u^3 + 3u^2 v + v^3 = C$

k) $(x\sqrt{x^2 + y^2} - y)\,dx + (y\sqrt{x^2 + y^2} - x)\,dy = 0$.
Resp.: $(x^2 + y^2)^{3/2} - 3xy = C$

l) $(x + y + 1)\,dx - (x - y - 3)\,dy = 0$

m) $(x + y + 1)\,dx - (y - x + 3)\,dy = 0$ *Resp.:* $x^2 + 2xy - y^2 + 2x - 6y = C$

n) $\operatorname{cosec}\theta \operatorname{tg}\theta\,dr - (r \operatorname{cosec}\theta + \operatorname{tg}^2\theta)\,d\theta = 0$
Resp.: $r \operatorname{cosec}\theta = \ln \sec\theta + C$

o) $\left(y^2 - \frac{y}{x(x+y)} + 2\right)dx + \left\{\frac{1}{x+y} + 2y(x+1)\right\}dy = 0$
Resp.: $\ln\frac{x+y}{x} + (x+1)(y^2+2) = C$

p) $(2xye^{x^2 y} + y^2 e^{xy^2} + 1)\,dx + (x^2 e^{x^2 y} + 2xye^{xy^2} - 2y)\,dy = 0$
Resp.: $e^{x^2 y} + e^{xy^2} + x - y^2 = C$

24) Resolver as equações não consideradas acima [*b*), *c*), *g*), *l*)] empregando o processo adequado, apresentado no Capítulo IV.

Resp.: *b)* $x/y = 2\ln x + C$ *g)* $y = \operatorname{arc\,sen} x/a + C$

c) $x^4 + 2x^2 y^2 = C$ *l)* $\ln\sqrt{x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5} - \operatorname{arc\,tg}\frac{y+2}{x-1} = C$

25) Pelo exame da equação, determinar um fator de integração para as seguintes e resolvê-las.

a) $x\,dx + y\,dy = (x^2 + y^2)\,dx$ Resp.: $1/(x^2+y^2)$; $x^2 + y^2 = Ce^{2x}$

b) $(2y - 3x)\,dx + x\,dy = 0$ Resp.: x; $x^2 y = x^3 + C$

c) $(x - y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$ Resp.: $1/x^2$; $y^2 + x \ln x = Cx$

d) $x\,dy - y\,dx = 3x^2(x^2 + y^2)\,dx$ Resp.: $1/(x^2+y^2)$; $\operatorname{arc\,tg} y/x = x^3 + C$

e) $y\,dx - x\,dy + \ln x\,dx = 0$ Resp.: $1/x^2$; $y + \ln x + 1 = Cx$

f) $(3x^2 + y^2)\,dx - 2xy\,dy = 0$ Resp.: $1/x^2$; $3x^2 - y^2 = Cx$

g) $(xy - 2y^2)\,dx - (x^2 - 3xy)\,dy = 0$ Resp.: $1/xy^2$; $x/y + \ln(y^3x^2) = C$

h) $(x + y)\,dx - (x - y)\,dy = 0$ Resp.: $1/(x^2+y^2)$; $x^2 + y^2 = Ce^{2 \operatorname{arc\,tg} y/x}$

i) $2y\,dx - 3xy^2\,dx - x\,dy = 0$ Resp.: x/y^2; $x^2/y - x^3 = C$

j) $y\,dx + x(x^2 y - 1)\,dy = 0$ Resp.: y/x^3; $3y^2 - 2x^2 y^3 = Cx^2$

k) $(y + x^3 y + 2x^2)\,dx + (x + 4xy^4 + 8y^3)\,dy = 0$
Resp.: $1/(xy+2)$; $\ln(xy + 2)^3 + x^3 + 3y^4 = C$.

26) Determinar um fator de integração para as seguintes equações e resolvê-las.

a) $x\,dy - y\,dx = x^2 e^x\,dx$ Resp.: $y = Cx + xe^x$

b) $(1 + y^2)\,dx = (x + x^2)\,dy$ Resp.: $\operatorname{arc\,tg} y = \ln x/(x+1) + C$

c) $(2y - x^3)\,dx + x\,dy = 0$ Resp.: $x^2 y - x^5/5 = C$

d) $y^2\,dy + y\,dx - x\,dy = 0$ Resp.: $y^2 + x = Cy$

e) $(3y^3 - xy)\,dx - (x^2 + 6xy^2)\,dy = 0$ Resp.: $3y^2 + x \ln(xy) = Cx$

f) $3x^2 y^2\,dx + 4(x^3 y - 3)\,dy = 0$ Resp.: $x^3 y^4 - 4y^3 = C$

g) $y(x + y)\,dx - x^2\,dy = 0$ Resp.: $x/y + \ln x = C$

h) $(2y + 3xy^2)\,dx + (x + 2x^2 y)\,dy = 0$ Resp.: $x^2 y(1 + xy) = C$

i) $y(y^2 - 2x^2)\,dx + x(2y^2 - x^2)\,dy = 0$ Resp.: $x^2 y^2 (y^2 - x^2) = C$

27) Mostrar que $\frac{1}{x^2} f(y/x)$ é um fator de integração de $x\,dy - y\,dx = 0$.

CAPÍTULO VI

EQUAÇÕES DE PRIMEIRA ORDEM E PRIMEIRO GRAU

Equações Lineares e Equações Redutíveis a Essa Forma

A equação

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} + y\,P(x) = Q(x),$$

cujo primeiro membro é linear, tanto na variável dependente como na derivada, é chamada uma equação *linear de primeira ordem*. Por exemplo,

$\dfrac{dy}{dx} + 3xy = \operatorname{sen} x$ é linear, enquanto que $\dfrac{dy}{dx} + 3xy^2 = \operatorname{sen} x$ não o é.

Como $\dfrac{d}{dx}\left(ye^{\int P(x)\,dx}\right) =$

$$= \frac{dy}{dx} e^{\int P(x)\,dx} + y\,P(x)\,e^{\int P(x)\,dx} = e^{\int P(x)\,dx}\left[\frac{dy}{dx} + y\,P(x)\right],$$

$e^{\int P(x)\,dx}$ é um fator de integração de (1) e sua primitiva é

$$ye^{\int P(x)\,dx} = \int Q(x)\cdot e^{\int P(x)\,dx}\,dx + C.$$

(Ver Problemas 1-7).

Equação de Bernoulli. Uma equação da forma

$$\frac{dy}{dx} + y\,P(x) = y^n\,Q(x) \quad \text{ou} \quad y^{-n}\frac{dy}{dx} + y^{-n+1}\,P(x) = Q(x)$$

reduz-se à forma (1), especìficamente, $\dfrac{dv}{dx} + v\,\{(1-n)\,P(x)\} =$
$= (1-n)\,Q(x)$, pela transformação

$$y^{-n+1} = v, \quad y^{-n}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-n}\,\frac{dv}{dx}.$$

(Ver Problemas 8-12).

Outras equações podem ser reduzidas à forma (1) por meio de transformações adequadas. Como nos Capítulos anteriores, nenhuma regra geral pode ser estabelecida ; em cada caso, a transformação é sugerida pela forma da equação. (Ver Problemas 13-18).

PROBLEMAS RESOLVIDOS

EQUAÇÕES LINEARES

1) Resolver $\dfrac{dy}{dx} + 2xy = 4x$.

$\int P(x)\,dx = \int 2x\,dx = x^2$ e $e^{\int P(x)\,dx} = e^{x^2}$ é um fator de integração.

Então $ye^{x^2} = \int 4xe^{x^2}\,dx = 2e^{x^2} + C$ ou $y = 2 + Ce^{-x^2}$.

2) Resolver $x\dfrac{dy}{dx} = y + x^3 + 3x^2 - 2x$ ou $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{1}{x}y = x^2 + 3x - 2$.

$\int P(x)\,dx = -\int \dfrac{dx}{x} = -\ln x$ e $e^{-\ln x} = \dfrac{1}{x}$ é um fator de integração.

Então

$$y\,\frac{1}{x} = \int \frac{1}{x}(x^2 + 3x - 2)\,dx = \int \left(x + 3 - \frac{2}{x}\right)dx = \tfrac{1}{2}x^2 + 3x - 2\ln x + C_1$$

ou

$$2y = x^3 + 6x^2 - 4x\ln x + Cx.$$

3) Resolver $(x-2)\dfrac{dy}{dx} = y + 2(x-2)^3$ ou $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{1}{x-2}y = 2(x-2)^2$.

$\int P(x)\,dx = -\int \dfrac{dx}{x-2} = -\ln(x-2)$ e um fator de integração é $e^{-\ln(x-2)} = \dfrac{1}{x-2}$.

Então $y\left(\dfrac{1}{x-2}\right) = 2\int (x-2)^2 \cdot \dfrac{1}{x-2}\,dx = 2\int (x-2)\,dx = (x-2)^2 + C$

ou

$$y = (x-2)^3 + C(x-2).$$

4) Resolver $\dfrac{dy}{dx} + y\,\text{cotg}\,x = 5e^{\cos x}$. Achar a solução particular correspondente a $x = \frac{1}{2}\pi$, $y = -4$.

Um fator de integração é

$$e^{\int \text{cotg}\,x\,dx} = e^{\ln \text{sen}\,x} = \text{sen}\,x$$

e

$$y\,\text{sen}\,x = 5\int e^{\cos x}\,\text{sen}\,x\,dx = -5e^{\cos x} + C.$$

Quando $x = \frac{1}{2}\pi$, $y = -4$; $(-4)(1) = -5(1) + C$ e $C = 1$.

A solução particular é

$$y \operatorname{sen} x + 5e^{\cos x} = 1.$$

5) Resolver $x^3 \dfrac{dy}{dx} + (2 - 3x^2)\, y = x^3$ ou $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{2 - 3x^2}{x^3}\, y = 1$.

$\displaystyle\int \frac{2 - 3x^2}{x^3}\, dx = -\frac{1}{x^2} - 3 \ln x$ e um fator de integração é $\dfrac{1}{x^3\, e^{1/x^2}}$.

Então $\displaystyle\frac{y}{x^3 e^{1/x^2}} = \int \frac{dx}{x^3 e^{1/x^2}} = \frac{1}{2e^{1/x^2}} + C_1$ ou $2y = x^3 + Cx^3\, e^{1/x^2}$.

6) Resolver $\dfrac{dy}{dx} - 2y \operatorname{cotg} 2x = 1 - 2x \operatorname{cotg} 2x - 2 \operatorname{cosec} 2x$.

Um fator de integração é $e^{-\int 2 \operatorname{cotg} 2x\, dx} = e^{-\ln \operatorname{sen} 2x} = \operatorname{cosec} 2x$.

Então $y \operatorname{cosec} 2x = \displaystyle\int (\operatorname{cosec} 2x - 2x \operatorname{cotg} 2x \operatorname{cosec} 2x - 2 \operatorname{cosec}^2 2x)\, dx =$
$= x \operatorname{cosec} 2x + \operatorname{cotg} 2x + C$ ou $y = x + \cos 2x + C \operatorname{sen} 2x$.

7) Resolver $y \ln y\, dx + (x - \ln y)\, dy = 0$.

A equação, tomando x como variável dependente, pode ser escrita do seguinte modo: $\dfrac{dx}{dy} + \dfrac{1}{y \ln y}\, x = \dfrac{1}{y}$.

Então $e^{\int dy/(y \ln y)} = e^{\ln (\ln y)} = \ln y$ é um fator de integração.

Daí, $x \ln y = \displaystyle\int \ln y \frac{dy}{y} = \frac{1}{2} \ln^2 y + K$ e a solução é $2x \ln y = \ln^2 y + C$.

EQUAÇÃO DE BERNOULLI

8) Resolver $\dfrac{dy}{dx} - y = xy^5$ ou $y^{-5} \dfrac{dy}{dx} - y^{-4} = x$.

A transformação $y^{-4} = v$, $y^{-5} \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{4} \dfrac{dv}{dx}$ reduz a equação a

$$-\frac{1}{4} \frac{dv}{dx} - v = x \quad \text{ou} \quad \frac{dv}{dx} + 4v = -4x.$$

Um fator de integração é $e^{4\int dx} = e^{4x}$.

Então

$$ve^{4x} = -4\int xe^{4x}\,dx = -xe^{4x} + \tfrac{1}{4}e^{4x} + C, \quad y^{-4}e^{4x} = -xe^{4x} + \tfrac{1}{4}e^{4x} + C,$$

ou

$$\frac{1}{y^4} = -x + \tfrac{1}{4} + Ce^{-4x}.$$

9) Resolver $\dfrac{dy}{dx} + 2xy + xy^4 = 0$ ou $y^{-4}\dfrac{dy}{dx} + 2xy^{-3} = -x.$

A transformação $y^{-3} = v,\ -3y^{-4}\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dv}{dx}$ reduz a equação a

$$\frac{dv}{dx} - 6xv = 3x.$$

Usando o fator de integração $e^{-\int 6x\,dx} = e^{-3x^2}$, temos

$$ve^{-3x^2} = \int 3xe^{-3x^2} = -\frac{1}{2}e^{-3x^2} + C \quad \text{ou} \quad \frac{1}{y^3} = -\frac{1}{2} + Ce^{3x^2}.$$

10) Resolver $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{1}{3}y = \dfrac{1}{3}(1-2x)y^4$ ou $y^{-4}\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{1}{3}y^{-3} = \dfrac{1}{3}(1-2x).$

A transformação $y^{-3} = v,\ -3y^{-4}\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dv}{dx}$ reduz a equação a

$$\frac{dv}{dx} - v = 2x - 1$$

para a qual e^{-x} é um fator de integração. Então, integrando por partes,

$$ve^{-x} = \int (2x-1)\,e^{-x}\,dx = -2xe^{-x} - e^{-x} + C \quad \text{ou} \quad \frac{1}{y^3} = -1 - 2x + Ce^{x}.$$

11) Resolver $\dfrac{dy}{dx} + y = y^2(\cos x - \operatorname{sen} x)$ ou $y^{-2}\dfrac{dy}{dx} + y^{-1} = \cos x - \operatorname{sen} x.$

A transformação $y^{-1} = v,\ -y^{-2}\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dv}{dx}$ reduz a equação a

$$\frac{dv}{dx} - v = \operatorname{sen} x - \cos x$$

para a qual e^{-x} é um fator de integração.

Então

$$ve^{-x} = \int (\operatorname{sen} x - \cos x)\,e^{-x}\,dx = -e^{-x}\operatorname{sen} x + C \quad \text{ou} \quad \frac{1}{y} = -\operatorname{sen} x + Ce^{x}.$$

12) Resolver $x\,dy - \left\{y + xy^3(1 + \ln x)\right\} dx = 0$ ou $y^{-3}\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{1}{x}y^{-2} = 1 + \ln x$.

A transformação $y^{-2} = v$, $-2y^{-3}\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dv}{dx}$ reduz a equação a

$$\frac{dv}{dx} + \frac{2}{x}v = -2(1 + \ln x)$$

para a qual $e^{\int 2\,dx/x} = x^2$ é um fator de integração.

Então

$$vx^2 = -2\int (x^2 + x^2 \ln x)\,dx = -\frac{4}{9}x^3 - \frac{2}{3}x^3 \ln x + C$$

ou
$$\frac{x^2}{y^2} = -\frac{2}{3}x^3\left(\frac{2}{3} + \ln x\right) + C.$$

OUTRAS SUBSTITUIÇÕES

13) Uma equação da forma $f'(y)\dfrac{dy}{dx} + f(y)P(x) = Q(x)$ é uma equação linear de primeira ordem $\dfrac{dv}{dx} + vP(x) = Q(x)$ na nova variável $v = f(y)$.

[Note que a equação de Bernoulli $y^{-n}\dfrac{dy}{dx} + y^{-n+1}P(x) = Q(x)$ ou $(-n+1)y^{-n}\dfrac{dy}{dx} + y^{-n+1}(-n+1)P(x) = (-n+1)Q(x)$ é um exemplo.]

Resolver $\dfrac{dy}{dx} + 1 = 4e^{-y}\operatorname{sen} x$ ou $e^y\dfrac{dy}{dx} + e^y = 4\operatorname{sen} x$.

Na nova variável $v = f(y) = e^y$, a equação é $\dfrac{dv}{dx} + v = 4\operatorname{sen} x$ para a qual e^x é um fator de integração.

Então

$$ve^x = 4\int e^x \operatorname{sen} x\,dx = 2e^x(\operatorname{sen} x - \cos x) + C \quad \text{ou} \quad e^y = 2(\operatorname{sen} x - \cos x) + Ce^{-x}.$$

14) Resolver $\operatorname{sen} y\dfrac{dy}{dx} = \cos x(2\cos y - \operatorname{sen}^2 x)$ ou $-\operatorname{sen} y\dfrac{dy}{dx} + \cos y(2\cos x) = \operatorname{sen}^2 x \cos x$.

Na nova variável $v = \cos y$, a equação é $\dfrac{dv}{dx} + 2v\cos x = \operatorname{sen}^2 x \cos x$ para a qual $e^{2\int \cos x\,dx} = e^{2\operatorname{sen} x}$ é um fator de integração.

Então
$$ve^{2\operatorname{sen} x} = \int e^{2\operatorname{sen} x}\operatorname{sen}^2 x\cos x\,dx =$$
$$= \tfrac{1}{2}e^{2\operatorname{sen} x}\operatorname{sen}^2 x - \tfrac{1}{2}e^{2\operatorname{sen} x}\operatorname{sen} x + \tfrac{1}{4}e^{2\operatorname{sen} x} + C$$

ou
$$\cos y = \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x - \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} x + \tfrac{1}{4} + Ce^{-\operatorname{sen} x}.$$

15) Resolver $\operatorname{sen} y \dfrac{dy}{dx} = \cos y\,(1 - x\cos y)$ ou $\dfrac{\operatorname{sen} y}{\cos^2 y}\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{1}{\cos y} = -x$.

Como $\dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{1}{\cos y}\right) = \dfrac{\operatorname{sen} y}{\cos^2 y}$, fazemos $v = \dfrac{1}{\cos y}$ e obtemos a equação $\dfrac{dv}{dx} - v = -x$.

Usando o fator de integração e^{-x}, vem

$$ve^{-x} = \int -xe^{-x}\,dx = xe^{-x} + e^{-x} + C \quad \text{ou} \quad v = \frac{1}{\cos y} = \sec y = x + 1 + Ce^{x}.$$

16) Resolver $x\dfrac{dy}{dx} - y + 3x^3 y - x^2 = 0$ ou $x\,dy - y\,dx + 3x^3 y\,dx - x^2\,dx = 0$.

Aqui $(x\,dy - y\,dx)$ sugere a transformação $\dfrac{y}{x} = v$.

Então $\dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2} + 3x^2\dfrac{y}{x}\,dx - dx = 0$ reduz-se a $\dfrac{dv}{dx} + 3x^2 v = 1$ para a qual e^{x^3} é um fator de integração.

Logo, $ve^{x^3} = \int e^{x^3}\,dx + C$ ou $y = xe^{-x^3}\int e^{x^3}\,dx + Cxe^{-x^3}$.

A integral indefinida não pode ser expressa em têrmos de funções elementares.

17) Resolver $(4r^2 s - 6)\,dr + r^3\,ds = 0$ ou $(r\,ds + s\,dr) + 3s\,dr = \dfrac{6}{r^2}\,dr$.

O primeiro têrmo sugere a substituição $rs = t$ que reduz a equação a

$$dt + 3\frac{t}{r}\,dr = \frac{6}{r^2}\,dr \quad \text{ou} \quad \frac{dt}{dr} + \frac{3}{r}t = \frac{6}{r^2}.$$

Então r^3 é um fator de integração e a solução é

$$tr^3 = r^4 s = 3r^2 + C \quad \text{ou} \quad s = \frac{3}{r^2} + \frac{C}{r^4}.$$

18) Resolver $x \operatorname{sen}\theta\,d\theta + (x^3 - 2x^2\cos\theta + \cos\theta)\,dx = 0$

ou $$-\frac{x\operatorname{sen}\theta\,d\theta + \cos\theta\,dx}{x^2} + 2\cos\theta\,dx = x\,dx.$$

A substituição $xy = \cos\theta$, $dy = -\dfrac{x\operatorname{sen}\theta\,d\theta + \cos\theta\,dx}{x^2}$ reduz a equação a

$$dy + 2xy\,dx = x\,dx \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dx} + 2xy = x.$$

Um fator de integração é e^{x^2} e a solução é

$$ye^{x^2} = \frac{\cos\theta}{x}e^{x^2} = \int e^{x^2} x\,dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + K \quad \text{ou} \quad 2\cos\theta = x + Cxe^{-x^2}.$$

PROBLEMAS PROPOSTOS

19) Das equações abaixo, verificar as que são lineares, estabelecer a variável dependente e resolvê-las.

a) $dy/dx + y = 2 + 2x$

b) $d\rho/d\theta + 3\rho = 2$

c) $dy/dx\, y = xy^2$

d) $x\,dy - 2y\,dx = (x-2)\,e^x\,dx$

e) $di/dt - 6i = 10 \operatorname{sen} 2t$

f) $dy/dx + y = y^2\,e^x$

g) $y\,dx + (xy + x - 3y)\,dy = 0$

h) $(2s - e^{2t})\,ds = 2\,(se^{2t} - \cos 2t)\,dt$

i) $x\,dy + y\,dx = x^3\,y^6\,dx$

j) $dr + (2r \operatorname{cotg}\theta + \operatorname{sen} 2\theta)\,d\theta = 0$

k) $y\,(1 + y^2)\,dx = 2\,(1 - 2xy^2)\,dy$

l) $yy' - xy^2 - x = 0$

m) $x\,dy - y\,dx = x\sqrt{x^2 - y^2}\,dy$

n) $\phi_1(t)\,dx/dt + x\phi_2(t) = 1$

o) $2\,dx/dy - x/y + x^3 \cos y = 0$

p) $xy' = y\,(1 - x \operatorname{tg} x) + x^2 \cos x$

q) $(2 + y^2)\,dx - (xy + 2y + y^3)\,dy = 0$

r) $(1 + y^2)\,dx = (\operatorname{arc\,tg} y - x)\,dy$

s) $(2xy^5 - y)\,dx + 2x\,dy = 0$

t) $(1 + \operatorname{sen} y)\,dx = [2y \cos y - x\,(\sec y + \operatorname{tg} y)]\,dy$

Respostas:

a) y; F. I., e^x; $y = 2x + Ce^{-x}$

b) ρ; F. I., $e^{3\theta}$; $3\rho = 2 + Ce^{-3\theta}$

d) y; F. I., $1/x^2$; $y = e^x + Cx^2$

e) i; F. I., e^{-6t}; $i = -\frac{1}{2}\,(3 \operatorname{sen} 2t + \cos 2t) + Ce^{6t}$

g) x; F. I., ye^y; $xy = 3\,(y-1) + Ce^{-y}$

j) r; F. I., $\operatorname{sen}^2\theta$; $2r \operatorname{sen}^2\theta + \operatorname{sen}^4\theta = C$

k) x; F. I., $(1 + y^2)^2$; $(1 + y^2)^2\,x = 2 \ln y + y^2 + C$

n) x; F. I., $e^{\int \phi_2(t)dt/\phi_1(t)}$; $y\,e^{\int \phi_2(t)dt/\phi_1(t)} = \int \frac{1}{\phi_1(t)}\,e^{\int \phi_2(t)\,dt/\phi_1(t)}\,dt + C$

p) y; F. I., $\frac{1}{x \cos x}$; $y = x^2 \cos x + Cx \cos x$

q) x; F. I., $1/\sqrt{2 + y^2}$; $x = 2 + y^2 + C\sqrt{2 + y^2}$

r) x; F. I., $e^{\operatorname{arc\,tg} y}$; $x = \operatorname{arc\,tg} y - 1 + Ce^{-\operatorname{arc\,tg} y}$

t) x; F. I., $\sec y + \operatorname{tg} y$; $x\,(\sec y + \operatorname{tg} y) = y^2 + C$

20) Das equações não consideradas no Problema 19, resolver aquelas que são do tipo da equação de Bernoulli.

Respostas:

c) $y^{-1} = v$; $1/y = 1 - x + Ce^{-x}$ i) $y^{-5} = v$; $2/y^5 = Cx^5 + 5x^3$

f) $y^{-1} = v$; $(C + x)\,ye^x + 1 = 0$ l) $y^2 = v$; $y^2 = 1 + Ce^{x^2}$

o) $x^{-2} = v$; $x^{-2}\,y = \cos y + y \operatorname{sen} y + C$

s) $y^{-4} = v$; $3x^2 = (4x^3 + C)\,y^4$

21) Resolver as equações restantes, *h*) e *m*), do Problema 19.

Respostas:

h) $s^2 - se^{2t} + \operatorname{sen} 2t = C$ m) $y = x \operatorname{sen}(y + C)$

22) Resolver:

a) $xy' = 2y + x^3\,e^x$ sabendo que $y = 0$ quando $x = 1$.

Resp.: $y = x^2\,(e^x - e)$

b) $L\dfrac{di}{dt} + Ri = E \operatorname{sen} 2t$, onde L, R, E são constantes, sabendo que $i = 0$ quando $t = 0$.

Resp.: $i = \dfrac{E}{R^2 + 4L^2}\left(R \operatorname{sen} 2t - 2L\cos 2t + 2Le^{-Rt/L}\right)$

23) Resolver:

a) $x^2 \cos y \dfrac{dy}{dx} = 2x \operatorname{sen} y - 1$, usando $\operatorname{sen} y = z$.

Resp.: $3x \operatorname{sen} y = Cx^3 + 1$

b) $4x^2\,yy' = 3x\,(3y^2 + 2) + 2\,(3y^2 + 2)^3$, usando $3y^2 + 2 = z$.

Resp.: $4x^9 = (C - 3x^8)\,(3y^2 + 2)^2$

c) $(xy^3 - y^3 - x^2\,e^x)\,dx + 3xy^2\,dy = 0$, usando $y^3 = vx$.

Resp.: $2y^3\,e^x = xe^{2x} + Cx$

d) $dy/dx + x\,(x + y) = x^3\,(x + y)^3 - 1$. *Resp.:* $1/(x+y)^2 = x^2 + 1 + Ce^{x^2}$

e) $(y + e^y - e^{-x})\,dx + (1 + e^y)\,dy = 0$. *Resp.:* $y + e^y = (x + C)\,e^{-x}$

CAPÍTULO VII

APLICAÇÕES GEOMÉTRICAS

No Capítulo I mostrou-se que se podia obter a equação diferencial

$$(1) \qquad f(x, y, y') = 0$$

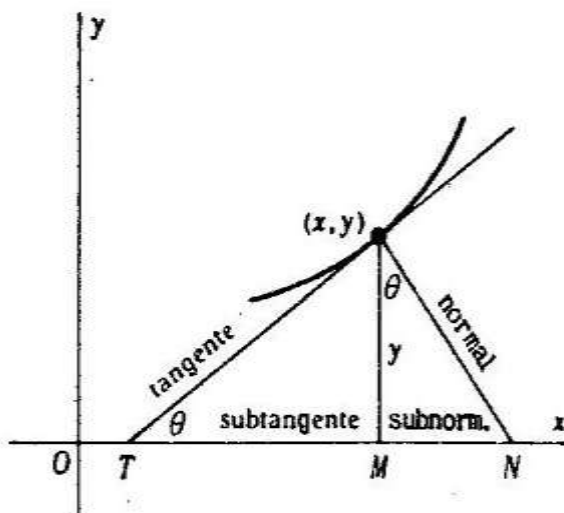
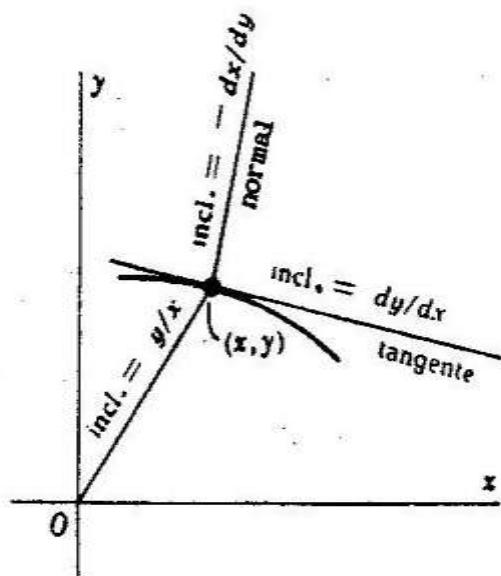
de uma família de curvas

$$(2) \qquad g(x, y, C) = 0.$$

A equação diferencial é a expressão analítica de uma certa propriedade comum a tôdas as curvas da família.

Inversamente, se fôr dada uma propriedade cuja representação analítica envolva derivadas, a solução da equação diferencial resultante representará uma família de curvas, com um parâmetro, possuindo tôdas a propriedade dada. Cada curva da família é chamada uma *curva integral* de (1) e curvas integrais particulares podem ser caracterizadas na família por meio de propriedades adicionais. Por exemplo, um ponto pelo qual deve passar uma curva.

Por conveniência, aparecem abaixo relacionadas algumas propriedades que envolvem derivadas.

Coordenadas Retangulares. Seja (x, y) um ponto qualquer de uma curva $F(x, y) = 0$.

a) $\frac{dy}{dx}$ é a inclinação da tangente à curva em (x, y).

b) $-\frac{dx}{dy}$ é a inclinação da normal à curva em (x, y).

c) $Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x)$ é a equação da tangente em (x, y), sendo (X, Y) as coordenadas de um ponto da tangente.

d) $Y - y = -\frac{dx}{dy}(X - x)$ é a equação da normal em (x, y), sendo (X, Y) as coordenadas de um ponto da normal.

e) $x - y\frac{dx}{dy}$ e $y - x\frac{dy}{dx}$ são os segmentos determinados pela tangente sôbre os eixos dos x e dos y.

f) $x + y\frac{dy}{dx}$ e $y + x\frac{dx}{dy}$ são os segmentos determinados pela normal sôbre os eixos dos x e dos y.

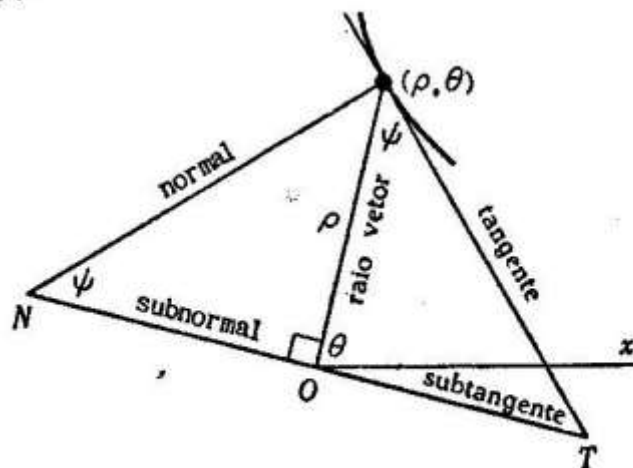
g) $y\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$ e $x\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ são os comprimentos da tangente entre (x, y) e os eixos dos x e dos y.

h) $y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ e $x\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$ são os comprimentos da normal entre (x, y) e os eixos dos x e dos y.

i) $y\frac{dx}{dy}$ e $y\frac{dy}{dx}$ são os comprimentos da subtangente e da subnormal.

j) $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = dy\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$ é um arco elementar.

k) $y\,dx$ ou $x\,dy$ é uma área elementar.

Coordenadas Polares. Seja (ρ, θ) um ponto qualquer de uma curva $\rho = f(\theta)$.

l) $\operatorname{tg}\psi = \rho \dfrac{d\theta}{d\rho}$, onde ψ é o ângulo entre o raio vetor e a tangente (parte compreendida entre a curva e o eixo polar).

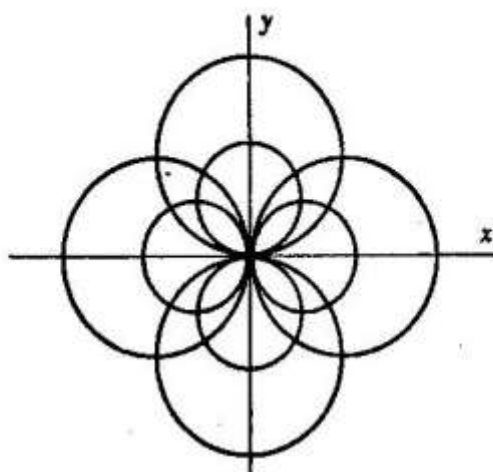
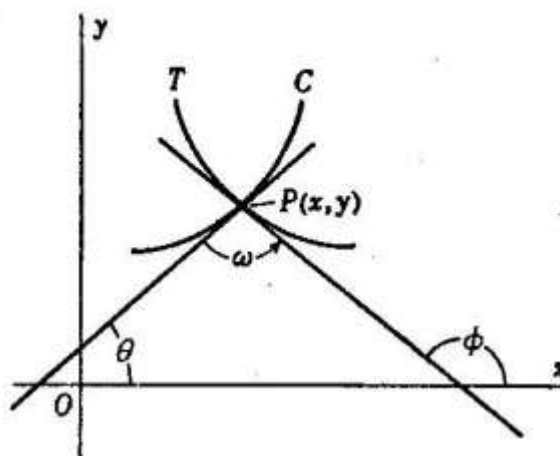
m) $\rho \operatorname{tg}\psi = \rho^2 \dfrac{d\theta}{d\rho}$ é o comprimento da subtangente polar.

n) $\rho \operatorname{cotg}\psi = \dfrac{d\rho}{d\theta}$ é o comprimento da subnormal polar.

o) $\rho \operatorname{sen}\psi = \rho^2 \dfrac{d\theta}{ds}$ é o comprimento da perpendicular do polo à tangente.

p) $ds = \sqrt{(d\rho)^2 + \rho^2 (d\theta)^2} = d\rho \sqrt{1 + \rho^2 \left(\dfrac{d\theta}{d\rho}\right)^2} = d\theta \sqrt{\left(\dfrac{d\rho}{d\theta}\right)^2 + \rho^2}$ é um arco elementar.

q) $\frac{1}{2} \rho^2 \, d\theta$ é uma área elementar.

Trajetórias. Qualquer curva que cortar todos os elementos de uma família de curvas, sob um ângulo constante ω, é chamada uma *trajetoria* ω da família. Uma trajetória a 90° é comumente chamada uma trajetória ortogonal da família. Por exemplo, na Fig. (*a*) abaixo, os círculos que passam pela origem, tendo centros no eixo dos y, são trajetórias ortogonais da família de círculos que passam pela origem, tendo centros no eixo dos x.

(*a*) (*b*)

Para determinar tais trajetórias temos:

A) As curvas integrais da equação diferencial

$$f\left(x, y, \frac{y' - \operatorname{tg}\omega}{1 + y' \operatorname{tg}\omega}\right) = 0 \tag{3}$$

são as trajetórias ω da família de curvas integrais de

$$f(x, y, y') = 0. \tag{1}$$

Para provar, consideremos a curva integral C de (1) e uma trajetória ω que a corta em $P(x, y)$, como se vê na Fig. (b), acima. A cada ponto de C, para o qual (1) define um valor de y', associamos um conjunto de três números (x, y, y'), os dois primeiros sendo as coordenadas do ponto e o terceiro sendo o valor correspondente de y' dado por (1). Anàlogamente, em cada ponto de T, para o qual há uma reta tangente, associamos um conjunto de três números (x, y, y'), os dois primeiros sendo as coordenadas do ponto e o terceiro a inclinação da tangente.

Para evitar confusão, designaremos os números associados aos pontos de T como $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}')$. Da figura, $x = \bar{x}$, $y = \bar{y}$ em P, enquanto que $y' = \operatorname{tg}\theta$ e $\bar{y}' = \operatorname{tg}\phi$ estão ligados pela relação:

$$y' = \operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}(\phi - \omega) = \frac{\operatorname{tg}\phi - \operatorname{tg}\omega}{1 + \operatorname{tg}\phi \operatorname{tg}\omega} = \frac{\bar{y}' - \operatorname{tg}\omega}{1 + \bar{y}' \operatorname{tg}\omega}.$$

Então, em P (um ponto qualquer do plano) sôbre uma trajetória, existe a relação

$$f(x, y, y') = f\left(\bar{x}, \bar{y}, \frac{\bar{y}' - \operatorname{tg}\omega}{1 + \bar{y}' \operatorname{tg}\omega}\right) = 0$$

ou, retirando as barras:

$$f\left(x, y, \frac{y' - \operatorname{tg}\omega}{1 + y' \operatorname{tg}\omega}\right) = 0.$$

B) As curvas integrais da equação diferencial

$$(4) \qquad f\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0$$

são as trajetórias ortogonais da família de curvas integrais de (1).

C) Em coordenadas polares, as curvas integrais da equação diferencial

$$(5) \qquad f\left(\rho, \theta, -\rho^2 \frac{d\theta}{d\rho}\right) = 0$$

são as trajetórias ortogonais das curvas integrais de

$$(6) \qquad f\left(\rho, \theta, \frac{d\rho}{d\theta}\right) = 0.$$

PROBLEMAS RESOLVIDOS

1) A ordenada na origem, da tangente a um ponto qualquer de uma curva é é $2xy^2$. Achar a curva.

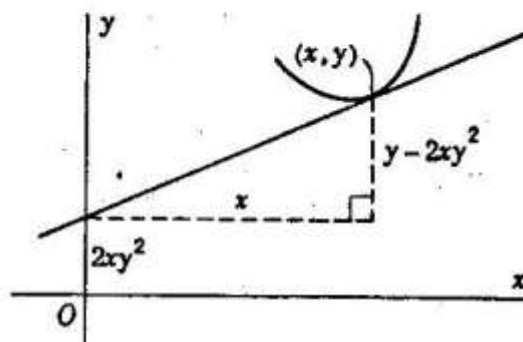
Usando *e*), a equação diferencial da curva é

$$y - x\frac{dy}{dx} = 2xy^2 \quad \text{ou} \quad \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2} = 2x\,dx.$$

Integrando, $\frac{x}{y} = x^2 + C$

ou $x - x^2y = Cy.$

A equação diferencial pode ser, também, diretamente obtida na figura ao lado ∴

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - 2xy^2}{x}.$$

2) Num ponto (x, y), qualquer, de uma curva, a subtangente é proporcional ao quadrado da abscissa. Achar a curva, sabendo que passa pelo ponto $(1, e)$.

Usando *i*), a equação diferencial é $y\frac{dx}{dy} = kx^2$ ou $\frac{dx}{x^2} = k\frac{dy}{y}$, onde k é o fator de proporcionalidade.

Integrando, $k \ln y = -\frac{1}{x} + C.$

Quando $x = 1,\ y = e$: $k = -1 + C$ e $C = k + 1.$

A equação da curva procurada é $k \ln y = -\frac{1}{x} + k + 1.$

3) Achar a família de curvas para a qual o comprimento da parte da tangente entre o ponto de contato (x, y) e o eixo dos y é igual à ordenada na origem, da tangente.

De *g*) e *e*), vem: $x\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = y - x\frac{dy}{dx}$ ou $A)\ x^2 = y^2 - 2xy\frac{dy}{dx}.$

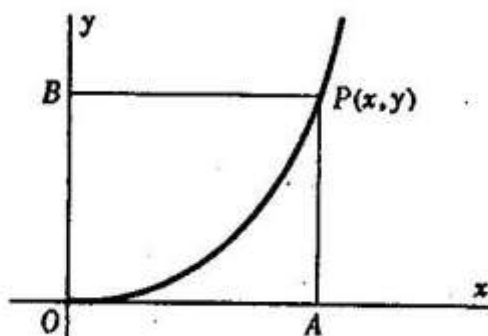
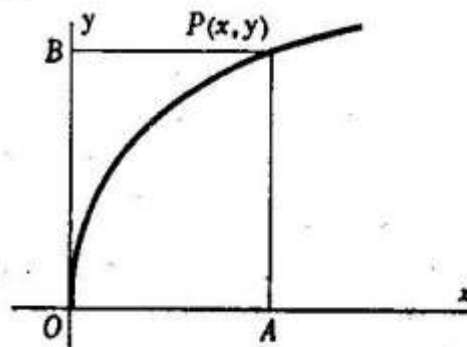
A transformação $y = vx$ reduz A) a

$$(1 + v^2)\,dx + 2vx\,dv = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{dx}{x} + \frac{2v\,dv}{1 + v^2} = 0.$$

Integrando, $\ln x + \ln(1 + v^2) = \ln C.$

Então $x\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) = C$ ou $x^2 + y^2 = Cx$ é a equação da família.

4) Por um ponto (x, y) qualquer, de uma curva, que passa pela origem, traçam-se retas paralelas aos eixos coordenados. Achar a curva, sabendo que ela divide o retângulo formado pelas paralelas e os eixos em duas partes, sendo a área de uma três vêzes a área da outra.

Temos dois casos, ilustrados abaixo.

(a)

(b)

a) Aqui, 3 (área OAP) = área OPB. Então:

$$3\int_0^x y\,dx = xy - \int_0^x y\,dx \quad \text{ou} \quad 4\int_0^x y\,dx = xy.$$

Para obter a equação diferencial, derivamos em relação a x.

Assim, $$4y = y + x\frac{dy}{dx} \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{3y}{x}.$$

A integração dá a família de curvas $y = Cx^3$.

b) Aqui, área $OAP = 3$ (área OPB) e $4\int_0^x y\,dx = 3xy$.

A equação diferencial é $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{3x}$, e a família de curvas tem a equação $y^3 = Cx$.

Como as equações diferenciais foram obtidas por derivação, podem aparecer soluções estranhas. É necessário fazer uma verificação, calculando as áreas. Nos casos acima, as curvas satisfazem. Entretanto, ver o Problema 5.

5) As áreas limitadas pelo eixo dos x, uma ordenada fixa em $x = a$, uma ordenada variável e a parte de uma curva interceptada pelas ordenadas, giram ao redor do eixo dos x. Achar a curva sabendo que o volume gerado é proporcional à: *a)* soma das duas ordenadas, *b)* diferença das duas ordenadas.

a) Seja A o comprimento da ordenada fixa. A equação diferencial obtida derivando

$$\pi\int_a^x y^2\,dx = k\,(y + A) \tag{1}$$

é $\pi y^2 = k\dfrac{dy}{dx}$. Integrando, vem

$$y\,(C - \pi x) = k. \tag{2}$$

Com o valor de y dado por (2) calcula-se o primeiro membro de (1),

$$\pi\int_a^x \frac{k^2\,dx}{(C - \pi x)^2} = \frac{k^2}{C - \pi x} - \frac{k^2}{C - \pi a} = k\,(y - A). \tag{3}$$

Assim, a solução é estranha e não existe nenhuma curva com a propriedade *a)*.

b) Repetindo o processo acima com

$$\pi\int_a^x y^2\,dx = k\,(y - A), \tag{1'}$$

obtém-se a equação diferencial $\pi y^2 = k\dfrac{dy}{dx}$ cuja solução é

$$y\,(C - \pi x) = k. \tag{2'}$$

Vê-se de (3) que esta equação satisfaz (1′). Assim, a família de (2′) tem a propriedade citada.

6) **Achar a curva na qual, em qualquer ponto, o ângulo formado pelo raio vetor com a tangente é igual a um têrço do ângulo de inclinação da tangente.**

Sejam θ o ângulo de inclinação do raio vetor, τ o ângulo de inclinação da tangente e ψ o ângulo entre o raio vetor e a tangente.

Como $\psi = \dfrac{\tau}{3} = (\psi + \theta)/3$, temos $\psi = \frac{1}{2}\,\theta$ e $\operatorname{tg}\psi = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\,\theta$.

Com *l*), $\operatorname{tg}\psi = \rho\dfrac{d\theta}{d\rho} = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\,\theta$ e daí $\dfrac{d\rho}{\rho} = \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\,\theta\,d\theta$.

Integrando,

$$\ln\rho = 2\ln\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\,\theta + \ln C_1 \quad \text{ou} \quad \rho = C_1\operatorname{sen}^2\tfrac{1}{2}\,\theta = C\,(1 - \cos\theta).$$

7) **A área do setor formado por um arco de uma curva e pelos raios vetores extremos é a metade do comprimento do arco. Achar a curva.**

Admitamos os raios vetores dados por $\theta = \theta_1$ e $\theta = \theta$.

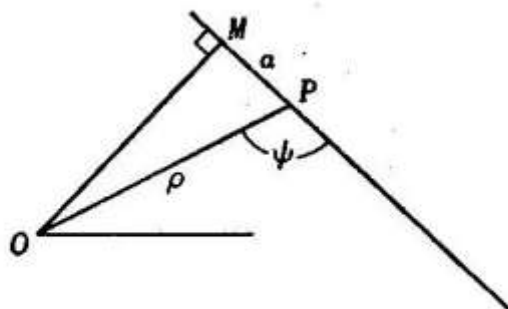
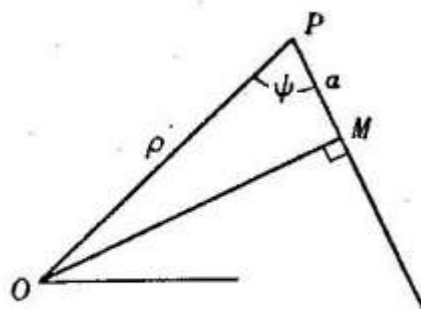
Com *q*) e *p*), $\displaystyle \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta}\rho^2\,d\theta = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta}\sqrt{\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 + \rho^2}\,d\theta.$

Derivando em relação a θ, temos a equação diferencial

$$\rho^2 = \sqrt{\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 + \rho^2} \quad \text{ou} \quad (1) \quad d\rho = \pm\,\rho\sqrt{\rho^2 - 1}\,d\theta.$$

Se $\rho^2 = 1$, (1) se reduz a $d\rho = 0$. Verifica-se fàcilmente que $\rho = 1$ satisfaz à condição do problema.

Se $\rho^2 \neq 1$, podemos dar à equação a forma $\dfrac{d\rho}{\rho\sqrt{\rho^2 - 1}} = \pm\,d\theta$ e obter a solução $\rho = \sec(C \pm \theta)$. Assim, as condições são satisfeitas pelo círculo $\rho = 1$ e pela família de curvas $\rho = \sec(C + \theta)$. Note que as famílias $\rho = \sec(C + \theta)$ e $\rho = \sec(C - \theta)$ são as mesmas.

8) **Achar a curva, na qual a porção da tangente entre o ponto de contato e o pé da perpendicular traçada do pólo sôbre a tangente é um têrço do raio vetor do ponto de contato.**

(*a*) (*b*)

Na Figura (*a*): $\rho = 3a = 3\rho\cos(\pi - \psi) = -3\rho\cos\psi$, $\cos\psi = -1/3$

e $\operatorname{tg}\psi = -2\sqrt{2}$.

Na Figura (*b*): $\rho = 3a = 3\rho\cos\psi$ e $\operatorname{tg}\psi = 2\sqrt{2}$.

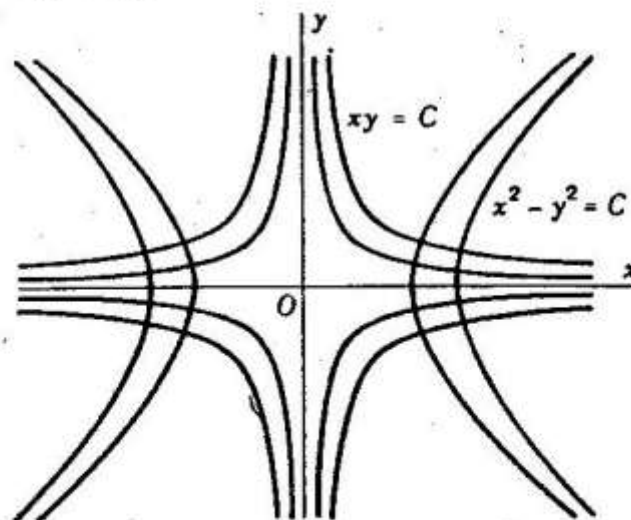
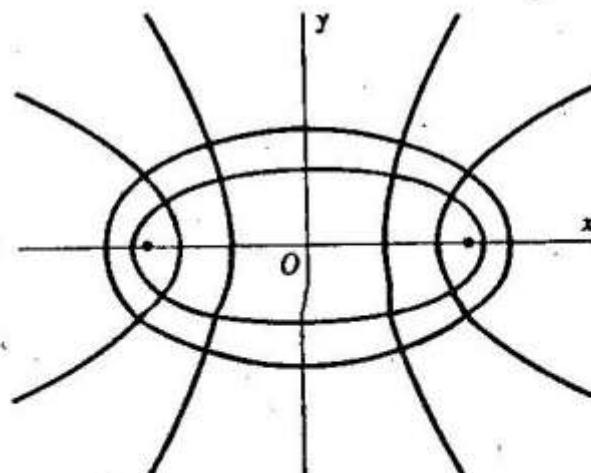
Com *l*) e combinando os dois casos,

$$\operatorname{tg}\psi = \rho\frac{d\theta}{d\rho} = \pm 2\sqrt{2} \quad \text{ou} \quad \frac{d\rho}{\rho} = \pm\frac{d\theta}{2\sqrt{2}}.$$

As curvas procuradas são as famílias $\rho = Ce^{\theta/2\sqrt{2}}$ e $\rho = Ce^{-\theta/2\sqrt{2}}$.

9) Achar as trajetórias ortogonais das hipérboles $xy = C$.

A equação diferencial da família dada é $x\dfrac{dy}{dx} + y = 0$, que se obtém derivando $xy = C$. A equação diferencial das trajetórias ortogonais, que se obtém substituindo $\dfrac{dy}{dx}$ por $-\dfrac{dx}{dy}$, é $-x\dfrac{dx}{dy} + y = 0$ ou $y\,dy - x\,dx = 0$.

Integrando, as trajetórias ortogonais constituem a família de curvas (hipérboles) $y^2 - x^2 = C$.

10) Mostrar que a família de cônicas homofocais $\frac{x^2}{C} \quad \frac{y^2}{C-\lambda} = 1$, onde C é uma constante arbitrária, encerra as próprias trajetórias ortogonais.

Derivando a equação dada, em relação a x, temos $\frac{x}{C} \, \frac{yp}{C-\lambda} = 0$, onde $p = \frac{dy}{dx}$. Daí se conclui que $C = \frac{\lambda x}{x + yp}$ e $C - \lambda = \frac{-\lambda p y}{x + yp}$. Entrando com êsses valores na equação dada, acha-se a equação diferencial da família:

$$(x + yp)(px - y) - \lambda p = 0.$$

Como esta equação não varia quando p é substituído por $-1/p$, vê-se que ela é também a equação diferencial das trajetórias ortogonais da família dada.

11) Determinar as trajetórias ortogonais da família de cardióides $\rho = C\,(1 + \operatorname{sen}\theta)$.

Derivando em relação a θ vem $\frac{d\rho}{d\theta} = C \cos\theta$, $\therefore$ $C = \frac{1}{\cos\theta} \, \frac{d\rho}{d\theta}$; substituindo o valor de C na equação, acha-se a equação diferencial da família:

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{\rho \cos\theta}{1 + \operatorname{sen}\theta}.$$

A equação diferencial das trajetórias ortogonais, que se obtém substituindo $\frac{d\rho}{d\theta}$ por $-\frac{\rho^2}{d\rho}$, é

$$-\frac{d\theta}{d\rho} = \frac{\cos\theta}{\rho\,(1 + \operatorname{sen}\theta)} \quad \text{ou} \quad \frac{d\rho}{\rho} + (\sec\theta + \operatorname{tg}\theta)\, d\theta = 0.$$

Então

$$\ln \rho + \ln(\sec\theta + \operatorname{tg}\theta) - \ln\cos\theta = \ln C \quad \text{ou} \quad \rho = \frac{C \cos\theta}{\sec\theta + \operatorname{tg}\theta} = C\,(1 - \operatorname{sen}\theta).$$

12) Determinar as trajetórias 45° da família de círculos concêntricos $x^2 + y^2 = C$.

A equação diferencial da família de círculos é $x + yy' = 0$.

A equação diferencial da trajetória 45°, obtida substituindo y' na equação acima por $\frac{y' - \operatorname{tg} 45^\circ}{1 + y' \operatorname{tg} 45^\circ} = \frac{y' - 1}{1 + y'}$, é

$$x + y\,\frac{y' - 1}{1 + y'} = 0 \quad \text{ou} \quad (x + y)\, dy + (x - y)\, dx = 0.$$

Com a transformação $y = vx$, a equação se reduz a

$$(v^2 + 1)\, dx + x\,(v + 1)\, dv = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{dx}{x} + \frac{v + 1}{v^2 + 1}\, dv = 0.$$

Integrando,

$$\ln x + \tfrac{1}{2} \ln(v^2 + 1) + \operatorname{arc\,tg} v = \ln K_1, \quad \ln x^2\,(1 + v^2) = \ln K - 2 \operatorname{arc\,tg} v$$

e

$$x^2 + y^2 = K e^{-2 \operatorname{arctg} y/x}.$$

Em coordenadas polares a equação se transforma em

$$\rho^2 = K e^{-2\theta} \quad \text{ou} \quad \rho e^{\theta} = C.$$

PROBLEMAS PROPOSTOS

13) Achar a equação da curva em que:

a) a normal em qualquer ponto (x, y) passa pela origem.
Resp.: $x^2 + y^2 = C$

b) a inclinação da tangente em qualquer ponto (x, y) é $\frac{1}{2}$ da inclinação da reta que liga a origem ao ponto.
Resp.: $y^2 = Cx$

c) a normal em qualquer ponto (x, y) e a reta que une a origem ao ponto formam um triângulo isósceles tendo a base no eixo dos x.
Resp.: $y^2 - x^2 = C$

d) a parte da normal, traçada no ponto (x, y), situada entre êste ponto e o eixo dos x é dividida ao meio pelo eixo dos y.
Resp.: $y^2 + 2x^2 = C$

e) a perpendicular, traçada da origem a uma tangente à curva, é igual à abscissa do ponto de contato (x, y).
Resp.: $x^2 + y^2 = Cx$

f) o comprimento do arco da origem a um ponto qualquer (x, y) é igual ao dôbro da raiz quadrada da abscissa do ponto.
Resp.: $y = \pm \left(\text{arc sen} \sqrt{x} + \sqrt{x - x^2}\right) + C$

g) a subnormal polar é o dôbro do seno do ângulo vetorial.
Resp.: $\rho = C - 2 \cos \theta$

h) o ângulo entre o raio vetor e a tangente é a metade do ângulo vetorial.
Resp.: $\rho = C (1 - \cos \theta)$

i) a subtangente polar é igual à subnormal polar.
Resp.: $\rho = Ce^{\theta}$

14) Achar as trajetórias ortôgonais de cada uma das seguintes famílias de curvas.

a) $x + 2y = C$ — *Resp.:* $y - 2x = K$

b) $xy = C$ — *Resp.:* $x^2 - y^2 = K$

c) $x^2 + 2y^2 = C$ — *Resp.:* $y = Kx^2$

d) $y = Ce^{-2x}$ — *Resp.:* $y^2 = x + K$

e) $y^2 = x^3/(C - x)$ — *Resp.:* $(x^2 + y^2)^2 = K (2x^2 + y^2)$

f) $y = x - 1 + Ce^{-x}$ — *Resp.:* $x = y - 1 + Ke^{-y}$

g) $y^2 = 2x^2 (1 - Cx)$ — *Resp.:* $x^2 + 3y^2 \ln (Ky) = 0$

h) $\rho = a \cos \theta$ — *Resp.:* $\rho = b \text{ sen } \theta$

i) $\rho = a (1 + \text{sen } \theta)$ — *Resp.:* $\rho = b (1 - \text{sen } \theta)$

j) $\rho = a (\sec \theta + \text{tg } \theta)$ — *Resp.:* $\rho = be^{-\text{sen } \theta}$

Capítulo VIII

APLICAÇÕES À FÍSICA

Muitas das aplicações dêste capítulo, e de outros seguintes, relacionam-se com o movimento de um corpo em linha reta. Se o corpo se mover com velocidade variável v (isto é, movimento variável), sua aceleração, dada por $\frac{dv}{dt}$, decorre de uma ou mais fôrças que agem no sentido do movimento ou no sentido oposto. A fôrça resultante que age sôbre a massa é a soma (algébrica) das diferentes fôrças que atuam sôbre o corpo.

Exemplo 1. Um bote se move sujeito a uma fôrça de 20kg no sentido do movimento e a uma fôrça resistente (em kg) igual a $\frac{1}{50}$ de sua velocidade (m/seg). Tomando o sentido do movimento como positivo, a fôrça resultante é $20 - \frac{v}{50}$ (em kg).

Exemplo 2. À extremidade livre de uma mola, de massa desprezível, suportada verticalmente, prende-se uma certa massa e deixa-se em repouso. Há duas fôrças agindo sôbre a massa: a da gravidade, que atua para baixo, e a fôrça da mola, que contraria a da gravidade. As duas fôrças, sendo de sentidos opostos, são iguais em intensidade, porque a massa está em repouso. Logo, a fôrça resultante é zero.

A segunda Lei do Movimento, de Newton, estabelece, em parte, que o produto da massa pela aceleração é proporcional à fôrça resultante que age sôbre a massa. Quando, pelo sistema de unidades empregado, $k = 1$, temos:

$$\textit{massa} \times \textit{aceleração} = \textit{fôrça resultante}.$$

O Sistema Inglês é baseado nas seguintes unidades fundamentais: *libra-fôrça* (pêso de uma libra), *pé de comprimento* e *segundo de tempo*. A unidade de *massa* é derivada e é o *slug*, definida pela relação:

$$\textit{massa em slugs} = \frac{\textit{pêso em libras}}{\text{g } \textit{em ft/seg}^2}.$$

Assim,

$$\textit{massa em slugs} \times \textit{aceleração em ft/seg}^2 = \textit{fôrça resultante em libras}.$$

O Sistema Gravitacional Métrico ou **MKS** é baseado nas seguintes unidades fundamentais:

metro (comprimento), *quilograma-fôrça, segundó* (tempo).

A unidade de massa é derivada e não tem nome especial:

$$\textit{unidade MKS de massa} = \frac{\textit{quilograma-fôrça}}{\textit{metro/seg}^2}.$$

NOTA: Emprega-se como *unidade prática de massa* o *quilograma-massa* que é a massa do quilograma-fôrça e que vale, por conseqüência, $\frac{1}{9{,}81}$ ou, sensìvelvelmente, $\frac{1}{10}$ da unidade *MKS* de massa.

O Sistema CGS é baseado nas seguintes unidades fundamentais:

centímetro (comprimento), *grama-massa* (1/1 000 do quilograma-massa; massa de 1cm³ de água a 4°C) e *segundo* (tempo).

A unidade de fôrça é derivada e tem o nome de *dina*.

A aceleração g de um corpo, em queda livre, varia ligeiramente na superfície da Terra. Por conveniência pode-se tomar o valor aproximado de $g = 9{,}8\text{m/seg}^2$ e, em alguns casos, 10m/seg^2. (No sistema inglês toma-se $g = 32\text{ft/seg}^2$, aproximadamente).

PROBLEMAS RESOLVIDOS

1) Sabendo que a população de uma cidade dobra em 50 anos, em quantos anos será ela o triplo, admitindo que a razão de crescimento é proporcional ao número de habitantes?

Seja y a população da cidade aos t anos e y_o a população no tempo $t = 0$.

Então

$$(1) \qquad \frac{dy}{dt} = ky \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{y} = k\,dt,$$

onde k é o fator de proporcionalidade.

Primeira Solução. Integrando (1), temos

$$(2) \qquad \ln y = kt + \ln C \quad \text{ou} \quad y = Ce^{kt}.$$

No tempo $t = 0$, $y = y_o$ e, de (2), $C = y_o$. Assim,

$$(3) \qquad y = y_o e^{kt}.$$

Em $t = 50$, $y = 2y_o$. De (3), $2y_o = y_o e^{50k}$ ou $e^{50k} = 2$.

Quando $y = 3y_o$, (3) dá $3 = e^{kt}$.

Então $3^{50} = e^{50kt} = (e^{50k})^t = 2^t$ e $t = 79$ anos.

Segunda Solução. Integrando (1) entre os limites $t=0$, $y=y_o$ e $t=50$, $y=2y_o$,

$$\int_{y_0}^{2y_0} \frac{dy}{y} = k \int_0^{50} dt, \quad \ln 2y_o - \ln y_o = 50k \quad \text{e} \quad 50k = \ln 2.$$

Integrando (1) entre os limites $t = 0$, $y = y_o$ e $t = t$, $y = 3y_o$,

$$\int_{y_0}^{3y_0} \frac{dy}{y} = k \int_0^{t} dt, \quad \text{e} \quad \ln 3 = kt.$$

Então $50 \ln 3 = 50kt = t \ln 2$ e $t = \dfrac{50 \ln 3}{\ln 2} = 79$ anos.

2) Numa certa cultura de bactérias a taxa de aumento é proporcional ao número presente. *a*) Verificando-se que o número dobra em 4 horas, quantas se pode esperar no fim de 12 horas? *b*) Sabendo que no fim de 3 horas existiam 10^4 e no fim de 5 horas 4×10^4, quantas existiam no começo?

Seja x o número de bactérias no tempo t horas. Então

$$\frac{dx}{dt} = kx \quad \text{ou} \quad \frac{dx}{x} = k\,dt. \tag{1}$$

a) *Primeira Solução.* Integrando (1), tem-se

$$\ln x = kt + \ln C \quad \text{ou} \quad x = Ce^{kt}. \tag{2}$$

Supondo que $x = x_o$ no tempo $t = 0$, $C = x_o$ e $x = x_o e^{kt}$.

No tempo $t = 4$, $x = 2x_o$. Então $2x_o = x_o e^{4k}$ e $e^{4k} = 2$.

Quando $t = 12$, $x = x_o e^{12k} = x_o (e^{4k})^3 = x_o (2^3) = 8x_o$, isto é, 8 vêzes o número original.

Segunda Solução. Integrando (1) entre os limites $t=0$, $x=x_o$ e $t=4$, $x=2x_o$,

$$\int_{x_0}^{2x_0} \frac{dx}{x} = k \int_0^{4} dt, \quad \ln 2x_o - \ln x_o = 4k \quad \text{e} \quad 4k = \ln 2.$$

Integrando (1) entre os limites $t = 0$, $x = x_o$ e $t = 12$, $x = x$,

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x} = k \int_0^{12} dt, \quad \text{e} \quad \ln \frac{x}{x_o} = 12k = 3(4k) = 3 \ln 2 = \ln 8.$$

Então $x = 8x_o$, como antes.

b) *Primeira Solução.* Quando $t = 3$, $x = 10^4$. Assim, de (2), $10^4 = Ce^{3k}$ e $C = \dfrac{10^4}{e^{3k}}$.

Quando $t = 5$, $x = 4 \cdot 10^4$. Assim, $4 \cdot 10^4 = Ce^{5k}$ e $C = \dfrac{4 \cdot 10^4}{e^{5k}}$.

Igualando os valores de C, $\dfrac{10^4}{e^{3k}} = \dfrac{4 \cdot 10^4}{e^{5k}}$. Então $e^{2k} = 4$ e $e^k = 2$.

Assim, o número original é $C = \dfrac{10^4}{e^{3k}} = \dfrac{10^4}{8}$ bactérias.

Segunda Solução. Integrando (1) entre os limites $t = 3$, $x = 10^4$ e $t = 5$, $x = 4 \cdot 10^4$,

$$\int_{10^4}^{4\cdot 10^4} \frac{dx}{x} = k \int_3^5 dt, \quad \ln 4 = 2k \quad \text{e} \quad k = \ln 2.$$

Integrando (1) entre os limites $t = 0$, $x = x_0$ e $t = 3$, $x = 10^4$,

$$\int_{x_0}^{10^4} \frac{dx}{x} = k \int_0^3 dt, \quad \ln \frac{10^4}{x_0} = 3k = 3 \ln 2 = \ln 8 \quad \text{e} \quad x_0 = \frac{10^4}{8} \quad \text{como antes.}$$

3) De acôrdo com a lei de arrefecimento, de Newton, a taxa de resfriamento de uma substância numa corrente de ar é proporcional à diferença entre a temperatura da substância e a do ar. Sendo a temperatura do ar 30° e resfriando a substância de 100° para 70° em 15 minutos, achar o momento em que a temperatura será 40°.

Seja T a temperatura da substância no tempo t minutos.

Então, $$\frac{dT}{dt} = -k(T - 30) \quad \text{ou} \quad \frac{dT}{T - 30} = -k\,dt.$$

(Nota. O uso de $-k$ aqui não é obrigatório. k aparecerá positivo; porém se se empregar $+k$ verificar-se-á que k trocará de sinal, passando a negativo).

Integrando entre os limites $t = 0$, $T = 100$ e $t = 15$, $T = 70$.

$$\int_{100}^{70} \frac{dT}{T - 30} = -k \int_0^{15} dt, \quad \ln 40 - \ln 70 = -15k = \ln \frac{4}{7} \quad \text{e} \quad 15k = \ln \frac{7}{4} = 0{,}56.$$

Integrando entre os limites $t = 100$ e $t = t$, $T = 40$,

$$\int_{100}^{40} \frac{dT}{T - 30} = -k \int_0^t dt, \quad \ln 10 - \ln 70 = -kt, \quad 15kt = 15 \ln 7, \quad t = \frac{15 \ln 7}{0{,}56} = 52 \text{ min.}$$

4) Um certo produto químico dissolve-se em água, numa razão que é proporcional ao produto da quantidade não dissolvida pela diferença entre a concentração de uma solução saturada e a concentração na solução existente. Em 100g de uma solução saturada estão dissolvidas 50 gramas da substância. Sabendo que se agitando 30g da substância em 100g de água, 10g da substância são dissolvidas em 2 horas, quantas gramas serão dissolvidas no fim de 5 horas?

Seja x o número de gramas da substância não dissolvida depois de t horas. Neste momento, a concentração da solução é $\frac{30 - x}{100}$ e a da solução saturada é $\frac{50}{100}$.

Então

$$\frac{dx}{dt} = kx\left(\frac{50}{100} - \frac{30 - x}{100}\right) = kx\frac{x + 20}{100} \quad \text{ou} \quad \frac{dx}{x} - \frac{dx}{x + 20} = \frac{k}{5}\,dt.$$

Integrando entre $t = 0$, $x = 30$ e $t = 2$, $x = 30 - 10 = 20$,

$$\int_{30}^{20} \frac{dx}{x} - \int_{30}^{20} \frac{dx}{x+20} = \frac{k}{5} \int_{0}^{2} dt \quad \text{e} \quad k = \frac{5}{2} \ln \frac{5}{6} = -0{,}46.$$

Integrando entre $t = 0$, $x = 30$ e $t = 5$. $x = x$,

$$\int_{30}^{x} \frac{dx}{x} - \int_{30}^{x} \frac{dx}{x+20} = \frac{k}{5} \int_{0}^{5} dt, \quad \ln \frac{5x}{3(x+20)} = k = -0{,}46.$$

$$\frac{x}{x+20} = \frac{3}{5} e^{-0{,}46} = 0{,}38 \quad \text{e} \quad x = 12.$$

Assim, a quantidade dissolvida depois de 5 horas é $30 - 12 = 18$ gramas.

5) Uma solução de 60kg de sal em água enche um tanque de 400 litros. Faz-se entrar água nesse tanque na razão de 8 litros por minuto e a mistura, mantida homogênea por agitação, sai na mesma razão. Qual a quantidade de sal existente no tanque no fim de 1 hora?

Seja S a quantidade, em kg, de sal no tanque depois de t minutos. A concentração será $\frac{S}{400}$ kg/l. Num intervalo dt, $8dt$ litros de água entram no tanque e $8\,dt$ litros da solução, contendo $\frac{8S}{400} dt = \frac{S}{50} dt$ kg de sal, saem do tanque.

Então, a variação dS na quantidade de sal no tanque é $dS = -\frac{S}{50}\,dt$.

Integrando, $S = Ce^{-\frac{t}{50}}$.

Para $t = 0$, $S = 60$; daí $C = 60$ e $S = 60e^{-\frac{t}{50}}$.

Quando $t = 60$ minutos. $S = 60e^{-\frac{6}{5}} = 60 \times 0{,}301 = 18$kg.

6) A análise do ar existente em um compartimento de $50 \times 20 \times 4$m acusou a presença de 0,2% de CO_2. Ventiladores admitiram então ar fresco, contendo 0,05% de CO_2, na razão de 250m³/min. Achar a percentagem de CO_2 depois de 32 minutos.

Seja x a quantidade, em m³, de CO_2, no compartimento, no tempo t. A concentração de CO_2 será: $\frac{x}{50 \times 20 \times 4} = \frac{x}{4\,000}$. No intervalo dt, a quantidade de CO_2 que entra no compartimento é $250\,(0{,}000\,5)\,dt$ m³ e a quantidade que sai é $250 \times \frac{x\,dt}{4\,000}$ m³.

Logo, a variação dx no intervalo considerado é:

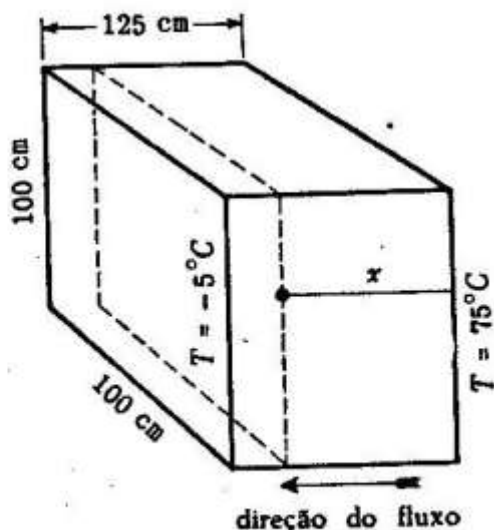
$$dx = 250 \left(0{,}000\,5 - \frac{x}{4\,000}\right) dt = -\frac{x-2}{16}\,dt.$$

Integrando, $16 \ln (x - 2) = -t + \ln C_1$ e $x = 2 + Ce^{-\frac{t}{16}}$.

Para $t = 0$, $x = 0{,}002 \times 4\,000 = 8$.

Então $C = 8 - 2 = 6$ e $x = 2 + 6e^{-\frac{t}{16}}$.

Quando $t = 32$, $x = 2 + 6e^{-2} = 2{,}81$. A percentagem de CO_2 é, então,

$$\frac{2{,}81}{4\,000} = 0{,}0007 = 0{,}07\%.$$

7) Sob certas condições, a quantidade de calor Q calorias/segundo, constante, que se escoa através de uma parede, é dada por:

$$Q = -kA\,\frac{dT}{dx}$$

onde k é a condutividade do material, A (cm²) é a área de uma face da parede perpendicular à direção do fluxo e T é a temperatura a x (cm) da face, no interior da parede, de modo que T diminui quando x aumenta. Achar a quantidade de calor em calorias por hora que atravessa um metro quadrado da parede de um refrigerador, sendo 125cm a espessura da parede, $k = 0{,}0025$, temperatura na face interna de $-5°$ C e na face externa 75° C.

Seja x a distância da face externa de um ponto no interior da parede. Integrando $dT = -\dfrac{Q}{kA}\,dx$ de $x = 0$, $T = 75$ a $x = 125$, $T = -5$,

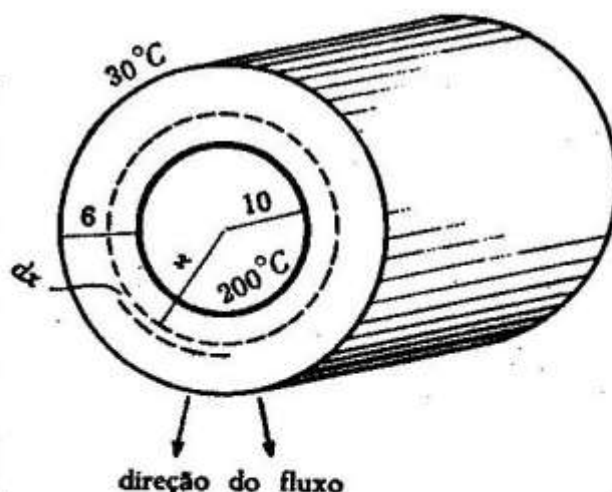
$$\int_{75}^{-5} dT = -\frac{Q}{kA}\int_0^{125} dx, \quad 80 = \frac{Q}{kA}(125),$$

e

$$Q = \frac{80kA}{125} = \frac{80\ (0{,}0025)\ (100)^2}{125} = 16\,\frac{\text{cal}}{\text{seg}}.$$

Assim, o fluxo de calor por hora $= 3\,600Q = 57.600$ cal.

8) Um tubo de vapor com 20cm de diâmetro tem um revestimento externo de 6cm de espessura, com $k = 0{,}0003$. *a*) Achar a perda de calor, por hora e por metro de comprimento do tubo, sabendo que a superfície do tubo está a 200° C e a superfície externa do revestimento a 30° C. *b*) Achar a temperatura a uma distância $x > 10$cm do centro do tubo.

A uma distância $x > 10$cm do centro do tubo, o fluxo do calor se dá através do

cilindro de área igual a $2\pi x \text{cm}^2$ por cm de comprimento do tubo. Do Problema 7, deduz-se:

$$Q = -kA\frac{dT}{dx} = -2\pi kx\frac{dT}{dx} \quad \text{ou} \quad 2\pi k\, dT = -Q\frac{dx}{x}.$$

a) Integrando entre os limites $T = 30$, $x = 16$ e $T = 200$, $x = 10$,

$$2\pi k\int_{30}^{200} dT = -Q\int_{16}^{10}\frac{dx}{x}, \quad 340\pi k = Q(\ln 16 - \ln 10) = Q\ln 1{,}6$$

e $$Q = \frac{340\,\pi k}{\ln 1{,}6}\ \text{cal/seg.}$$

Assim, a perda de calor por hora, em 1m de comprimento do tubo é $100\,(60)^2\,Q = 245.000$cal.

b) Integrando $2\pi k\, dT = -\dfrac{340\pi k}{\ln 1{,}6}\dfrac{dx}{x}$ entre os limites $T = 30$, $x = 16$ e $T = T$, $x = x$,

$$\int_{30}^{T} dT = -\frac{170}{\ln 1{,}6}\int_{16}^{x}\frac{dx}{x}, \quad T - 30 = -\frac{170}{\ln 1{,}6}\ln\frac{x}{16}$$

e $$T = \left(30 + \frac{170}{\ln 1{,}6}\ln\frac{16}{x}\right)°\text{C}.$$

Verificação. Quando $x = 10$, $T = 30 + \dfrac{170}{\ln 1{,}6}\ln 1{,}6 = 200°\text{C}$.

Quando $x = 16$, $T = 30 + 0 = 30°\text{C}$.

9) Achar o tempo necessário para esvaziar um tanque cilíndrico de raio 8m e altura 10m, cheio de água, sabendo que a água se escoa através de um orifício, situado na base do tanque, de raio 1dm, com uma velocidade $v = 4\sqrt{h}$ m/seg aproximadamente, sendo h a altura da água no tanque.

O volume da água que se escoa por segundo pode ser representado por um cilindro de raio 0,1m e de altura v. Assim, no tempo dt, o volume será:

$$\pi\left(\frac{1}{10}\right)^2(4\sqrt{h})\,dt = \frac{\pi}{100}(4\sqrt{h})\,dt.$$

Chamando dh a queda correspondente do nível da água no tanque, o volume da água que se escoa é também dado por $64\pi dh$. Assim,

$$\frac{\pi}{100}(4\sqrt{h})\,dt = -64\pi\,dh \quad \text{ou} \quad dt = -\frac{64(100)}{4}\frac{dh}{\sqrt{h}} = -1\,600\frac{dh}{\sqrt{h}}.$$

Integrando entre $t = 0$, $h = 10$ e $t = t$, $h = 0$,

$$\int_0^t dt = -1\,600\int_{10}^{0}\frac{dh}{\sqrt{h}}, \quad \text{e} \quad t = -3\,200\sqrt{h}\,\Big|_{10}^{0} = 3\,200\sqrt{10}\ \text{seg} = 2h\ 49\ \text{min}.$$

10) Um navio de 48 000 toneladas inicia o seu deslocamento com o empuxo de 1 000 000kgf da hélice propulsora. *a*) Achar sua velocidade em função do tempo t, sabendo que a resistência ao movimento em kgf é de $1\,500v$ sendo v a velocidade em m/seg. *b*) Achar a velocidade máxima limite (isto é, v quando $t \to \infty$) em nó. (Tomar $g = 10\text{m/seg}^2$).

Como:

massa $\times$ *aceleração* = *fôrça resultante* = *fôrça propulsora* − *resistência*

temos:
$$\frac{48\,000\,000}{10} \times \frac{dv}{dt} = 100\,000 - 1\,500v$$

ou

(1)
$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{3\,200} = \frac{1}{48}.$$

Integrando: $ve^{t/3\,200} = \dfrac{1}{48}\displaystyle\int e^{t/3\,200}\,dt = \dfrac{200}{3}e^{t/3\,200} + C.$

a) Quando $t = 0$, $v = 0$ e $C = -\dfrac{200}{3}$.

Então: $v = \dfrac{200}{3} - \dfrac{200}{3}e^{-t/3\,200}$. Daí: $v + \dfrac{200}{3}(1 - e^{-t/3\,200})$.

b) Quando $t \to \infty$, $v = \dfrac{200}{3}$. A velocidade máxima limite é

$$v = \frac{200}{3}\,\text{m/seg} = 13 \text{ nós}.$$

Isto poderia ser obtido, também, pela equação (1) porque quando v se aproxima do máximo, $\dfrac{dv}{dt} \to 0$.

Então, $v = \dfrac{200}{3}$, como antes.

11) Um bote está sendo rebocado a uma velocidade de 12 nós. No instante ($t = 0$) em que o cabo de reboque é largado, um homem no bote começa a remar, no sentido do movimento, exercendo uma fôrça de 10kgf. Sabendo que o pêso do homem e do bote é de 200kgf e que a resistência ao deslocamento, em kgf, é de $2{,}6v$, sendo v a velocidade em m/seg, achar a velocidade do bote no fim de $\dfrac{1}{2}$ minuto. (Tomar $g = 10\text{m/seg}^2$).

Como

massa $\times$ *aceleração* = *fôrça resultante* = *fôrça impulsora* − *resistência*

temos: $\dfrac{200}{10} \times \dfrac{dv}{dt} = 10 - 2{,}6v$ ou $\dfrac{dv}{dt} + 0{,}13v = \dfrac{1}{2}$.

Integrando: $ve^{0{,}13t} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int e^{0{,}13t}\,dt = \dfrac{1}{0{,}26}e^{0{,}13t} + C.$

Quando $t = 0$, $v = 12 \text{ nós} = \dfrac{463}{75}\,\text{m/seg}$ e $C = \dfrac{887}{50}$.

Então: $v = \frac{50}{13} + \frac{887}{50} e^{-0,13t}$.

Quando $t = 30$, $v = \frac{50}{13} + \frac{887}{50} e^{-3,9} = 4{,}2\text{m/seg}$.

12) Uma certa massa está sendo levada em um trenó, sôbre o gêlo, sendo o pêso total de 40kgf. Desprezando a resistência oferecida pelo gêlo e sabendo que a resistência do ar em kgf é igual a 7,5 vêzes a velocidade (v m/seg) do trenó, achar:

a) a fôrça constante (kgf) que atuando no trenó dará a velocidade máxima limite de 10 mi/h;

b) a velocidade e a distância percorrida no fim de 48 segundos. (Tomar $g = 10\text{m/seg}^2$).

Como:

massa $\times$ *aceleração* $=$ *fôrça resultante* $=$ *fôrça impulsora* $-$ *resistência*

temos: $\frac{40}{10} \times \frac{dv}{dt} = F - 7{,}5v$ ou $\frac{dv}{dt} + \frac{15}{8} v = \frac{F}{4}$ onde F é a fôrça impulsora em kgf.

Integrando: $$v = \frac{2F}{15} + Ce^{-\frac{15}{8}t}.$$

Quando $t = 0$, $v = 0$; então $C = -\frac{2F}{15}$ e

(A) $$v = \frac{2F}{15}(1 - e^{-\frac{15}{8}t}).$$

a) Quando $t \to \infty$, $\frac{2F}{15} = v = \frac{10 \times 1\,609}{3\,600} = \frac{1\,609}{360}$.

Daí: $$F = \frac{15 \times 1\,609}{2 \times 360} = 33{,}5\text{kgf}.$$

b) Substituindo o resultado acima na equação (A) temos:

$$v = \frac{1\,609}{360}(1 - e^{-\frac{15}{8}}).$$

Quando $t = 48$ seg, $v = \frac{1\,609}{360}(1 - e^{-90}) \approx \frac{1\,609}{360}$ m/seg

e $$S = \int_0^{48} v\,dt = \frac{1\,609}{360} \int_0^{48} (1 - e^{-\frac{15}{8}t})\,dt \approx 212\text{m}.$$

13) Uma determinada mola, de massa desprezível, está prêsa verticalmente por uma extremidade. Uma certa massa m, suportada pela outra extremidade, está animada de uma velocidade v_0 quando a mola está sem deformação alguma. Achar a velocidade v, em função da deformação, x, da mola.

De acôrdo com a lei de Hooke, a fôrça da mola (fôrça que se opõe à deformação) é proporcional à deformação.

Fôrça que atua no corpo = pêso do corpo − fôrça da mola.

Então: $m\frac{dv}{dt} = mg - kx$ ou $m \cdot \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = mv\frac{dv}{dx} = mg - kx$, porque $\frac{dx}{dt} = v.$

Integrando: $mv^2 = 2mgx - kx^2 + C.$

Quando $x = 0$, $v = v_o$. Então $C = mv_0^2$ e $mv^2 = 2mgx - kx^2 + mv_0^2$.

14) Um pára-quedista está animado de uma velocidade de 50m/seg no momento em que o pára-quedas se abre. Sabendo que a resistência do ar é $\frac{Pv^2}{30}$ kgf, onde P é o pêso total do pára-quedista com o pára-quedas, em kgf, achar sua velocidade em função do tempo t depois do pára-quedas aberto. (Tomar $g = 10\text{m/seg}^2$).

Fôrça útil = pêso do conjunto − resistência do ar.

Então: $$\frac{P}{g}\frac{dv}{dt} = P - \frac{Pv^2}{30} \quad \text{ou} \quad \frac{dv}{v^2 - 30} = -\frac{dt}{3}.$$

Integrando entre os limites $t = 0$, $v = 50$ e $t = t$, $v = v$,

$$\int_{50}^{v} \frac{dv}{v^2 - 30} = -\frac{1}{3}\int_0^t dt \quad \therefore \quad \frac{1}{2\sqrt{30}} \ln \frac{v - \sqrt{30}}{v + \sqrt{30}}\Bigg|_{50}^{v} = -\frac{t}{3}\Bigg|_0^t \quad \therefore$$

$$\therefore \ln\frac{v - \sqrt{30}}{v + \sqrt{30}} - \ln 0{,}8 = -3{,}7t \quad \text{ou} \quad \frac{v - \sqrt{30}}{v + \sqrt{30}} = 0{,}8e^{-3{,}7t}$$

e $$v = \frac{\sqrt{30}\,(1 + 0{,}8e^{-3{,}7t})}{1 - 0{,}8e^{-3{,}7t}}.$$

Note-se que, ràpidamente, o pára-quedista atinge uma velocidade que se mantém, aproximadamente, constante, isto é, a velocidade máxima limite de $\sqrt{30}$ m/seg.

15) Um corpo de massa m, em um meio em que a resistência (kgf) é proporcional ao quadrado da velocidade (m/seg), cai, partindo do repouso. Sabendo que a velocidade máxima limite é de 50m/seg, achar:

a) a velocidade no fim de 2seg,

b) o tempo necessário para que a velocidade atinja 30m/seg. (Tomar $g = 10\text{m/seg}^2$).

Seja v a velocidade do corpo no tempo t seg.

A fôrça resultante que age no corpo = pêso do corpo − resistência, e a equação do movimento é:

$$m\frac{dv}{dt} = mg - Kv^2. \tag{1}$$

Tomando $g = 10\text{m/seg}^2$ e fazendo $K = 2mk^2$ podemos simplificar a expressão (1) que se reduz a:

$$m\frac{dv}{dt} = 10m - 2mk^2v^2 \quad \text{ou} \quad \frac{dv}{dt} = 2(5 - k^2v^2) \;\therefore\; \frac{dv}{k^2v^2 - 5} = -2dt.$$

Integrando:

$$\ln\frac{kv - \sqrt{5}}{kv + \sqrt{5}} = -4\sqrt{5}\,kt + \ln C \quad \text{ou} \quad \frac{kv - \sqrt{5}}{kv + \sqrt{5}} = Ce^{-4\sqrt{5}\,kt}.$$

Quando $t = 0$, $v = 0$. Então, $C = -1$ e

$$\frac{kv - \sqrt{5}}{kv + \sqrt{5}} = -e^{-4\sqrt{5}\,kt}. \tag{2}$$

Quando $t \to \infty$, $v = 50$. Então, $e^{-4\sqrt{5}\,kt} = 0$, $k = \frac{\sqrt{5}}{50}$ e (2) se transforma em $\frac{v - 50}{v + 50} = -e^{-\frac{2}{5}t}$.

a) Quando $t = 2\text{seg}$, $\frac{v - 50}{v + 50} = -e^{-\frac{4}{5}} \;\therefore\; v = 21{,}4\text{m/seg}$.

b) Quando $v = 30\text{m/seg}$, $0{,}25 = e^{-\frac{2}{5}t} = e^{-1{,}385} \;\therefore\; t = 3{,}5\text{seg}$.

16) Um corpo de massa m cai, partindo do repouso, em um fluido em que a resistência (kgf) é proporcional à velocidade (m/seg). Sabendo que a densidade do fluido é 1/4 da densidade do corpo e que a velocidade máxima limite é de 8m/seg, achar: *a*) a velocidade no fim de 3seg; *b*) a distância percorrida em 3seg. (Tomar $g = 10\text{m/seg}^2$).

Seja v a velocidade do corpo no tempo t seg. Em adição às duas fôrças que agem como no Problema 15, há uma terceira fôrça que resulta da diferença de densidade. Esta fôrça é igual ao pêso do fluido deslocado pelo corpo e é oposta à gravidade.

Fôrça resultante = pêso do corpo − fôrça devida ao fluido − resistência

e a equação do movimento é:

$$m\frac{dv}{dt} = mg - \frac{1}{4}mg - Kv = \frac{3}{4}mg - Kv$$

Tomando $g = 10\text{m/seg}^2$ e $K = 3mk$, a equação se transforma em

$$\frac{dv}{dt} = 3\left(\frac{5}{2} - kv\right) \quad \text{ou} \quad \frac{dv}{\frac{5}{2} - kv} = 3dt.$$

Integrando de $t = 0$, $v = 0$ a $t = t$, $v = v$ tem-se:

$$-\frac{1}{k}\ln\left(\frac{5}{2} - kv\right)\Big|_0^v = 3t\Big|_0^t \;\therefore\; -\ln\left(\frac{5}{2} - kv\right) + \ln\frac{5}{2} = 3kt \;\therefore$$

$$\therefore\; kv = \frac{5}{2}(1 - e^{-3kt}).$$

Quando $t \to \infty$, $v = 8$ e $k = \frac{5}{16}$

e

(1) $$v = 8\,(1 - e^{-\frac{15}{16}t}).$$

a) Quando $t = 2$, $v = 8\,(1 - e^{-\frac{45}{16}}) = 7{,}5$m/seg.

b) Integrando $v = \frac{dx}{dt} = 8\,(1 - e^{-\frac{15}{16}t})$ entre $t = 0$, $x = 0$ e $t = 3$, $x = x$

temos:

$$x\Big|_0^x = 8\,(t + \frac{16}{15}e^{-\frac{45}{16}t})\Big|_0^3 \quad .\dot{}.\quad x = 8\left[\frac{29}{15} + \frac{16}{15}e^{-\frac{45}{16}}\right] = 16\text{m}.$$

17) A ação da gravidade sôbre uma certa massa m a uma distância s metros do centro da Terra é proporcional a m e inversamente proporcional a s^2.

a) Achar a velocidade atingida pela massa ao cair, partindo do repouso, de uma distância $5R$ do centro da Terra, ao chegar à superfície da Terra, sendo $R = 6\,450$km considerado como o raio da Terra.

b) A que velocidade corresponderia uma queda de altura infinita, isto é, a que velocidade deveria a massa subir verticalmente a fim de escapar à ação da gravidade? (Desprezar tôdas as outras fôrças, inclusive o atrito). Tomar $g = 10\text{m/seg}^2$.

A ação da gravidade a uma distância s é qm/s^2. Para determinar q sabe-se que a fôrça é mq quando $s = R$; assim, $mg = qm/R^2$ e $q = gR^2$.

A equação do movimento é:

(1) $$m\frac{dv}{dt} = m\frac{ds}{dt}\cdot\frac{dv}{ds} = mv\frac{dv}{ds} = -\frac{mgR^2}{s^2} \quad \text{ou} \quad vdv = -gR^2\frac{ds}{s^2},$$

aparecendo o sinal negativo porque v aumenta quando s diminui.

a) Integrando (1) de $v = 0$, $s = 5R$ até $v = v$, $s = R$ temos:

$$\int_0^v v\,dv = -gR^2\int_{5R}^{R}\frac{ds}{s^2},\quad \frac{1}{2}v^2 = gR^2\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{5R}\right) = \frac{4}{5}gR,$$

$$v^2 = \frac{8}{5}\times 10\times 6\,450\,000 = 1\,032\times 10^5 \quad .\dot{}.\quad v = 10\,160\text{m/seg}$$

ou, aproximadamente, 10km/seg.

b) Integrando (1) de $v = 0$, $s \to \infty$ a $v = v$, $s = R$ temos:

$$\int_0^v v\,dv = -gR^2\int_\infty^R\frac{ds}{s^2},\quad v^2 = 2gR \quad .\dot{}.\quad v = 11\,460\text{m/seg}$$

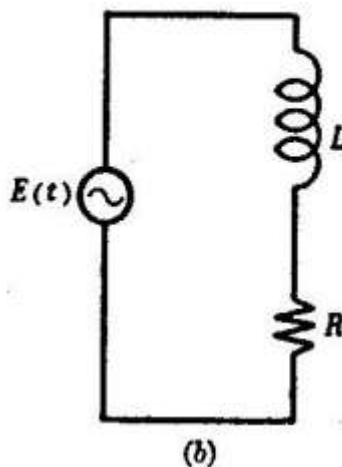
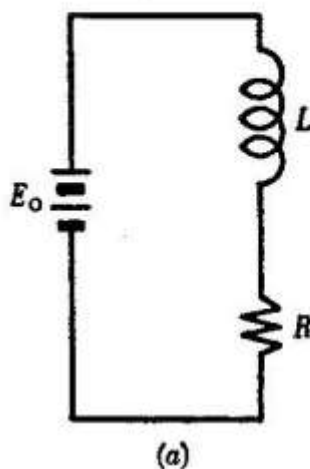
ou, aproximadamente, $v = 11{,}5$km/seg.

18) Uma das equações básicas dos circuitos elétricos é

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E(t), \tag{1}$$

onde L (henry) é a indutância, R (ohm) é a resistência, i (ampère) é a corrente e E (volt) a fôrça eletromotriz ou f.e.m. (Neste livro, R e L serão constantes).

a) Resolver (1) quando $E(t) = E_o$ e a corrente inicial é i_o

b) Resolver (1) quando $L = 3H$, $R = 15\Omega$, $E(t)$ é a corrente senoidal de 60 ciclos, $110V$, e $i = O$ quando $t = O$.

a) Integrando

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E_o,\ ie^{Rt/L} = \frac{E_o}{L}\int e^{Rt/L}\,dt = \frac{E_o}{R}\,e^{Rt/L} + C \text{ ou } i = \frac{E_o}{R} + Ce^{-Rt/L}.$$

Quando $t = 0,\ i = i_o$.

Então $\quad C = i_o - \dfrac{E_o}{R}\quad$ e $\quad i = \dfrac{E_o}{R}(1 - e^{-Rt/L}) + i_o e^{-Rt/L}$.

Note que quando $t \to \infty,\ i = E_o/R$, constante.

b) Integrando $3\dfrac{di}{dt} + 15i = E_o \operatorname{sen} \omega t = 110 \operatorname{sen} 2\pi(60)t = 110 \operatorname{sen} 120\pi t$,

$$ie^{5t} = \frac{110}{3}\int e^{5t}\operatorname{sen} 120\pi t\,\mathrm{dt} = \frac{110}{3}e^{5t}\frac{5\operatorname{sen} 120\pi t - 120\pi\cos 120\pi t}{25 + 14\,400\pi^2} + C$$

ou $$i = \frac{22}{3}\,\frac{\operatorname{sen} 120\pi t - 24\pi\cos 120\pi t}{1 + 576\pi^2} + Ce^{-5t}.$$

Quando $t = 0,\ i = 0$.

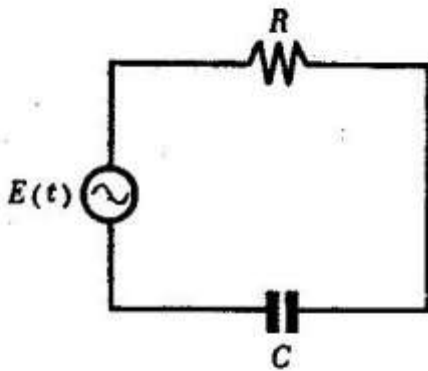
Então $C = \dfrac{22 \times 24\pi}{3(1+576\pi^2)}\quad$ e $\quad i = \dfrac{22}{3}\,\dfrac{\operatorname{sen} 120\pi t - 24\pi\cos 120\pi t + 24\pi e^{-5t}}{1 + 576\pi^2}$.

Notando-se que a soma dos quadrados dos coeficientes do seno e co-seno é o denominador da fração acima, pode-se dar à expressão forma diferente, mais vantajosa. Assim, definimos:

$$\operatorname{sen}\phi = \frac{24\pi}{(1+576\pi^2)^{1/2}} \quad \text{e} \quad \cos\phi = \frac{1}{(1+576\pi^2)^{1/2}}$$

de modo que $i = \dfrac{22}{3(1+576\pi^2)^{1/2}}(\cos\phi \operatorname{sen} 120\pi t - \operatorname{sen}\phi \cos 120\pi t) + \dfrac{176\pi\, e^{-5t}}{1+576\pi^2}$.

$$= \frac{22}{3(1+576\pi^2)^{1/2}} \operatorname{sen}(120\pi t - \phi) + \frac{176\pi\, e^{-5t}}{1+576\pi^2}.$$

Note que depois de pouco tempo, o segundo têrmo se torna bastante pequeno; assim, a corrente ràpidamente se transforma numa curva senoidal pura.

19) Se um circuito elétrico tiver uma resistência R (ohms) e um condensador de capacitância C (farads) em série, e uma f.e.m. E (volts), a carga q (coulombs) do condensador é dada por

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E.$$

Se $R = 10$ ohms, $C = 10^{-3}$ farad e $E(t) = 100 \operatorname{sen} 120\pi t$ volts,

a) achar q, supondo que $q = 0$ quando $t = 0$;

b) usar $i = dq/dt$ para achar i, supondo que $i = 5$ ampères quando $t = 0$,

Integrando $10\dfrac{dq}{dt} + 10^3 q = 100 \operatorname{sen} 120\pi t$, temos

$$qe^{100t} = 10\int e^{100t} \operatorname{sen} 120\pi t\, dt = 10\, e^{100t}\frac{100 \operatorname{sen} 120\pi t - 120\pi \cos 120\pi t}{10.000 + 14,400\pi^2} + A =$$

$$= e^{100t}\frac{10 \operatorname{sen} 120\pi t - 12\pi \cos 120\pi t}{100 + 144\pi^2} + A$$

e

$$(1) \qquad q = \frac{1}{(100+144\pi^2)^{1/2}} \operatorname{sen}(120\pi t - \phi) + Ae^{-100t}$$

onde $\operatorname{sen}\phi = \dfrac{12\pi}{(100+144\pi^2)^{1/2}}$ e $\cos\phi = \dfrac{10}{(100+144\pi^2)^{1/2}}$.

a) Quando $t = 0$, $q = 0$.

Então $A = \dfrac{3\pi}{25+36\pi^2}$ e $q = \dfrac{1}{2(25+36\pi^2)^{1/2}} \operatorname{sen}(120\pi t - \phi) + \dfrac{3\pi\, e^{-100t}}{25+36\pi^2}$.

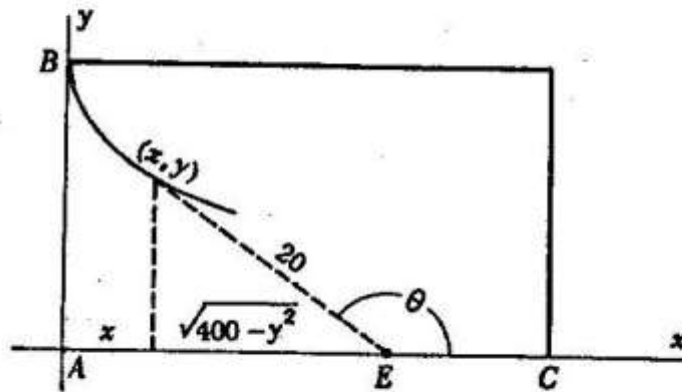
b) Derivando (1) em relação a t, temos

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{60\pi}{(25 + 36\pi^2)^{1/2}} \cos(120\pi t - \phi) - 100Ae^{-100t}.$$

Quando $t = 0$, $i = 5$.

Então $100A = \frac{60\pi}{(25 + 36\pi^2)^{1/2}} \cos\phi - 5 = \frac{300\pi}{25 + 36\pi^2} - 5$

e $$i = \frac{60\pi}{(25 + 36\pi^2)^{1/2}} \cos(120\pi t - \phi) - \left(\frac{300\pi}{25 + 36\pi^2} - 5\right) e^{-100t}.$$

20) Um menino, em pé no canto A de uma piscina retangular, segura um cordel que se acha prêso a um bote o qual se encontra no canto B, distante 20m de A. O menino caminha pela borda da piscina para C, mantendo sempre o cordel esticado. Determinar a posição do bote e do menino quando aquêle estiver a 12m de AC.

Escolhamos um sistema de eixos tal que AC seja o eixo dos x e AB o eixo dos y. Seja (x, y) a posição do bote quando o menino estiver em E e seja θ o ângulo de inclinação do cordel.

Então $\operatorname{tg}\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{-y}{\sqrt{400 - y^2}}$ ou $dx = -\frac{\sqrt{400 - y^2}}{y} dy$.

Integrando $x = -\sqrt{400 - y^2} + 20 \ln \frac{20 + \sqrt{400 - y^2}}{y} + C$.

Quando o bote estiver em B, $x = 0$ e $y = 20$.

Então $C = 0$ e $x = -\sqrt{400 - y^2} + 20 \ln \frac{20 + \sqrt{400 - y^2}}{y}$ é a equação da trajetória do bote.

Então $AE = x + \sqrt{400 - y^2} = 20 \ln \frac{20 + \sqrt{400 - y^2}}{y}$. Assim, quando o bote estiver a 12m de AC (*i. e.*, $y = 12$), $x + 16 = 20 \ln 3 = 22$.

O menino está a 22m de A e o bote está a 6m de AB.

21) Uma substância γ está sendo formada pela reação de duas outras α e β de modo que a gramas de α e b gramas de β formam $(a+b)$ gramas de γ. Sabendo que inicialmente existem x_0 gramas de α, y_0 gramas de β e nada de γ e que a taxa de formação de γ é proporcional ao produto das quantidades de α e β não transformadas, exprimir a quantidade (z gramas) de γ, que se forma, como uma função do tempo t.

As z gramas de γ formadas no tempo t consistem de $\dfrac{az}{a+b}$ gramas de α e $\dfrac{bz}{a+b}$ gramas de β.

Assim, no tempo t não se combinaram $\left(x_0 - \dfrac{az}{a+b}\right)$ gramas de α e $\left(y_0 - \dfrac{bz}{a+b}\right)$ gramas de β.

Então

$$\frac{dz}{dt} = K\left(x_0 - \frac{az}{a+b}\right)\left(y_0 - \frac{bz}{a+b}\right) = \frac{Kab}{(a+b)^2}\left(\frac{a+b}{a}x_0 - z\right)\left(\frac{a+b}{b}y_0 - z\right) =$$

$$= k(A-z)(B-z), \text{ onde } k = \frac{Kab}{(a+b)^2},\ A = \frac{(a+b)x_0}{a} \text{ e } B = \frac{(a+b)y_0}{b}.$$

Temos dois casos a considerar: $a)$ $A \neq B$, seja $A > B$, e $b)$ $A = B$.

$a)$ Aqui $\dfrac{dz}{(A-z)(B-z)} = -\dfrac{1}{A-B}\cdot\dfrac{dz}{A-z} + \dfrac{1}{A-B}\cdot\dfrac{dz}{B-z} = k\,dt.$

Integrando de $t = 0$, $z = 0$ a $t = t$, $z = z$, temos

$$\frac{1}{A-B}\ln\frac{A-z}{B-z}\bigg|_0^z = kt\bigg|_0^t,\quad \frac{1}{A-B}\left(\ln\frac{A-z}{B-z} - \ln\frac{A}{B}\right) = kt,\quad \frac{A-z}{B-z} = \frac{A}{B}e^{(A-B)kt},$$

e

$$z = \frac{AB\left(1 - e^{-(A-B)kt}\right)}{A - Be^{-(A-B)kt}}.$$

$b)$ Aqui $\dfrac{dz}{(A-z)^2} = k\,dt$. Integrando de $t = 0$, $z = 0$ a $t = t$, $z = z$, temos

$$\frac{1}{A-z}\bigg|_0^z = kt\bigg|_0^t,\quad \frac{1}{A-z} - \frac{1}{A} = kt,\quad \text{e}\quad z = \frac{A^2kt}{1 + Akt}.$$

PROBLEMAS PROPOSTOS

22) Um corpo se move em linha reta de tal modo que sua velocidade, numèricamente, excede de 2 unidades sua distância a um ponto fixo da trajetória. Sabendo que $v = 5$ quando $t = 0$, achar a equação do movimento.

Resp.: $x = 5e^t - 2$

23) Determinar o tempo necessário para que uma certa quantia se duplique colocada a 5% ao ano, contìnuamente acumulados.

Sugestão: $\dfrac{dx}{dt} = 0{,}05x$, onde x é a quantia depois de t anos.

Resp.: 13,9 anos

24) Sabendo que o rádio se decompõe numa razão proporcional à quantidade existente e que a metade da porção original desaparece em 1 600 anos, calcular a percentagem perdida em 100 anos.

Resp.: 4,2%

25) Numa cultura, a quantidade de fermento ativo cresce proporcionalmente à quantidade presente. Sabendo que em 1 hora a porção inicial foi duplicada, qual a multiplicação que se pode esperar no fim de $2\frac{3}{4}$ horas?

Resp.: 6,73 vêzes a quantidade original

26) Uma certa substância esfria-se de 100°C a 60°C, em 10 minutos, ao ar, sendo a temperatura dêste de 20°C. Achar a temperatura da substância depois de 40 minutos. *Resp.:* 25°C

27) Uma solução de 60kg de sal em água enche um tanque de 400*l*. Outra solução em que cada 5*l* contém 1kg de sal, é lançada no tanque à razão de 10*l*/min e a mistura, mantida homogênea por agitação, sai na razão de 15*l*/min. Achar a quantidade de sal existente no tanque no fim de 1 hora.

Sugestão: $\frac{dx}{dt} = 2 - \frac{15x}{400 - 5t}$.

28) Achar o tempo necessário para esvaziar um tanque com a profundidade de 9m e a base quadrada de 6m de lado, cheio de água que se deve escoar através de um orifício circular, de 1dm de raio. (Tomar, como no Problema 9, $v = 4\sqrt{h}$ m/seg).

29) Uma parede de alvenaria tem 30cm de espessura. Sabendo que a temperatura na face interna é de 20°C e na externa 0°C, que $k = 0{,}001\,2$, achar a temperatura no interior da parede, em função da distância à face externa, e a perda de calor por dia e por metro quadrado.

Resp.: $T = \frac{2x}{3}$; 691 000 cal.

30) Um barco pesa, juntamente com o remador, 150kg. Sabendo que a fôrça exercida pelo remo, no sentido do movimento é de 8kg e que a resistência (em kg) ao movimento é o triplo da velocidade (em m/seg), achar a velocidade do barco 15seg após iniciar o movimento.

31) Uma solução de 40kg de sal em água enche um tanque de 400*l*. Neste tanque faz-se entrar água pura na razão de 15*l*/min e a mistura, mantida homogênea por agitação, sai na mesma razão, caindo em um segundo tanque que contém inicialmente, 400*l* de água pura. Neste segundo tanque a mistura é homogeneizada por agitação e sai na mesma razão de entrada. Achar a quantidade de sal no segundo tanque, no fim de 1 hora.

Sugestão: $\frac{dx}{dt} = 15\left(\frac{40}{400}e^{-\frac{15}{400}t}\right) - 15\frac{x}{400}$, para o segundo tanque.

32) Um funil de 10cm de diâmetro na parte maior e 1cm de diâmetro na menor, tem 24cm de altura e está cheio de água, inicialmente. Determinar o tempo de escoamento até ficar vazio.

33) Um tanque cilíndrico, em posição vertical, tem 2m de raio, 3m de altura e possui na base um orifício de 3cm de diâmetro. Sabendo que está entrando àgua no tanque na razão de $\frac{\pi}{5}\frac{m^3}{\text{min}}$, determinar o tempo necessário para enchê-lo.

Sugestão: $\left[\frac{\pi}{300} - \frac{\pi(0{,}03)^2}{4} \cdot 4\sqrt{h}\right] dt = \pi \cdot 2^2 \cdot dh.$

34) Um corpo cuja massa é de 2 unidades MKS desliza sôbre uma mesa. A fôrça de atrito, em kgf, é igual ao dôbro da velocidade, em m/seg, e a massa está sujeita a uma fôrça de 4 sen $2t$ (kgf). Achar a velocidade, em função do tempo, sabendo que $v = 0$ quando $t = 0$.

Resp.: $v = \frac{2}{5}(\text{sen}\, 2t - 2\cos 2t + 2e^{-})$

35) Uma tubulação de vapor tem o diâmetro de 30cm e está envolvida por uma capa de material isolante ($k = 0{,}000\,22$) com a espessura de 15cm. A temperatura no tubo é de 250°C e a da parede externa da camada isolante 25°C. Achar a temperatura em um ponto do isolante, a uma distância x cm do centro do tubo, e a perda de calor por dia e por cm de comprimento.

36) A equação diferencial de um circuito que contém uma resistência R, uma capacitância C e uma f.e.m. $e = E$ sen ωt é

$$R\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = \frac{de}{dt}.$$

Admitindo R, C, E, ω como constantes, achar a corrente i no tempo t.

Resp.: $i = \frac{EC\omega}{1 + R^2C^2\omega^2}(\cos \omega t + RC\omega \,\text{sen}\, \omega t) + C_1 e^{-\frac{t}{RC}}$

Capítulo IX

EQUAÇÕES DE PRIMEIRA ORDEM E GRAU SUPERIOR

Uma equação diferencial de primeira ordem tem a forma

$$f(x, y, y') = 0 \quad \text{ou} \quad f(x, y, p) = 0,$$

onde, por conveniência, $y' = \dfrac{dy}{dx}$ foi substituído por p. Se o grau de p fôr maior do que o de, por exemplo, $p^2 - 3px + 2y = 0$, a equação é de primeira ordem e grau superior (aqui, segundo).

A equação geral de primeira ordem, de grau n pode ser colocada na forma

$$(1) \quad p^n + P_1(x, y)\, p^{n-1} + \cdots\cdots + P_{n-1}(x, y)\, p + P_n(x, y) = 0.$$

É possível, algumas vêzes, resolver tais equações por um ou mais dos processos expostos abaixo. Em tais casos, o problema se resume em resolver uma ou mais equações de primeira ordem e primeiro grau.

Equações resolvidas em *p*. Aqui o primeiro membro de (1), considerado como um polinômio em p, pode ser decomposto em n fatôres lineares reais, isto é, (1) pode ser pôsto na forma

$$(p - F_1)\,(p - F_2) \cdots\cdots (p - F_n) = 0,$$

onde os F são funções de x e y.

Igualando a zero cada fator e resolvendo as n equações diferenciais de primeira ordem e primeiro grau, resultantes,

$$\frac{dy}{dx} = F_1(x, y), \quad \frac{dy}{dx} = F_2(x, y), \quad \cdots\cdots, \quad \frac{dy}{dx} = F_n(x, y)$$

obtém-se

$$(2) \quad f_1(x, y, C) = 0, \ \ f_2(x, y, C) = 0, \ \ \cdots\cdots, \ \ f_n(x, y, C) = 0.$$

A primitiva de (1) é o produto

$$f_1(x, y, C) \cdot f_2(x, y, C) \cdots\cdots\cdots f_n(x, y, C) = 0 \tag{3}$$

das n soluções de (2).

NOTA. Qualquer solução individual de (2) pode ser escrita em uma qualquer das suas várias formas possíveis, antes de entrar como fator do produto (3). (Ver Problemas 1-3).

Equações resolvidas em y, i. e., $y = f(x, p)$.

Derivando em relação a x, temos:

$$\frac{dy}{dx} = p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx} = F\left(x, y, \frac{dp}{dx}\right),$$

que é uma equação de primeira ordem e primeiro grau.

Resolvendo: $p = F\left(x, p, \dfrac{dp}{dx}\right)$, obtém-se $\phi(x, p, C) = 0$.

A primitiva é obtida pela eliminação de p entre $y = f(x, p)$ e $\phi(x, p, C) = 0$, quando possível, ou exprimindo x e y separadamente como funções do parâmetro p. (Ver Problemas 4-7).

Equações resolvidas em x, i. e., $x = f(y, p)$.

Derivando em relação a y obtém-se

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{p} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dy} = F\left(y, p, \frac{dp}{dy}\right),$$

que é uma equação de primeira ordem e primeiro grau.

Resolvendo: $\dfrac{1}{p} = F\left(y, p, \dfrac{dp}{dy}\right)$ obtém-se $\phi(y, p, C) = 0$.

A primitiva é obtida por eliminação de p entre $x = f(y, p)$ e $\phi(y, p, C) = 0$, quando possível, ou exprimindo x e y separadamente como funções de p. (Ver Problemas 8-10).

Equação de Clairaut. A equação diferencial da forma

$$y = px + f(p)$$

é denominada equação de Clairaut. Sua primitiva é

$$y = Cx + f(C)$$

e é obtida pela simples substituição de p por C na equação dada. (Ver Problemas 11-16).

PROBLEMAS RESOLVIDOS

1) Resolver

$$p^4-(x+2y+1)p^3+(x+2y+2xy)p^2-2xyp=0 \text{ ou } p(p-1)(p-x)(p-2y)=0.$$

As soluções das equações de primeira ordem e primeiro grau, componentes

$$\frac{dy}{dx}=0,\ \frac{dy}{dx}=1,\ \frac{dy}{dx}-x=0,\ \frac{dy}{dx}-2y=0$$

são, respectivamente,

$$y-C=0, \quad y-x-C=0, \quad 2y-x^2-C=0, \quad y-Ce^{2x}=0.$$

A primitiva da equação dada é

$$(y-C)(y-x-C)(2y-x^2-C)(y-Ce^{2x})=0.$$

2) Resolver $xyp^2+(x^2+xy+y^2)p+x^2+xy=0$ ou $(xp+x+y)(yp+x)=0$.

As soluções das equações componentes $x\dfrac{dy}{dx}+x+y=0$ e $\dfrac{dy}{dx}+x=0$ são, respectivamente,

$$2xy+x^2-C=0 \text{ e } x^2+y^2-C=0.$$

A primitiva da equação dada é $(2xy+x^2)(x^2+y^2-C)=0$.

3) Resolver

$$(x^2+x)p^2+(x^2+x-2xy-y)p+y^2-xy=0 \text{ ou } [(x+1)p-y][xp+x-y]=0.$$

As soluções das equações componentes

$$(x+1)\frac{dy}{dx}-y=0 \text{ e } x\frac{dy}{dx}+x-y=0$$

são, respectivamente,

$$y-C(x+1)=0 \text{ e } y+x\ln Cx=0.$$

A primitiva da equação dada é $[y-C(x+1)][y+x\ln Cx]=0$.

4) Resolver $16x^2+2p^2y-p^3x=0$ ou $2y=px+16\dfrac{x^2}{p^2}$.

Derivando a última expressão em relação a x,

$$2p=p+x\frac{dp}{dx}-\frac{32x}{p^2}+\frac{32x^2}{p^3}\frac{dp}{dx}.$$

Eliminando os denominadores e simplificando,

$$p(p^3+32x)-x(p^3+32x)\frac{dp}{dx}=0$$

ou

(1) $$(p^3+32x)\left(p-x\frac{dp}{dx}\right)=0.$$

Esta equação é satisfeita quando $p^3+32x = 0$ ou $p - x\dfrac{dp}{dx} = 0$. Desta última, $\dfrac{dp}{p} = \dfrac{dx}{x}$ e $p = Kx$. Substituindo p por Kx na equação dada:

$$16x^2 + 2K^2x^2y - K^3x^4 = 0 \quad \text{ou} \quad 2 + C^2y - C^3x^2 = 0,$$

depois de mudar K por $2C$.

O fator $p^3 + 32x$ de (1) não pode ser considerado porque não contém a derivada dp/dx. Seu significado será dado no Capítulo X.

5) Resolver $y = 2px + p^4x^2$.

Derivando em relação a x,

$$p = 2x\frac{dp}{dx} + 2p + 2p^4x + 4p^3x^2\frac{dp}{dx} \quad \text{ou} \quad \left(p + 2x\frac{dp}{dx}\right)(1 + 2p^3x) = 0.$$

O fator $1 + 2p^3x$ é desprezado, como no Problema 4.

De $p + 2x\dfrac{dp}{dx} = 0$. $xp^2 = C$.

Na forma paramétrica, tem-se $x = C/p^2$, $y = 2C/p + C^2$, sendo a segunda relação obtida fazendo $x = C/p^2$ na equação diferencial.

Aqui p pode ser eliminado sem dificuldade entre as relações $xp^2 = C$ ou $p^2 = C/x$ e a equação dada. Esta última pode ser posta na forma $y - p^4x^2 = 2px$ que, elevada ao quadrado, dá $(y - p^4x^2)^2 = 4p^2x^2$. Substituindo p^2 por C/x, temos: $(y - C^2)^2 = 4Cx$.

6) Resolver $x = yp + p^2$ ou $y = \dfrac{x}{p} - p$.

Derivando em relação a x,

$$p = \frac{1}{p} - \frac{x}{p^2}\frac{dp}{dx} - \frac{dp}{dx} \quad \text{ou} \quad p^3 - p + (x + p^2)\frac{dp}{dx} = 0.$$

Então, $(p^3 - p)\dfrac{dx}{dp} + x + p^2 = 0$ ou $\dfrac{dx}{dp} + \dfrac{x}{p^3 - p} = -\dfrac{p}{p^2 - 1}$.

A última é uma equação diferencial linear em que $e^{\int dp/(p^3-p)} = \dfrac{\sqrt{p^2-1}}{p}$ é um fator de integração. Então:

$$\frac{x\sqrt{p^2-1}}{p} = -\int\frac{dp}{\sqrt{p^2-1}} = -\ln\left(p + \sqrt{p^2-1}\right) + C$$

e

$$x = -\frac{p}{\sqrt{p^2-1}}\ln\left(p + \sqrt{p^2-1}\right) + \frac{Cp}{\sqrt{p^2-1}},$$

$$y = -p - \frac{1}{\sqrt{p^2-1}}\ln\left(p + \sqrt{p^2-1}\right) + \frac{C}{\sqrt{p^2-1}}.$$

7) Resolver $y = (2+p)x + p^2$.

Derivando em relação a x,

$$p = 2 + p + (x+2p)\frac{dp}{dx} \quad \text{ou} \quad \frac{dx}{dp} + \tfrac{1}{2}x = -p.$$

Esta é uma equação diferencial linear em que $e^{\frac{1}{2}\int dp} = e^{\frac{1}{2}p}$ é um fator de integração.

Então: $xe^{\frac{1}{2}p} = -\int pe^{\frac{1}{2}p}\,dp = -2pe^{\frac{1}{2}p} + 4e^{\frac{1}{2}p} + C$

e $\qquad x = 2(2-p) + Ce^{-\frac{1}{2}p}, \quad y = 8 - p^2 + (2+p)\,Ce^{-\frac{1}{2}p}.$

8) Resolver $y = 3px + 6p^2y^2$.

Resolvendo em x, $3x = \dfrac{y}{p} - 6py^2$. Derivando em relação a y,

$$\frac{3}{p} = \frac{1}{p} - \frac{y}{p^2}\frac{dp}{dy} - 6y^2\frac{dp}{dy} - 12py \quad \text{e} \quad (1+6p^2y)\left(2p + y\frac{dp}{dy}\right) = 0.$$

O segundo fator igualado a zero dá $py^2 = C$. Tirando o valor de p e substituindo na equação diferencial original, tem-se a primitiva $y^3 = 3Cx + 6C^2$.

9) Resolver $p^3 - 2xyp + 4y^2 = 0$ ou $2x = \dfrac{p^2}{y} + \dfrac{4y}{p}$.

Derivando em relação a y,

$$\frac{2}{p} = \frac{2p}{y}\frac{dp}{dy} - \frac{p^2}{y^2} + 4\left(\frac{1}{p} - \frac{y}{p^2}\frac{dp}{dy}\right) \quad \text{ou} \quad \left(p - 2y\frac{dp}{dy}\right)(2y^2 - p^3) = 0.$$

Integrando $p - 2y\dfrac{dp}{dy} = 0$ e eliminando p entre a solução $p^2 = Ky$ e a equação diferencial original, temos $16y = K(K-2x)^2$. Fazendo $K = 2C$ tem-se a forma $2y = C(C-x)^2$.

10) Resolver $4x = py(p^2-3)$.

Derivando em relação a y,

$$\frac{4}{p} = p(p^2-3) + 3y(p^2-1)\frac{dp}{dy} \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{y} + \frac{3p(p^2-1)\,dp}{(p^2-4)(p^2+1)} = 0.$$

Integrando, por frações parciais,

$$\ln y + \frac{9}{10}\ln(p+2) + \frac{9}{10}\ln(p-2) + \frac{3}{5}\ln(p^2+1) = \ln C.$$

Então

$$y = \frac{C}{(p^2-4)^{9/10}(p^2+1)^{3/5}}, \quad x = \frac{1}{4}\,\frac{Cp(p^2-3)}{(p^2-4)^{9/10}(p^2+1)^{3/5}}.$$

EQUAÇÃO DE CLAIRAUT

11) Resolver $y = px + \sqrt{4 + p^2}$. A primitiva é $y = Cx + \sqrt{4 + C^2}$.

12) Resolver $(y - px)^2 = 1 + p^2$.

Aqui: $y = px \pm \sqrt{1 + p^2}$.

A primitiva é

$$(y - Cx - \sqrt{1 + C^2})(y - Cx + \sqrt{1 + C^2}) = 0 \quad \text{ou} \quad (y - Cx)^2 = 1 + C^2.$$

13) Resolver $y = 3px + 6y^2 p^2$. (Ver Problema 8).

Esta equação pode ser reduzida à forma da equação de Clairaut. Multiplicando a equação por y^2, temos: $y^3 = 3y^2 px + 6y^4 p^2$.

Fazendo $y^3 = v$, $3y^2 p = \dfrac{dv}{dx}$, a equação se torna

$$v = x\frac{dv}{dx} + \frac{2}{3}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2.$$

A primitiva é

$$v = Kx + \frac{2}{3}K^2 \quad \text{ou} \quad y^3 = Kx + \frac{2}{3}K^2 \quad \text{ou} \quad y^3 = 3Cx + 6C^2.$$

14) Resolver $\cos^2 y\, p^2 + \operatorname{sen} x \cos x \cos y\, p - \operatorname{sen} y \cos^2 x = 0$.

A transformação $\operatorname{sen} y = u$, $\operatorname{sen} x = v$, $p\dfrac{\cos y}{\cos x} = \dfrac{du}{dv}$ reduz a equação a $u = v\dfrac{du}{dv} + \left(\dfrac{du}{dv}\right)^2$. Então $u = Cv + C^2$ ou $\operatorname{sen} y = C \operatorname{sen} x + C^2$.

15) Resolver $(px - y)(py + x) = 2p$.

A transformação $y^2 = u$, $x^2 = v$, $p = \dfrac{v^{1/2}}{u^{1/2}}\dfrac{du}{dv}$ reduz a equação a

$$\left(\frac{v}{u^{1/2}}\frac{du}{dv} - u^{1/2}\right)\left(v^{1/2}\frac{du}{dv} + v^{1/2}\right) = 2\frac{v^{1/2}}{u^{1/2}}\frac{du}{dv} \quad \text{ou} \quad \left(v\frac{du}{dv} - u\right)\left(\frac{du}{dv} + 1\right) = 2\frac{du}{dv}.$$

Então

$$u = v\frac{du}{dv} - \frac{2\dfrac{du}{dv}}{1 + \dfrac{du}{dv}}, \quad \text{e} \quad u = Cv - \frac{2C}{1 + C} \quad \text{ou} \quad y^2 = Cx^2 - \frac{2C}{1 + C}.$$

16) Resolver $p^2 x(x - 2) + p(2y - 2xy - x + 2) + y^2 + y = 0$.

A equação pode ser posta na forma $(y - px + 2p)(y - px + 1) = 0$.

Daí $y = px - 2p$ e $y = px - 1$ que são equações de Clairaut.

Assim, a primitiva é $(y - Cx + 2C)(y - Cx + 1) = 0$.

PROBLEMAS PROPOSTOS

Achar a primitiva de cada uma das seguintes equações:

17) $x^2p^2 + xyp - 6y^2 = 0$ *Resp.*: $(y - Cx^2)(y - Cx^{-3}) = 0$

18) $xp^2 + (y - 1 - x^2)p - x(y - 1) = 0$ *Resp.*: $(2y - x^2 + C)(xy - x + C) = 0$

19) $xp^2 - 2yp + 4x = 0$ *Resp.*: $Cy = x^2 + C^2$

20) $3x^4p^2 - xp - y = 0$ *Resp.*: $xy = C(3Cx - 1)$

21) $8yp^2 - 2xp + y = 0$ *Resp.*: $y^2 - Cx + 2C^2 = 0$

22) $y^2p^2 + 3px - y = 0$ *Resp.*: $y^3 - 3Cx - C^2 = 0$

23) $p^2 - xp + y = 0$ *Resp.*: $y = Cx - C^2$

24) $16y^3p^2 - 4xp + y = 0$ *Resp.*: $y^4 = C(x - C)$

25) $xp^5 - yp^4 + (x^2 + 1)p^3 - 2xyp^2 + (x + y^2)p - y = 0$
Resp.: $(y - Cx - C^3)(C^2x - Cy + 1) = 0$

26) $xp^2 - yp - y = 0$ *Resp.*: $x = C(p + 1)e^p,\ y = Cp^2e^p$

27) $y = 2px + y^2p^3$ (Fazer $y^2\ z$) *Resp.*: $y^2 = 2Cx + C^3$

28) $p^2 - xp - y = 0$ *Resp.*: $3x = 2p + C/\sqrt{p},\ 3y = p^2 - C/\sqrt{p}$

29) $y = (1 + p)x + p^2$ *Resp.*: $x = 2(1 - p) + Ce^{-p},\ y = 2 - p^2 + C(1 + p)e^{-p}$

30) $y = 2p + \sqrt{1 + p^2}$
Resp.: $x = 2\ln p + \ln(p + \sqrt{1 + p^2}) + C,\ y = 2p + \sqrt{1 + p^2}$

31) $yp^2 - xp + 3y = 0$
Resp.: $x = Cp^{1/2}(p^2 + 3)(p^2 + 2)^{-5/4},\ y = Cp^{3/2}(p^2 + 2)^{-5/4}$

Capítulo X

SOLUÇÕES SINGULARES
SOLUÇÕES ESTRANHAS À EQUAÇÃO

A equação diferencial

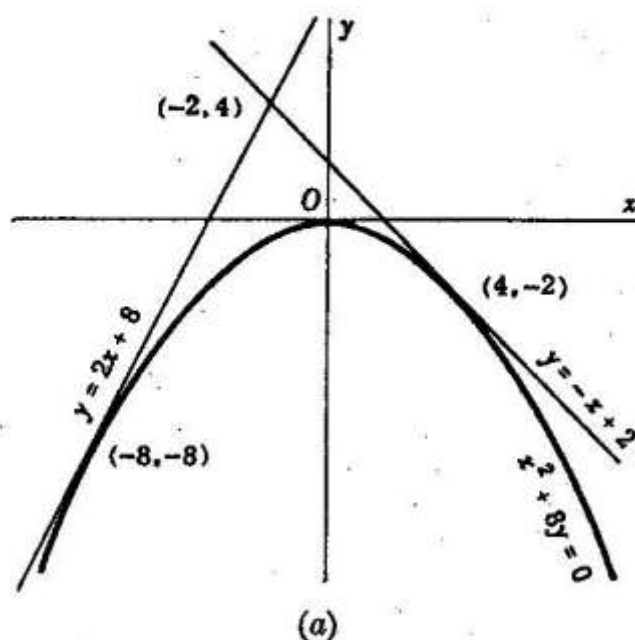
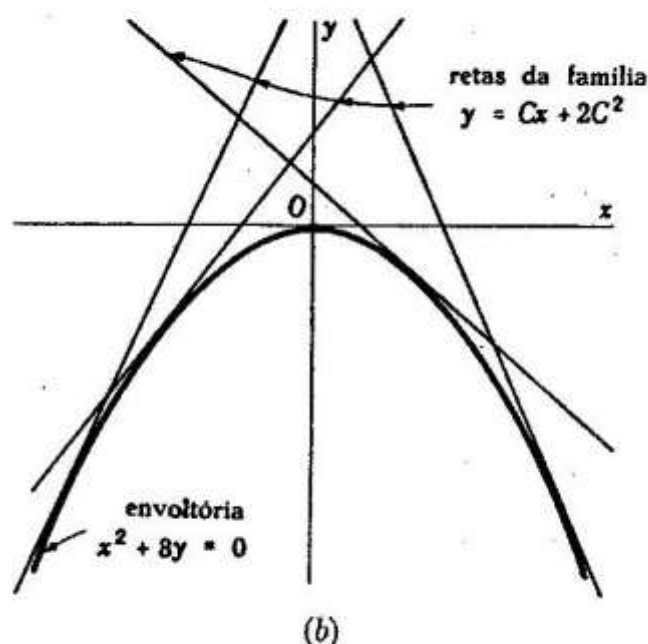
(1) $$y = px + 2p^2$$

tem como primitiva a família de retas da equação

(2) $$y = Cx + 2C^2.$$

A todo ponto (x, y) do conjunto de pontos em que $x^2 + 8y > 0$, a equação (1) associa um par de direções reais e distintas e a equação (2) associa um par de retas reais e distintas, cujas direções são as determinadas por (1). Por exemplo, substituindo as coordenadas $(-2, 4)$ em (1), tem-se $4 = -2p + 2p^2$ ou $p^2 - p - 2 = 0 \therefore p = 2$ e $p = -1$. Anàlogamente, partindo de (2), temos: $C = 2$ e $C = -1$. Assim, pelo ponto $(-2, 4)$ passam as retas $y = 2x + 8$ e $y = -x + 2$ da família (2), cujas inclinações são dadas por (1). Os pontos em que $x^2 + 8y < 0$ darão raízes p e C imaginárias e distintas.

(a)

(*b*)

Em cada ponto da parábola $x^2 + 8y = 0$ passa apenas uma reta da família, isto é, as coordenadas de um ponto qualquer da parábola estão de tal modo relacionadas que, para elas, as duas raízes C, de (2), e as duas raízes p, de (1), são iguais. Por exemplo, no ponto $(-8, -8)$ passa apenas uma reta $y = 2x + 8$, e pelo ponto $(4, -2)$ passa sòmente a reta $y = -x + 2$. (Ver Fig. *a*).

Verifica-se fàcilmente que a reta de (2) que passa por um ponto de $x^2 + 8y = 0$ é tangente à parábola nesse ponto; isto é, a direção da parábola em qualquer ponto é dada por (1). Assim, $x^2 + 8y = 0$ é uma solução de (1) e é chamada uma *solução singular* porque não pode ser obtida de (2) pela escolha da constante, isto é, não é uma solução particular. A curva correspondente, a parábola, é chamada uma *envoltória* da família de retas (2). (Ver Fig. *b*, acima).

Resumindo:

— Uma solução singular de uma equação diferencial satisfaz à equação mas não é uma solução particular da equação diferencial.

— Os pontos pertencentes ao lugar (envoltória) têm menor número de direções distintas, dadas pela equação diferencial, e menor número de curvas distintas, dadas pela primitiva correspondente, do que os pontos fora do lugar.

As soluções singulares de uma equação diferencial podem ser determinadas exprimindo as condições:

a) a equação diferencial (em p) tem raízes múltiplas e

b) a primitiva (em C) tem raízes múltiplas.

Em geral, uma equação de primeira ordem não tem soluções singulares; se fôr do primeiro grau não pode ter soluções singulares. Além disso, uma equação $f(x, y, p) = 0$ não pode ter soluções singulares se $f(x, y, p)$ puder ser expressa em fatôres lineares em p e racionais em x e y.

Eliminando-se X entre $F(X) = 0$ e $F'(X) = 0$ e igualando-se a expressão a zero, obtém-se a condição para que a equação tenha raízes múltiplas. A expressão mais simples assim obtida é chamada *discriminante*. O discriminante de

$$aX^2 + bX + c = 0 \text{ é } b^2 - 4ac,$$

o de

$$aX^3 + bX^2 + cX + d = 0 \text{ é } b^2c^2 + 18abcd - 4ac^3 - 4b^3d - 27a^2d^2.$$

(Ver Problema 1).

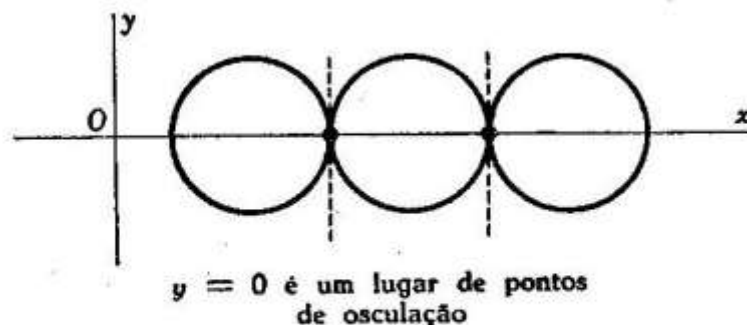
Para a equação inicial, os discriminantes das equações em p e C são idênticos e iguais a $x^2 + 8y$.

Se $E(x, y)$ fôr uma solução singular da equação diferencial $f(x, y, p) = 0$, cuja primitiva é $g(x, y, C) = 0$, $E(x, y)$ será um fator de ambos os discriminantes. Entretanto, cada discriminante pode apresentar outros fatôres que dão origem a outros lugares, associados com a primitiva. Como a equação dêsses lugares, geralmente, não satisfazem à equação diferencial, êles são denominados *estranhos*.

Soluções estranhas. [Equação diferencial $f(x, y, p) = 0$; primitiva $g(x, y, p) = 0$.].

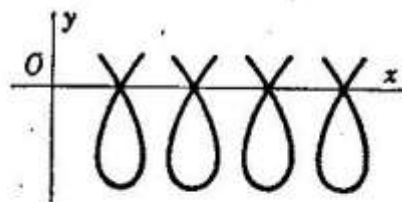
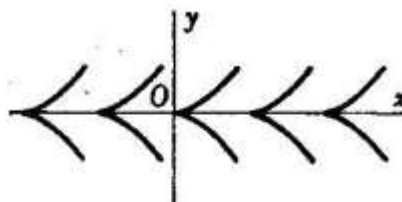
a) *Lugar de Pontos de Osculação.*

Seja P um ponto em que passem duas ou mais das n curvas distintas da família $g(x, y, C) = 0$, tendo nêle uma tangente comum. O número de direções distintas em P é menor do que n de modo que, nesse ponto, o discriminante p deve ser nulo. O lugar, se houver, de todos êsses pontos é denominado lugar dos *pontos de osculação*. Se $T(x, y) = 0$ fôr a equação dêsse lugar, $T(x, y)$ será um fator do discriminante p. Em geral, $T(x, y)$ não é um fator do discriminante C e $T(x, y)$ não satisfaz à equação diferencial.

$y = 0$ é um lugar de pontos de osculação

b) *Lugar dos Pontos Nodais.*

Suponhamos que uma das curvas da família passe em P e tenha, nesse ponto, um nó (ponto duplo com tangentes distintas). Não poderá passar nesse ponto mais do que $n-1$ curvas distintas, porque dois dos n valores de p respondem pelo que acima se admitiu. Assim, o discriminante C deve ser nulo em P. O lugar, se houver, de todos êsses pontos é denominado lugar dos *pontos nodais*. Se $N(x, y) = 0$ fôr a equação do lugar, $N(x, y)$ será um fator do discriminante C. Em geral, $N(x, y)$ não é fator do discriminante p e $N(x, y) = 0$ não satisfaz à equação diferencial.

c) *Lugar dos Pontos de Reversão.*

Admitamos que uma das curvas da família passe por P e tenha, nesse ponto, um ponto de reversão (ponto duplo com tangentes coincidentes). O discriminante p deve anular-se em P, porque uma das p raízes é de multiplicidade dois. Além disso, como no caso do nó, não pode haver mais do que $n-1$ curvas passando por P e o discriminante C deve ser nulo em P. O lugar, se houver, de todos êsses pontos é o lugar dos *pontos de reversão*. Se $C(x, y) = 0$ é a equação dêsse lugar, $C(x, y)$ é um fator dos dois discriminantes p e C. Em geral, $C(x, y) = 0$ não satisfaz à equação diferencial.

$y = 0$ é um lugar de pontos nodais

$y = 0$ é um lugar de pontos de reversão

Se as curvas da família $g(x, y, C) = 0$ forem linhas retas, não haverá soluções estranhas.

Se as curvas da família forem cônicas, não poderá haver lugar dos pontos nodais nem lugar dos pontos de reversão.

Discriminante *p*. O discriminante da equação diferencial $f(x, y, p) = 0$, o discriminante p, igualado a zero, inclui como fator:

1) a equação da envoltória (solução singular), uma vez. (Ver Problemas 2-4). (A solução singular satisfaz à equação diferencial);

2) a equação do lugar dos pontos de reversão, uma vez. (Ver Problema 7). (A equação dêsse lugar não satisfaz à equação diferencial, a menos que seja, também, uma solução singular ou particular).

3) a equação do lugar dos pontos de osculação, duas vêzes. (Ver Problema 5). (A equação dêsse lugar não satisfaz à equação diferencial, a menos que seja, também, uma solução singular ou particular).

Discriminante *C*. O discriminante da primitiva $g(x,y,C)=0$, o discriminante C, igualado a zero, inclui como fator:

1) a equação da envoltória ou solução singular, uma vez;
2) a equação do lugar dos pontos de reversão, três vêzes;
3) a equação do lugar dos pontos nodais, duas vêzes. (Ver Problema 6). (A equação dêsse lugar não satisfaz à equação diferencial, a menos que seja, também, uma solução singular ou particular).

Quando a equação de um lugar qualquer se enquadra em duas categorias, sua multiplicidade num discriminante é a soma das multiplicidades de cada categoria. Assim, a equação de um lugar de pontos de reversão que seja, também, uma envoltória, aparece duas vêzes no discriminante p e quatro vêzes no discriminante C.

A determinação de soluções estranhas, porém, é mais do que um simples cálculo da multiplicidade de fatôres.

PROBLEMAS RESOLVIDOS

1) Achar o discriminante para cada uma das seguintes equações:

a) $p^3 + px - y = 0$, *b*) $p^3x - 2p^2y - 16x^2 = 0$, *c*) $y = C(x-C)^2$.

Nota. Êstes discriminantes poderiam ser escritos ràpidamente usando a fórmula dada acima. Apresentamos aqui um processo que pode ser preferido.

a) Vamos eliminar p entre $f(x,y,p) = p^3 + px - y = 0$ e $\dfrac{\partial f}{\partial p} = 3p^2 + x = 0$, o que melhor pode ser feito, eliminando p entre

$$3f - p\frac{\partial f}{\partial p} = 3p^3 + 3px - 3y - 3p^3 - px = 2px - 3y = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial p} = 3p^2 + x = 0.$$

Da primeira, obtemos: $p = \dfrac{3y}{2x}$ que, substituído na segunda, fornece

$$3p^2 + x = \frac{27y^2}{4x^2} + x = 0 \quad \text{ou} \quad 4x^3 + 27y^2 = 0.$$

Nota. Se $f(x,y,p) = 0$ é do grau n em p, eliminamos p entre $nf - p\dfrac{\partial f}{\partial p} = 0$ e $\dfrac{\partial f}{\partial p} = 0$.

b) Vamos eliminar p entre

$$3f - p\frac{\partial f}{\partial p} = 3p^3x - 6p^2y - 48x^2 - 3p^3x + 4p^2y = -2p^2y - 48x^2 = 0$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial p} = 3p^2x - 4py = 0.$$

Da última, temos $9p^4x^2 = 16p^2y^2$ ou $9p^4x^2 - 16p^2y^2 = 0$ e da primeira $p^2 = -24\frac{x^2}{y}$, que substituído na anterior dá: $x^2(2y^3 + 27x^4) = 0$.

c) Aqui $g(x, y, C) = C^3 - 2C^2x + Cx^2 - y = 0$ e vamos eliminar C entre

(1) $3g - C\frac{\partial g}{\partial C} = 3C^3 - 6C^2x + 3Cx^2 - 3y - 3C^3 + 4C^2x - Cx^2 = -2C^2x + 2Cx^2 - 3y = 0$

e

(2) $\frac{\partial g}{\partial C} = 3C^2 - 4Cx + x^2 = 0.$

Multiplicando (1) por 3 e (2) por $2x$, e somando, temos:

$$-2Cx^2 + 2x^3 - 9y = 0.$$

Entrando com $C = \frac{2x^3 - 9y}{2x^2}$ em (2) e simplificando, temos:

$$y(4x^3 - 27y) = 0.$$

2) Resolver $y = 2xp - yp^2$ e estudar as soluções singulares.

Temos $2x = \frac{y}{p} + yp$ e derivando em relação a y, vem:

$$\frac{2}{p} = \frac{1}{p} - \frac{y}{p^2}\frac{dp}{dy} + p + y\frac{dp}{dy} \quad \text{ou} \quad (p^2 - 1)\left(p + y\frac{dp}{dy}\right) = 0.$$

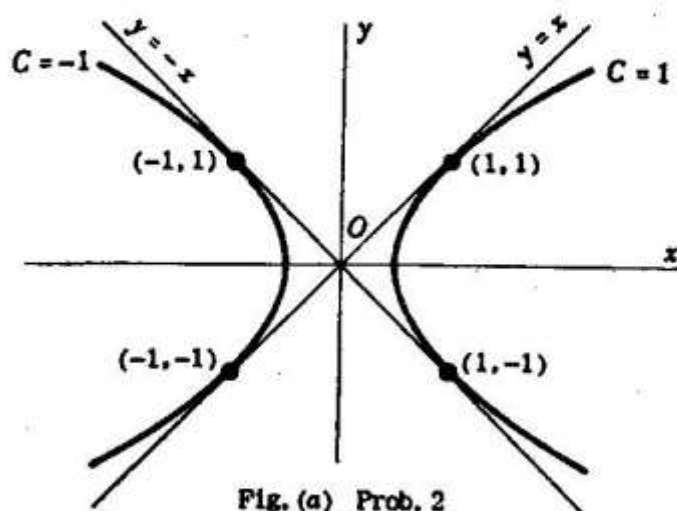



Fig. (*a*) Prob. 2

Família de parábolas $y^2 = 2Cx - C^2$.
envoltória $y = \pm x$.

Integrando $p + y\dfrac{dp}{dy} = 0$ obtém-se $py = C$ e entrando com $p = \dfrac{C}{y}$ na equação diferencial dada, obtém-se a primitiva $y^2 = 2Cx - C^2$.

Os discriminantes p e C são $x^2 - y^2 = 0$. Como $y = x$ e $y = -x$ satisfazem à equação diferencial dada, ambos são soluções singulares.

Se se eliminar p entre a equação diferencial e o fator $p^2 - 1 = 0$, desprezado nesta solução, obtém-se, outra vez, a equação da envoltória $x^2 - y^2 = 0$. A presença de um tal fator implica na existência de uma solução singular, porém a recíproca não é verdadeira. Assim, êste processo não deve ser usado para pesquisar soluções singulares.

A primitiva representa uma família de parábolas com o eixo principal no eixo dos x. Cada parábola é tangente à reta $y = x$, no ponto (C, C), e à reta $y = -x$ no ponto $(C, -C)$. Ver Figura (a), página anterior.

3) Examinar as soluções singulares de $p^3 + px - y = 0$.

Esta é uma equação de Clairaut, sendo a primitiva

$$y = Cx + C^3.$$

Os discriminantes p e C $4x^3 + 27y^2 = 0$ são uma solução singular porque satisfazem à equação diferencial.

A primitiva representa uma família de retas tangentes à parábola semicúbica $4x^3 + 27y^2 = 0$, que é a envoltória. Ver Figura (b), ao lado.

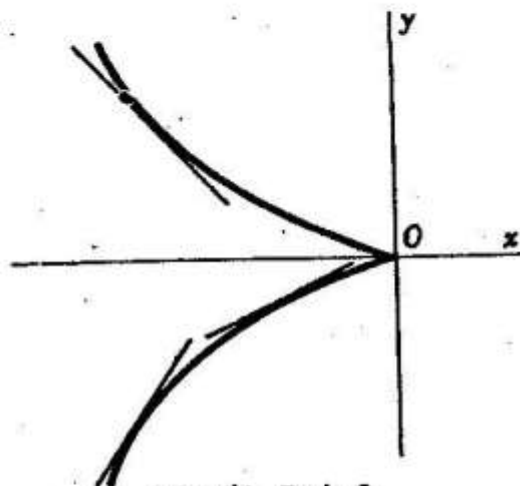



Fig. (b) Prob. 3

Família de retas $y = Cx + C^3$,
envoltória $4x^3 + 27y^2 = 0$.

4) Examinar as soluções singulares de $6p^2y^2 + 3px - y = 0$.

Do Problema 13, Capítulo IX, a primitiva é $y^3 = 3Cx + 6C^2$.

Os discriminantes p e C têm a expressão $3x^2 + 8y^3 = 0$. Como satisfaz à equação diferencial, é uma solução singular.

5) Resolver $(x^2 - 4)\,p^2 - 2xyp - x^2 = 0$ e examinar as soluções singulares e estranhas.

Da equação vem $2y = xp - \dfrac{4}{x}p - \dfrac{x}{p}$ e derivando em relação a x:

$$2p = p + x\frac{dp}{dx} + \frac{4p}{x^2} - \frac{4}{x}\frac{dp}{dx} - \frac{1}{p} + \frac{x}{p^2}\frac{dp}{dx}$$

ou

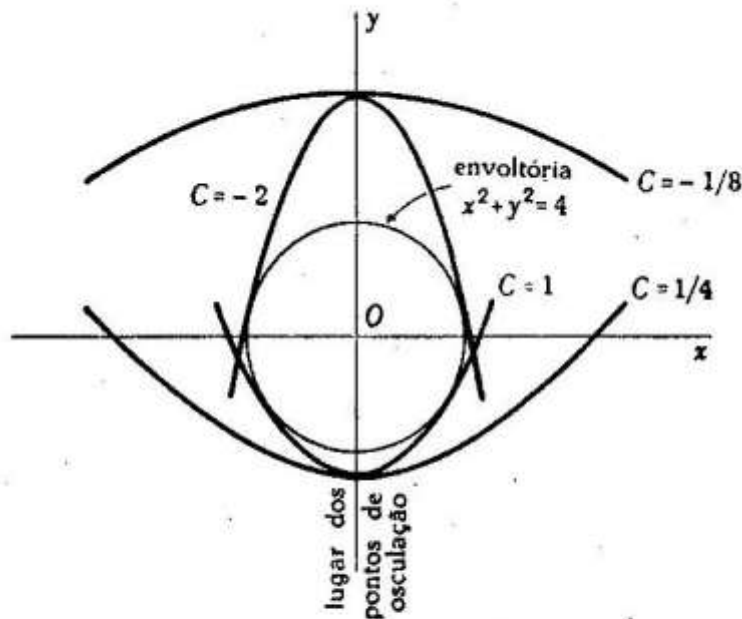
$$(p^2x^2 - 4p^2 + x^2)\left(p - x\frac{dp}{dx}\right) = 0.$$

De $p - x\dfrac{dp}{dx} = 0$, $p = Cx$ e a primitiva é $C^2(x^2 - 4) - 2Cy - 1 = 0$. O discriminante p é $x^2(x^2 + y^2 - 4) = 0$ e o discriminante C é $x^2 + y^2 - 4 = 0$. $x^2 + y^2 = 4$ aparece uma vez em cada discriminante e satisfaz à equa-

ção diferencial. É uma solução singular. Também $x = 0$ aparece duas vêzes no discriminante p, não aparecendo no discriminante C nem satisfazendo à equação diferencial. É um lugar de pontos de osculação.

A primitiva representa uma família de parábolas tendo o círculo $x^2 + y^2 = 4$ como envoltória. Ver Figura (c) abaixo.

NOTA 1. As duas parábolas que passam num ponto P do lugar $x = 0$ têm, em P, uma tangente comum.

NOTA 2. Uma curva da família encontra a envoltória nos pontos $\left(\pm \frac{\sqrt{4C^2 - 1}}{C}, -\frac{1}{C}\right)$; assim, sòmente as parábolas dadas por $C^2 > \frac{1}{4}$ tocam o círculo.

Família de parábolas
$C^2(x^2 - 4) - 2Cy - 1 = 0.$
Fig. (c) Prob. 5

6) Resolver $4xp^2 - (3x - 1)^2 = 0$ e examinar as soluções singulares e as estranhas.

Temos $p = \pm\left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)$, e, por integração,

$$y = \pm(x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}}) + C_1 \quad \text{ou} \quad (y + C)^2 = x(x - 1)^2.$$

O discriminante p é $x(3x - 1)^2 = 0$, e o discriminante C é $x(x - 1)^2 = 0$.

$x = 0$ é comum aos dois e satisfaz à equação diferencial, isto é, $x = 0$, $\frac{dx}{dy} = 0$ satisfaz à equação quando escrita com a forma $4x - (3x - 1)^2\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = 0$.

É uma solução singular.

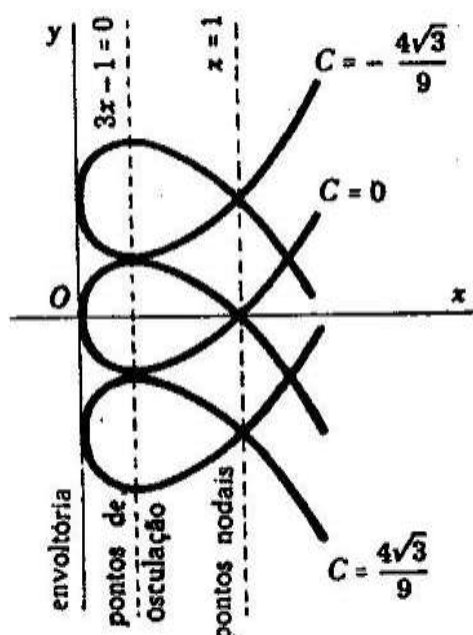
$3x - 1 = 0$ é um lugar de pontos de osculação porque aparece duas vêzes no discriminante p, não aparece no discriminante C e não satisfaz à equação diferencial.

Família de curvas cúbicas $(y+C)^2 = x(x-1)^2$.

Fig. (d) Prob. 6

$x-1=0$ é um lugar de pontos nodais porque ocorre duas vêzes no discriminante C, não aparece no discriminante p e não satisfaz à equação diferencial.

A primitiva representa uma família de cúbicas, obtida movendo-se $y^2 = x(x-1)^2$ ao longo do eixo dos y. Estas curvas são tangentes ao eixo dos y e têm um ponto duplo em $x=1$. Além disso, em cada ponto de $x = \frac{1}{3}$ passam duas curvas da família tendo, nesse ponto, uma tangente comum. Ver Figura (d), ao lado.

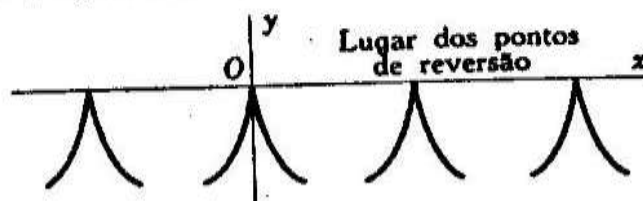
7) Resolver $9yp^2 + 4 = 0$ e examinar as soluções singulares e as soluções estranhas.

Temos $9y = -4/p^2$ e diferenciando em relação a x, vem:

$$dx = \frac{8}{9}\frac{dp}{p^4} \quad \text{e} \quad x + C = -\frac{8}{27p^3}.$$

Eliminando p entre esta última relação e a equação diferencial, a primitiva é $y^3 + (x+C)^2 = 0$.

O discriminante p é $y = 0$ e o discriminante C é $y^3 = 0$. Como $y = 0$ aparece uma vez no discriminante p, três vêzes no discriminante C e não satisfaz à equação diferencial, é o lugar dos pontos de reversão.

A primitiva representa a família das parábolas semicúbicas, obtida movendo-se $y^3 + x^2 = 0$ ao longo do eixo dos x. Cada curva tem um ponto de reversão, na interseção com o eixo dos x, e $y = 0$ é o lugar dêsses pontos. Ver a figura abaixo.

Família de parábolas semi-cúbicas $y^3 + (x+C)^2 = 0$

8) Resolver $x^3p^2 + x^2yp + 1 = 0$ e examinar as soluções singulares e as soluções estranhas.

Resolvendo: $y = -\frac{1}{x^2p} - xp$ e derivando em relação a x, temos:

$$(1 - x^3p^2)\left(2p + x\frac{dp}{dx}\right) = 0.$$

De $2p + x\frac{dp}{dx} = 0$, $px^2 = C$ e, eliminando p entre esta equação e a equação diferencial, a primitiva é $C^2 + Cxy + x = 0$.

O discriminante p é $x^3(xy^2 - 4) = 0$, e o discriminante C é $x(xy^2 - 4) = 0$

$xy^2 - 4 = 0$ satisfaz à equação diferencial e é uma solução singular.

$x = 0$ é uma solução particular ($C = 0$). Note que ela aparece três vêzes no discriminante p e uma vez no discriminante C.

9) Examinar as soluções singulares e as soluções estranhas de $p^3x - 2p^2y - 16x^2 = 0$.

Do Problema 4, Capítulo IX, a primitiva é $C^3x^2 - C^2y - 2 = 0$.

O discriminante p é $x^2(2y^3 + 27x^4) = 0$, e o discriminante C é $2y^3 + 27x^4 = 0$.

Como $2y^3 + 27x^4 = 0$ é comum aos discriminantes e satisfaz à equação diferencial, é uma solução singular. Em cada ponto da reta $x = 0$, tangenciam-se duas parábolas da família (para $y \angle 0$, as parábolas são reais). Assim, $x = 0$ é um lugar de pontos de osculação.. $x = 0$ é também uma solução particular.. Algumas vêzes essa solução é denominada solução infinita porque é obtida quando $C \to \infty$. Note-se, porém, que pode ser obtida para $K = 0$ quando se escreve a primitiva sob a forma $x^2 - Ky - 2K^3 = 0$.

PROBLEMAS PROPOSTOS

Determinar as soluções singulares e as soluções estranhas.

10) $y = px - 2p^2$.
Resp.: primitiva, $y = Cx - 2C^2$; solução singular, $x^2 = 8y$.

11) $y^2p^2 + 3xp - y = 0$.
Resp.: prim., $y^3 + 3Cx - C^2 = 0$; s.s., $9x^2 + 4y^3 = 0$.

12) $xp^2 - 2yp + 4x = 0$.
Resp.: prim., $C^2x^2 - Cy + 1 = 0$; s.s., $y^2 - 4x^2 = 0$.

13) $xp^2 - 2yp + x + 2y = 0$.
Resp.: prim., $2x^2 + 2C(x - y) + C^2 = 0$; s.s., $x^2 + 2xy - y^2 = 0$.

14) $(3y - 1)^2p^2 = 4y$.
Resp.: prim., $(x + C)^2 = y(y - 1)^2$; s.s., $y = 0$; lugar dos pontos de osculação, $y = 1/3$; lugar dos pontos nodais, $y = 1$.

15) $y = -xp + x^4p^2$.
Resp.: prim., $xy = C + C^2x$; s.s., $1 + 4x^2y = 0$; logar dos pontos de osculação, $x = 0$.

16) $2y = p^2 + 4xp$.
Resp.: prim., $(4x^3 + 3xy + C)^2 = 2(2x^2 + y)^3$; não tem solução singular; lugar de pontos de reversão, $2x^2 + y = 0$.

17) $y(3 - 4y)^2p^2 = 4(1 - y)$.
Resp.: prim., $(x - C)^2 = y^3(1 - y)$; s.s., $y = 1$; lugar de pontos de reversão, $y = 0$; lugar de pontos de osculação, $y = 3/4$.

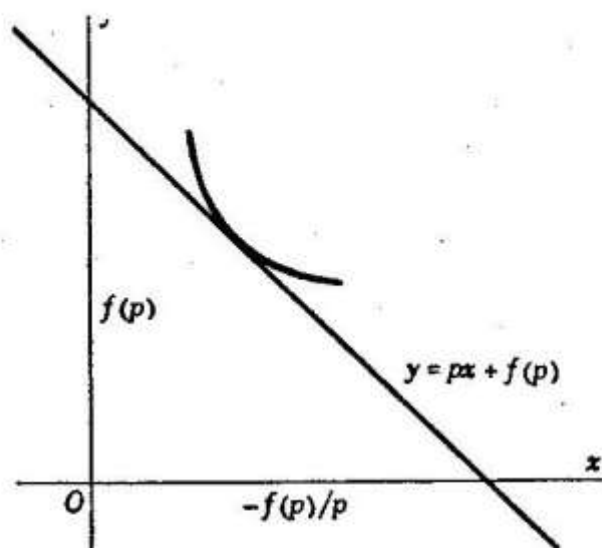
18) $p^3 - 4x^4p + 8x^3y = 0$.
Resp.: prim., $y = Cx^2 - C^3$; s.s., $4x^6 - 27y^2 = 0$; lugar de pontos de osculação, $x = 0$.

19) $(p^2 + 1)(x - y)^2 = (x + yp)^2$.
Sugestão: Use $x = \rho \cos \theta$,
$y = \rho \operatorname{sen} \theta$.
Resp.: prim., $(x - C)^2 + (y - C)^2 = C^2$; s.s., $xy = 0$; lugar de pontos de osculação, $y = x$.

Capítulo XI

APLICAÇÕES DAS EQUAÇÕES DE PRIMEIRA ORDEM E GRAU SUPERIOR

Determinando-se a equação de uma curva possuindo uma dada propriedade, (por exemplo, a inclinação em qualquer ponto é o dôbro da abscissa do ponto), obteve-se no Capítulo VII uma família de curvas ($y = x^2 + C$) possuindo a propriedade determinada. Neste Capítulo, a família de curvas será, freqüentemente, uma família de retas. Nestes casos, a curva que mais interessa é a envoltória da família.

PROBLEMAS RESOLVIDOS

1) Achar a curva em que:

a) a soma dos segmentos determinados sôbre os eixos pela tangente seja igual a k.

b) o produto dos segmentos determinados sôbre os eixos pela tangente seja igual a k.

c) o segmento determinado sôbre a tangente pelos eixos coordenados tenha um comprimento constante k.

Consideremos a equação da tangente

$y = px + f(p)$,

sendo $-f(p)/p$ a interseção com o eixo dos x e $f(p)$ a do eixo dos y.

a) Como $f(p) - f(p)/p = k$, $f(p) = kp/1 - p)$, e a equação da tangente é $y = px - \dfrac{kp}{1-p}$. É uma equação de Clairaut cuja primitiva é a família de retas $y = Cx - \dfrac{kC}{1-C}$ ou $xC^2 - (x + y - k)\,C + y = 0$. A curva procurada é a envoltória da família e sua equação é $(x + y - k)^2 = 4xy$.

ou $x^{1/2} \pm y^{1/2} = k^{1/2}$. Note que esta curva é uma envoltória (solução singular) porque satisfaz à equação diferencial e não pode ser obtida da primitiva pela variação do valor de C.

b) Como $f(p)\,[-f(p)/p] = k$, $f(p) = +\sqrt{-kp}$, a equação da tangente é $y = px \pm \sqrt{-kp}$. É uma equação de Clairaut e sua primitiva é

$$y - Cx = \pm\sqrt{-Ck} \quad \text{ou} \quad x^2C^2 + (k - 2xy)\,C + y^2 = 0.$$

A curva procurada, a envoltória da família, tem a equação $4xy = k$.

c) Como $\left[\left\{f(p)\right\}^2 + \left\{-f(p)/p\right\}^2\right]^{1/2} = k$, $f(p) = \pm kp/\sqrt{1+p^2}$, a equação da tangente é $y = px \pm kp/\sqrt{1+p^2}$. A primitiva desta equação é $y = Cx \pm kC\sqrt{1+C^2}$.

Derivando em relação a C, temos: $0 = x \pm k/(1+C^2)^{3/2}$.

Então,

$x = \pm k/(1+C^2)^{3/2}$, $y = Cx \pm kC/(1+C^2)^{1/2} = \pm kC^3/(1+C^2)^{3/2}$, e a equação da envoltória é

$$x^{2/3} + y^{2/3} = k^{2/3}/(1+C^2) + k^{2/3}C^2/(1+C^2) = k^{2/3}.$$

2) Achar a curva em que:

a) a soma das distâncias dos pontos $(a, 0)$ e $(-a, 0)$ à tangente seja igual a k.

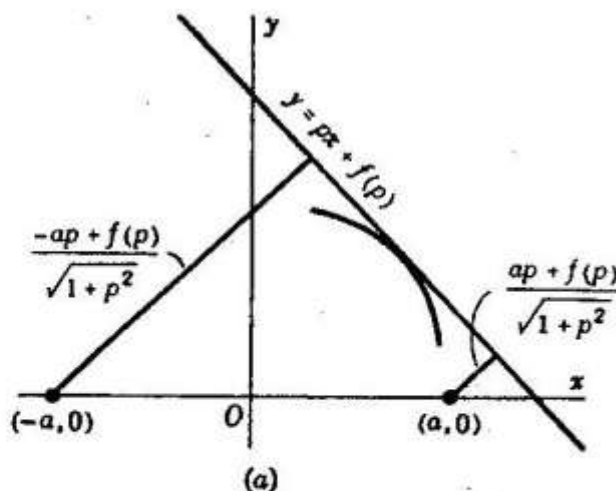
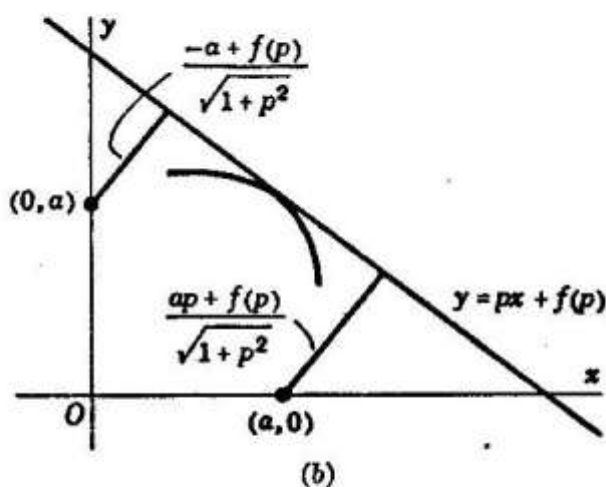
b) a soma das distâncias dos pontos $(a, 0)$ e $(0, a)$ à tangente seja igual a k.

Tomemos $\dfrac{px - y + f(p)}{\sqrt{1+p^2}} = 0$ como a forma normal da equação da tangente.

a) As distâncias dos pontos $(a, 0)$ e $(-a, 0)$ à tangente são

$\dfrac{ap + f(p)}{\sqrt{1+p^2}}$ e $\dfrac{-ap + f(p)}{\sqrt{1+p^2}}$ respectivamente. Então, $\dfrac{2\,f(p)}{\sqrt{1+p^2}} = k$, $f(p) = \frac{1}{2}\,k\sqrt{1+p^2}$ e a

(*a*)

(b)

equação da tangente é $y = px + \frac{1}{2}k\sqrt{1+p^2}$.

A primitiva desta equação de Clairaut é

$y = Cx + \frac{1}{2}k\sqrt{1+C^2}$

ou

$(4x^2 - k^2)\,C^2 - 8xyC + 4y^2 - k^2 = 0.$

A curva procurada, envoltória da família de retas, tem a equação

$x^2 + y^2 = \frac{1}{4}k^2.$

b) As distâncias dos pontos $(a, 0)$ e $(0, a)$ à tangente são $\frac{ap + f(p)}{\sqrt{1+p^2}}$ e $\frac{-a + f(p)}{\sqrt{1+p^2}}$, respectivamente. Então,

$$\frac{-a + ap + 2f(p)}{\sqrt{1+p^2}} = k, \quad f(p) = \frac{1}{2}\left[k\sqrt{1+p^2} - ap + a\right]$$

e a equação da tangente é $y = px + \frac{1}{2}\left[k\sqrt{1+p^2} - ap + a\right]$. A primitiva é $y = Cx + \frac{1}{2}\left[k\sqrt{1+C^2} - aC + a\right]$.

Derivando em relação a C, temos: $0 = x + \frac{1}{2}\left[kC/\sqrt{1+C^2} - a\right]$.

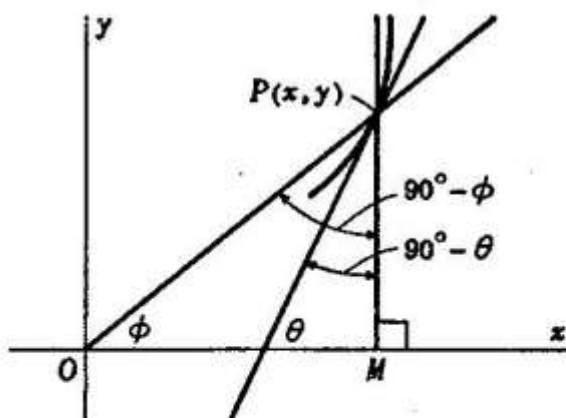
Então $x = -\frac{1}{2}\left[kC/\sqrt{1+C^2} - a\right]$, $y = \frac{1}{2}\left[k/\sqrt{1+C^2} + a\right]$, e a envoltória da família de retas tem a equação $x^2 + y^2 - ax - ay = \frac{1}{4}(k^2 - 2a^2)$.

3) Achar a curva em que a tangente em qualquer ponto P seja bissetriz do ângulo formado pela ordenada de P com a reta que une P à origem.

Seja θ o ângulo de inclinação de uma tangente e ϕ o ângulo de inclinação de OP. Sendo M o pé da ordenada de P, temos:

ângulo $OPM = 90° - \phi = 2(90° - \theta) = 180° - 2\theta$.

$\operatorname{tg}(90° - \phi) = \operatorname{cotg}\phi = \operatorname{tg}(180° - 2\theta) = -\operatorname{tg}2\theta$ e $\operatorname{tg}\phi\,\operatorname{tg}2\theta = -1$.

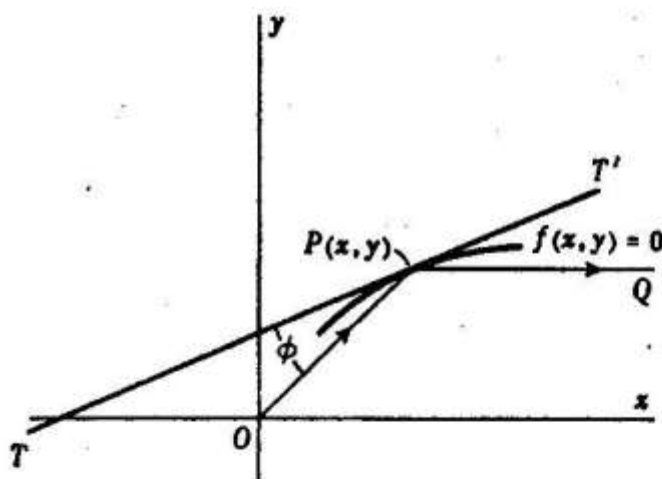
Como $\operatorname{tg}\phi = y/x$ e $\operatorname{tg}\theta = y' = p$, obtemos a equação diferencial da curva

$\dfrac{y}{x} \cdot \dfrac{2p}{1-p^2} = -1$ ou $2y = xp - x/p$. Derivando em relação a x,

$$2p = p - \frac{1}{p} + \left(x + \frac{x}{p^2}\right)\frac{dp}{dx}, \quad p(p^2+1) = x(p^2+1)\frac{dp}{dx} \quad \text{e} \quad x\,dp - p\,dx = 0.$$

Integrando: $\ln p = \ln x + \ln C$ ou $p = Cx$. Com êsse valor de p, a equação diferencial dá a família de parábolas: $C^2x^2 - 2Cy - 1 = 0$.

4) Achar a forma de um refletor de modo que a luz, partindo de uma fonte fixa, seja refletida em raios paralelos.

Admitamos o ponto fixo na origem dos eixos e os raios refletidos paralelos ao eixo dos x. O refletor é, então, uma superfície de revolução, gerada pela rotação da curva $f(x, y) = 0$ ao redor do eixo dos x.

Limitando-nos ao plano xOy, seja $P(x, y)$ um ponto da curva $f(x, y) = 0$, TPT' a tangente em P e PQ o raio refletido. Como o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão, segue-se que: $\angle OPT = \phi = \angle QPT'$.

Agora $p = \dfrac{dy}{dx} = \text{tg} \angle OTP = \text{tg}\,\phi$ e $\text{tg} \angle TOP = \text{tg}(\pi - 2\phi) = -\text{tg}\,2\phi =$

$= \dfrac{-2\,\text{tg}\,\phi}{1 - \text{tg}^2\,\phi} = -\dfrac{y}{x}$; assim, $\dfrac{y}{x} = \dfrac{2p}{1-p^2}$ ou $2x = \dfrac{y}{p} - yp$.

Derivando em relação a y, $\dfrac{2}{p} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{y}{p^2}\dfrac{dp}{dy} - p - y\dfrac{dp}{dy}$ e $\dfrac{dp}{p} = -\dfrac{dy}{y}$.

Então, $p = \dfrac{C}{y}$.

Eliminando p entre esta relação e a equação diferencial original, temos a família de curvas $y^2 = 2Cx + C^2$. Assim, o refletor é um membro da família de parabolóides de revolução $y^2 + z^2 = 2Cx + C^2$.

PROBLEMAS PROPOSTOS

5) Achar a curva em que qualquer tangente forme com os eixos coordenados um triângulo de área constante a^2.

Resp.: $2xy = a^2$

6) Achar a curva em que o produto das distâncias dos pontos $(a, 0)$ e $(-a, 0)$ à tangente seja igual a k.

Resp.: $kx^2 = (k + a^2)(k - y^2)$

7) Achar a curva em que a projeção sôbre o eixo dos y da perpendicular baixada da origem sôbre qualquer tangente seja igual a k.

Resp.: $x^2 = 4k(k - y)$

8) Achar a curva em que a origem seja o ponto meio dos segmentos determinados no eixo dos y pela tangente e pela normal, em qualquer dos seus pontos.

Resp.: $x^2 + 2Cy = C^2$

9) Achar as curvas em que a distância da tangente à origem varie do mesmo modo que a distância da origem ao ponto de contato.

Sugestão: $\dfrac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2 + (d\rho/d\theta)^2}} = k\rho.$ *Resp.:* $\rho = Ce^{\theta \frac{\sqrt{1-k^2}}{k}}$

CAPÍTULO XII

EQUAÇÕES LINEARES DE ORDEM n

Uma equação diferencial linear de ordem n tem a forma

$$(1)\quad P_0\frac{d^ny}{dx^n}+P_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+P_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\cdots\cdots+P_{n-1}\frac{dy}{dx}+P_ny=Q,$$

onde $P_0 \neq 0, P_1, P_2, \cdots\cdots, P_n, Q$ são funções de x ou constantes.

Se $Q = 0$, (1) toma a forma

$$(2)\quad P_0\frac{d^ny}{dx^n}+P_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+P_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\cdots\cdots+P_{n-1}\frac{dy}{dx}+P_ny=0$$

e é denominada *homogênea*, para indicar que todos os têrmos são do mesmo grau (primeiro) em y e suas derivadas.

EXEMPLOS.

A) $x^3\dfrac{d^3y}{dx^3}+2x\dfrac{d^2y}{dx^2}-5\dfrac{dy}{dx}-xy=\operatorname{sen}x$, de ordem 3.

B) $\dfrac{d^2y}{dx^2}-3\dfrac{dy}{dx}+2y=0$, de ordem 2.

A equação *B*) é um exemplo de uma equação linear homogênea.

Soluções. Se $y=y_1(x)$ é uma solução de (2), então $y=C_1y_1(x)$, onde C_1 é uma constante arbitrária, é também uma solução. Se $y=y_1(x)$, $y=y_2(x)$, $y=y_3(x)$, $\cdots\cdots$ são soluções de (2), então $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+C_3y_3(x)+\cdots\cdots$ é também uma solução.

Um conjunto de soluções $y=y_1(x)$, $y=y_2(x)$, $\cdots\cdots$, $y=y_n(x)$ de (2) é denominado *linearmente independente* se a igualdade

$$c_1y_1+c_2y_2+c_3y_3+\cdots\cdots+c_ny_n=0,$$

onde os c são constantes, fôr verdadeira sòmente quando

$$c_1=c_2=c_3=\cdots\cdots=c_n=0.$$

EXEMPLO 1. As funções e^x e e^{-x} são linearmente independentes. Para verificar, formemos $c_1e^x + c_2e^{-x} = 0$, onde c_1 e c_2 são constantes, e derivemos, obtendo: $c_1e^x - c_2e^{-x} = 0$. Resolvendo o sistema formado pelas duas equações, encontramos: $c_1 = c_2 = 0$.

EXEMPLO 2. As funções e^x, $2e^x$, e e^{-x} são linearmente dependentes, porque $c_1e^x + 2c_2e^x + c_3e^{-x} = 0$ quando $c_1 = 2$, $c_2 = -1$, $c_3 = 0$.

Uma condição necessária e suficiente para que o conjunto de n soluções seja linearmente independente é:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & y_3' & \cdots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' & \cdots & y_n'' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & y_3^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Se $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$, ..., $y = y_n(x)$ são n soluções linearmente independentes de (2), então

$$(3) \qquad y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \cdots\cdots + C_ny_n(x)$$

é a primitiva de (2).

Se $y = R(x)$ é uma solução particular, também chamada *integral particular*, de (1), então

$$(4) \qquad y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \cdots\cdots + C_ny_n(x) + R(x)$$

é a primitiva de (1). Note que (3) está contida em (4). Esta parte de (4) é chamada *função complementar*. A primitiva de (1) é a soma da função complementar e da integral particular.

Já chamamos a atenção para o fato de não ser, necessàriamente, a primitiva de uma equação diferencial a solução completa da equação. Entretanto, quando a equação é linear, a primitiva é sua solução completa. Assim, (3) e (4) podem ser chamadas *soluções completas* de (2) e (1), respectivamente.

Equações diferenciais lineares com coeficientes constantes (equação B, acima) serão estudadas nos Capítulos XIII-XVI. As que têm coeficientes variáveis (equação A) serão estudadas nos Capítulos XVII-XIX.

PROBLEMAS RESOLVIDOS

1) Mostrar que a equação $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = 0$ tem duas soluções distintas da forma $y = e^{ax}$.

Se $y = e^{ax}$, para algum valor de a, é uma solução, a equação dada é satisfeita quando se fazem as substituições: $y = e^{ax}$, $\frac{dy}{dx} = ae^{ax}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = a^2e^{ax}$.

Temos: $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = e^{ax}(a^2 - a - 2) = 0$ que é satisfeita quando $a = -1, 2$.

Então $y = e^{-x}$ e $y = e^{2x}$ são soluções.

2) Mostrar que $y = C_1e^{-x} + C_2e^{2x}$ é a primitiva da equação do Probl. 1.

Substituindo y e suas derivadas na equação diferencial, verifica-se prontamente que $y = C_1e^{-x} + C_2e^{2x}$ é uma solução. Para mostrar que é a primitiva, notamos, em primeiro lugar, que o número (2) de constantes arbitrárias e a ordem (2) da equação são iguais e, em segundo lugar, que, sendo

$$W = \begin{vmatrix} e^{-x} & e^{2x} \\ -e^{-x} & 2e^{2x} \end{vmatrix} = 3e^{x} \neq 0, \quad y = e^{-x} \text{ e } y = e^{2x}$$

são linearmente independentes.

3) Mostrar que a equação diferencial $x^3\frac{d^3y}{dx^3} - 6x\frac{dy}{dx} + 12y = 0$ tem 3 soluções linearmente independentes da forma $y = x^r$.

Fazendo as substituições:

$$y = x^r, \quad \frac{dy}{dx} = rx^{r-1}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = r(r-1)x^{r-2}, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = r(r-1)(r-2)x^{r-3}$$

na equação dada, temos $x^r(r^3 - 3r^2 - 4r + 12) = 0$ que é satisfeita quando $r = 2, 3, -2$. As soluções correspondentes $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^{-2}$ são linearmente independentes porque

$$W = \begin{vmatrix} x^2 & x^3 & x^{-2} \\ 2x & 3x^2 & -2x^{-3} \\ 2 & 6x & 6x^{-4} \end{vmatrix} = 20 \neq 0. \text{ A primitiva é } y = C_1x^2 + C_2x^3 + C_3x^{-2}.$$

4) Verificar que $y = -\operatorname{sen} x$ é uma integral particular de $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = \cos x + 3\operatorname{sen} x$ e escrever a primitiva.

Substituindo y e suas derivadas na equação diferencial, verifica-se que a equação é satisfeita. Do Problema 2, a função complementar é $y = C_1e^{-x} + C_2e^{2x}$.

Assim, a primitiva é $y = C_1e^{-x} + C_2e^{2x} - \operatorname{sen} x$.

5) Verificar que $y = \ln x$ é uma integral particular de $x^3 \dfrac{d^3y}{dx^3} - 6x \dfrac{dy}{dx} + 12y = 12 \ln x - 4$ e escrever a primitiva.

Substituindo y e suas derivadas na equação dada, verifica-se que a equação é satisfeita. Do Problema 3, a função complementar é

$$y = C_1x^2 + C_2x^3 + C_3x^{-2}.$$

Assim, a primitiva é $y = C_1x^2 + C_2x^3 + C_3x^{-2} + \ln x$.

6) Mostrar que $\dfrac{d^4y}{dx^4} - \dfrac{d^3y}{dx^3} - 3\dfrac{d^2y}{dx^2} + 5\dfrac{dy}{dx} - 2y = 0$ tem sòmente duas soluções linearmente independentes da forma $y = e^{ax}$.

Substituindo y e suas derivadas na equação dada, temos

$$e^{ax}(a^4 - a^3 - 3a^2 + 5a - 2) = 0$$

que é satisfeita quando $a = 1, 1, 1, -2$.

$$\text{Como} \quad \begin{vmatrix} e^x & e^{-2x} \\ e^x & -2e^{-2x} \end{vmatrix} \neq 0, \text{ e } \begin{vmatrix} e^x & e^x & e^x & e^{-2x} \\ e^x & e^x & e^x & -2e^{-2x} \\ e^x & e^x & e^x & 4e^{-2x} \\ e^x & e^x & e^x & -8e^{-2x} \end{vmatrix} = 0,$$

as soluções linearmente independentes são $y = e^x$ e $y = e^{-2x}$.

7) Verificar que $y = e^x$, $y = xe^x$, $y = x^2e^x$ e $y = e^{-2x}$ são 4 soluções linearmente independentes da equação do Problema 6 e escrever a primitiva.

Pelo Problema 6, $y = e^x$ e $y = e^{-2x}$ são soluções. Por substituição direta na equação dada verifica-se que as outras são soluções.

Como

$$W = \begin{vmatrix} e^x & xe^x & x^2e^x & e^{-2x} \\ e^x & xe^x + e^x & x^2e^x + 2xe^x & -2e^{-2x} \\ e^x & xe^x + 2e^x & x^2e^x + 4xe^x + 2e^x & 4e^{-2x} \\ e^x & xe^x + 3e^x & x^2e^x + 6xe^x + 6e^x & -8e^{-2x} \end{vmatrix} = e^x \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & -8 \end{vmatrix} = -54e^x \neq 0,$$

estas soluções são linearmente independentes e a primitiva é

$$y = C_1e^x + C_2xe^x + C_3x^2e^x + C_4e^{-2x}.$$

8) Verificar que $y = e^{-2x} \cos 3x$ e $y = e^{-2x} \operatorname{sen} 3x$ são soluções de

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 13y = 0$$

e escrever a primitiva.

Substituindo y e suas derivadas, verifica-se que a equação é satisfeita.

Como $W = 3e^{-4x} \neq 0$, as soluções são linearmente independentes.

Assim, a primitiva é $y = e^{-2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \operatorname{sen} 3x)$.

PROBLEMAS PROPOSTOS

9) Mostrar que cada um dos seguintes grupos de funções são linearmente independentes.

a) $\operatorname{sen} ax, \ \cos ax$

b) $e^{ax} \operatorname{sen} bx, \ e^{ax} \cos bx$

c) $1, \ x, \ x^2$

d) $e^{ax}, \ e^{bx}, \ e^{cx} \ (a \neq b \neq c)$

e) $\ln x, \ x \ln x, \ x^2 \ln x$

Formar a equação diferencial tendo a primitiva dada.

10) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x}$ — *Resp.:* $y'' + y' - 6y = 0$

11) $y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + C_3 x^2 e^{2x}$ — *Resp.:* $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$

12) $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} + e^{5x}/12$ — *Resp.:* $y'' - 3y' + 2y = e^{5x}$

13) $y = C_1 \cos 3x + C_2 \operatorname{sen} 3x + \dfrac{(4x \cos x + \operatorname{sen} x)}{32}$ — *Resp.:* $y'' + 9y = x \cos x$

14) $y = C_1 x^2 + C_2 x^2 \ln x$ — *Resp.:* $x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0$

15) $y = C_1 x + C_2 x \ln x + C_3 x \ln^2 x + x^4/9$ — *Resp.:* $x^3 y''' + xy' - y = 3x^4$

16) $y = C_1 \operatorname{sen} x^2 + C_2 \cos x^2$ — *Resp.:* $xy'' - y' + 4x^3 y = 0$

17) $y = \ln \operatorname{sen} (x - C_1) + C_2$ — *Resp.:* $y'' + (y')^2 + 1 = 0$

18) $y^2 = C_1 x + C_2 + 2x^2$ — *Resp.:* $yy'' + (y')^2 = 2$

19) $x = C_1 + C_2 y + y \ln y$ — *Resp.:* $yy'' + (y')^3 = 0$

Capítulo XIII

EQUAÇÕES LINEARES HOMOGÊNEAS COM COEFICIENTES CONSTANTES

A equação linear homogênea com coeficientes constantes tem a forma

$$(1)\quad P_0\frac{d^n y}{dx^n} + P_1\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + P_2\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \cdots\cdots + P_{n-1}\frac{dy}{dx} + P_n y = 0$$

onde $P_0 \neq 0,\ P_1,\ P_2,\ \cdots\cdots,\ P_n$ são constantes.

Trocando a notação $\dfrac{dy}{dx} = Dy,\ \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = D\cdot Dy = D^2y,$

etc., (1) transforma-se em:

$$(2)\quad (P_0D^n + P_1D^{n-1} + P_2D^{n-2} + \cdots\cdots\cdots + P_{n-1}D + P_n)y = 0.$$

$D = \dfrac{d}{dx}$ é um operador que atua sôbre y e

$$(3)\quad P_0D^n + P_1D^{n-1} + P_2D^{n-2} + \cdots\cdots\cdots + P_{n-1}D + P_n$$

é, simplesmente, um operador muito mais complexo. Entretanto, será mais conveniente considerar (3) como um polinômio em D e representá-lo por $F(D)$. Assim (1) pode ser escrito, abreviadamente:

$$(4)\qquad F(D)y = 0.$$

Pode-se mostrar que, em geral, quando (3) é tratado como um polinômio e fatorado como

$$(5)\quad F(D) = P_0(D-m_1)(D-m_2)(D-m_3)\cdots\cdots\cdots(D-m_{n-1})(D-m_n),$$

a expressão

$$(6)\quad F(D)y = P_0(D-m_1)(D-m_2)(D-m_3)\cdots\cdots\cdots(D-m_{n-1})(D-m_n)y = 0$$

ainda é verdadeira, i. e., é equivalente a (1) quando D é considerado como um operador. Tal fato será visto num exemplo.

EXEMPLO. Na notação D,

$$\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = 0$$

torna-se $(D^3 - D^2 - 4D + 4)y = 0$ e, fatorando, $(D-1)(D-2)(D+2)y = 0$.

Daí

$$(D-1)(D-2)(D+2)y = (D-1)(D-2)\left(\frac{d}{dx}+2\right)y = (D-1)(D-2)\left(\frac{dy}{dx}+2y\right)$$

$$= (D-1)\left\{\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}+2y\right) - 2\left(\frac{dy}{dx}+2y\right)\right\} =$$

$$= (D-1)\left(\frac{d^2y}{dx^2} - 4y\right) =$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2} - 4y\right) - 1\left(\frac{d^2y}{dx^2} - 4y\right) =$$

$$= \frac{d^3y}{dx^3} - 4\frac{dy}{dx} - \frac{d^2y}{dx^2} + 4y = \frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = 0.$$

No Problema 1, abaixo, verificar-se-á que a ordem dos fatôres não tem influência.

A equação

$$F(D) = (D - m_1)(D - m_2)(D - m_3) \cdots\cdots (D - m_{n-1})(D - m_n) = 0$$

é algumas vêzes denominada *equação característica* de (1) e as raízes $m_1, m_2, m_3, \ldots\ldots, m_n$ são chamadas *raízes características*. Note-se que não é necessário escrever a equação característica porque suas raízes podem ser determinadas de (6).

Para obter a primitiva de (1) primeiro escrevemos a equação na forma (6).

a) Suponhamos $m_1 \neq m_2 \neq m_3 \neq \cdots\cdots \neq m_{n-1} \neq m_n$. Então

$$y = C_1e^{m_1x} + C_2e^{m_2x} + C_3e^{m_3x} + \cdots\cdots + C_ne^{m_nx},$$

envolvendo n soluções linearmente independentes de (1), com n constantes arbitrárias, é a primitiva.

Assim, no exemplo acima, onde $\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = 0$ ou $(D-1)(D-2)(D+2)y = 0$, as raízes características são 1, 2, -2 e a primitiva é $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + C_3e^{-2x}$.

(Ver também Problemas 5-7).

b) Suponhamos $m_1 = m_2 \neq m_3 \neq \cdots\cdots \neq m_{n-1} \neq m_n$. Então

$$y = C_1e^{m_1x} + C_2xe^{m_1x} + C_3e^{m_3x} + \cdots\cdots + C_ne^{m_nx}$$

é a primitiva.

Em geral, a uma raiz m, de multiplicidade r, corresponde

$$C_1e^{mx} + C_2xe^{mx} + C_3x^2e^{mx} + \cdots\cdots + C_rx^{r-1}e^{mx}$$

na primitiva.

Assim, para resolver $\frac{d^3y}{dx^3} - 2\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 8y = 0$, escrevemos as equações: $(D^3 - 2D^2 - 4D + 8)y = (D-2)^2(D+2)y = 0$. As raízes características são 2, 2, −2 e a primitiva é $y = C_1e^{2x} + C^2xe^{2x} + C_3e^{-2x}$. (Ver também Problemas 8-10).

c) Se os coeficientes de (1) forem reais e se $a + bi$ fôr uma raiz complexa de (6), $a - bi$ também o será. Os têrmos correspondentes na primitiva são

$$Ae^{(a+bi)x} + Be^{(a-bi)x} = e^{ax}(Ae^{bix} + Be^{-bix}) =$$
$$= e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \operatorname{sen} bx) =$$
$$= Pe^{ax} \operatorname{sen}(bx + Q) = Pe^{ax}\cos(bx + R),$$

onde A, B, C_1, C_2, P, Q, R são constantes arbitrárias.

Assim, as raízes características de $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 5y = 0$ ou $(D^2 - 4D + 5)y = 0$ são $2 \pm i$. Daí $a = 2$, $b = 1$ e a primitiva é $y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x)$. (Ver também Problemas 11-15).

PROBLEMAS RESOLVIDOS

1) Mostrar que $(D-a)(D-b)(D-c)y = (D-b)(D-c)(D-a)y$.

$$(D-a)(D-b)(D-c)y = (D-a)(D-b)\left(\frac{dy}{dx} - cy\right) =$$
$$= (D-a)\left[\frac{d^2y}{dx^2} - (b+c)\frac{dy}{dx} + bcy\right] =$$
$$= \frac{d^3y}{dx^3} - (a+b+c)\frac{d^2y}{dx^2} + (ab+bc+ac)\frac{dy}{dx} - abcy.$$

$$(D-b)(D-c)(D-a)y = (D-b)(D-c)\left(\frac{dy}{dx} - ay\right) =$$
$$= (D-b)\left[\frac{d^2y}{dx^2} - (a+c)\frac{dy}{dx} + acy\right] =$$
$$= \frac{d^3y}{dx^3} - (a+b+c)\frac{d^2y}{dx^2} + (ab+ac+bc)\frac{dy}{dx} - abcy.$$

2) Verificar que $y = C_1e^{ax} + C_2e^{bx} + C_3e^{cx}$ satisfaz à equação diferencial $(D-a)(D-b)(D-c)\,y = 0$.

Devemos mostrar que $(D-a)(D-b)(D-c)(C_1e^{ax} + C_2e^{bx} + C_3e^{cx}) = 0$.

$(D-a)(D-b)(D-c)\,C_1e^{ax} = (D-b)(D-c)(D-a)\,C_1e^{ax} = (D-b)(D-c)\,0 = 0$,

e anàlogamente para os outros dois têrmos.

3) Verificar que $y = C_1e^{mx} + C_2xe^{mx} + C_3x^2e^{mx}$ satisfaz à equação diferencial $(D-m)^3y = 0$.

Temos: *a*) $(D-m)^3\,C_1e^{mx} = (D-m)^2\,(D-m)\,C_1e^{mx} = (D-m)^2\,0 = 0$,

b) $(D-m)^3\,C_2xe^{mx} = (D-m)^2\,C_2e^{mx} = (D-m)\,0 = 0$ e

c) $(D-m)^3\,C_3x^2e^{mx} = 2\,(D-m)^2\,C_3xe^{mx} = 2\,(D-m)\,0 = 0$.

4) Achar a primitiva de $(D-m)^2\,y = 0$: (*a*) supondo a solução da forma $y = x^re^{mx}$, e (*b*) resolvendo o par equivalente de equações $(D-m)\,y = v$, $(D-m)v = 0$.

a) $(D-m)^2y = (D-m)(D-m)\,x^re^{mx} = (D-m)\,rx^{r-1}e^{mx} = r(r-1)\,x^{r-2}e^{mx} = 0$ quando $r = 0,\ 1$.

Então, a equação tem duas soluções linearmente independentes: $y = e^{mx}$ e $y = xe^{mx}$. A primitiva é $y = C_1e^{mx} + C_2xe^{mx}$.

b) Fazendo $(D-m)\,y = v$, temos:

$$(D-m)^2y = (D-m)\,(D-m)y = (D-m)v = 0.$$

Resolvendo $(D-m)\,v = 0$, temos $v = C_2e^{mx}$. Como

$$(D-m)\,y = \frac{dy}{dx} - my = C_2\,e^{mx}$$

é linear de primeira ordem, sua solução, pelo método do Capítulo VI, é

$ye^{-mx} = \int e^{-mx}\,(C_2e^{mx})\,dx = C_1 + C_2x$ ou $y = C_1e^{mx} + C_2xe^{mx}$.

RAÍZES REAIS DISTINTAS

5) Resolver $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} - 6y = 0$.

Escrevemos a equação: $(D^2 + D - 6)\,y = (D-2)(D+3)\,y = 0$.

As raízes características são $2, -3$ e a primitiva é $y = C_1e^{2x} + C_2{}^{-3x}$.

6) Resolver $\dfrac{d^3y}{dx^3} - \dfrac{d^2y}{dx^2} - 12\dfrac{dy}{dx} = 0$.

Podemos escrever $(D^3 - D^2 - 12D)\,y = 0$ ou $D\,(D-4)(D+3)\,y = 0$.

As raízes características são $0, 4, -3$ e a primitiva é

$$y = C_1 + C_2e^{4x} + C_3e^{-3x}.$$

7) Resolver $\frac{d^3y}{dx^3} + 2\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} - 6y = 0.$

Temos $(D^3 + 2D^2 - 5D - 6)\,y$ ou $(D-2)(D+1)(D+3)\,y = 0.$

As raízes características são $2, -1, -3$ e a primitiva é

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{-x} + C_3e^{-3x}.$$

RAÍZES REPETIDAS

8) Resolver $(D^3 - 3D^2 + 3D - 1)\,y = 0$ ou $(D-1)^3\,y = 0.$

As raízes características são $1, 1, 1$ e a primitiva é

$$y = C_1e^x + C_2xe^x + C_3x^2e^x.$$

9) Resolver $(D^4+6D^3+5D^2-24D-36)\,y = 0$ ou $(D-2)(D+2)(D+3)^2\,y = 0.$

As raízes características são $2, -2, -3, -3$. A primitiva é

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + C_3e^{-3x} + C_4xe^{-3x}.$$

10) Resolver $(D^4 - D^3 - 9D^2 - 11D - 4)\,y = 0$ ou $(D+1)^3(D-4)\,y = 0.$

As raízes características são $-1, -1, -1, 4$. A primitiva é

$$y = e^{-x}(C_1 + C_2x + C_3x^2) + C_4e^{4x}.$$

RAÍZES COMPLEXAS

11) Resolver $(D^2 - 2D + 10)\,y = 0.$

As raízes características são $1 \pm 3i$ e a primitiva é

$$y = e^x(C_1\cos 3x + C_2\,\mathrm{sen}\,3x) \text{ ou } C_3e^x\,\mathrm{sen}\,(3x + C_4) \text{ ou } C_3e^x\cos(3x + C^5).$$

12) Resolver $(D^3 + 4D)\,y = 0$ ou $D(D^2+4)\,y = 0.$

As raízes características são $0, \pm 2i$ e a primitiva é

$$y = C_1 + C_2\cos 2x + C_3\,\mathrm{sen}\,2x.$$

13) Resolver $(D^4+D^3+2D^2-D+3)\,y = 0$ ou $(D^2+2D+3)(D^2-D+1)\,y = 0.$

As raízes características são $-1 \pm i\sqrt{2},\ \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i\sqrt{3}$ e a primitiva é

$$y = e^{-x}(C_1\cos\sqrt{2}x + C_2\,\mathrm{sen}\,\sqrt{2}x) + e^{\frac{1}{2}x}(C_3\cos\tfrac{1}{2}\sqrt{3}x + C_4\,\mathrm{sen}\,\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,x).$$

14) Resolver $(D^4 + 5D^2 - 36)\,y = 0$ ou $(D^2 - 4)(D^2 + 9)\,y = 0$.

As raízes características são ± 2, $\pm 3i$ e a primitiva é

$$y = Ae^{2x} + Be^{-2x} + C_3 \cos 3x + C_4 \operatorname{sen} 3x =$$
$$= C_1 \cosh 2x + C_2 \operatorname{senh} 2x + C_3 \cos 3x + C_4 \operatorname{sen} 3x$$

porque $\cosh 2x = \frac{1}{2}(e^{2x} + e^{-2x})$ e $\operatorname{senh} 2x = \frac{1}{2}(e^{2x} - e^{-2x})$.

15) Resolver $(D^2 - 2D + 5)^2\,y = 0$.

As raízes características são $1 \pm 2i$, $1 \pm 2i$ e a primitiva é

$$y = e^x (C_1 \cos 2x + C_2 \operatorname{sen} 2x) + xe^x (C_3 \cos 2x + C_4 \operatorname{sen} 2x) =$$
$$= e^x \left\{ (C_1 + C_3 x) \cos 2x + (C_2 + C_4 x) \operatorname{sen} 2x \right\}.$$

PROBLEMAS PROPOSTOS

Resolver

16) $(D^2 + 2D - 15)\,y = 0$ — *Resp.:* $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-5x}$

17) $(D^3 + D^2 - 2D)\,y = 0$ — *Resp.:* $y = C_1 + C_2 e^{x} + C_3 e^{-2x}$

18) $(D^2 + 6D + 9)\,y = 0$ — *Resp.:* $y = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x}$

19) $(D^4 - 6D^3 + 12D^2 - 8D)\,y = 0$ — *Resp.:* $y = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 x e^{2x} + C_4 x^2 e^{2x}$

20) $(D^2 - 4D + 13)\,y = 0$ — *Resp.:* $y = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \operatorname{sen} 3x)$

21) $(D^2 + 25)\,y = 0$ — *Resp.:* $y = C_1 \cos 5x + C_2 \operatorname{sen} 5x$

22) $(D^3 - D^2 + 9D - 9)\,y = 0$ — *Resp.:* $y = C_1 e^{x} + C_2 \cos 3x + C_3 \operatorname{sen} 3x$

23) $(D^4 + 4D^2)\,y = 0$ — *Resp.:* $y = C_1 + C_2 x + C_3 \cos 2x + C_4 \operatorname{sen} 2x$

24) $(D^4 - 6D^3 + 13D^2 - 12D + 4)\,y = 0$

Resp.: $y = (C_1 + C_2 x)e^{x} + (C_3 + C_4 x)e^{2x}$

25) $(D^6 + 9D^4 + 24D^2 + 16)\,y = 0$

Resp.: $y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x + (C_3 + C_4 x) \cos 2x + (C_5 + C_6 x) \operatorname{sen} 2x$

CAPÍTULO XIV

EQUAÇÕES LINEARES COM COEFICIENTES CONSTANTES

A primitiva de

(1) $F(D)y = (P_0D^n + P_1D^{n-1} + \cdots\cdots + P_{n-1}D + P_n)y = Q(x)$, onde $P_0 \neq 0$, P_1, P_2, $\cdots\cdots$, P_n são constantes e $Q \equiv Q(x) \neq 0$, é a soma da função complementar [primitiva de $F(D)y = 0$ obtida no capítulo anterior] com qualquer integral particular de (1). (Ver Capítulo XII).

Algumas vêzes a integral particular pode ser obtida por simples inspeção. Por exemplo: $y = \frac{1}{2} x$ é uma integral particular de $(D^3 - 3D^2 + 2)y = x$, porque $D^3y = D^2y = 0$. Tais equações, porém, ocorrem raramente. Apresentaremos neste capítulo dois processos gerais para obtenção de uma integral particular. Outros processos serão vistos nos dois capítulos seguintes.

Nos processos abaixo, usaremos um operador $\frac{1}{F(D)}$ definido pela relação $\frac{1}{F(D)} \cdot F(D)y = y$. Aplicando o operador a (1) temos

$$\frac{1}{F(D)} \cdot F(D)y = y = \frac{1}{F(D)} Q$$

ou

$$(2) \qquad y = \frac{1}{D-m_1} \cdot \frac{1}{D-m_2} \cdot \frac{1}{D-m_3} \cdots\cdots\cdots\cdots \frac{1}{D-m_n} Q.$$

Primeiro Método. Consiste na solução de uma sucessão de equações diferenciais de primeira ordem, como se segue:

FAZER	RESOLVER	PARA OBTER
$u = \frac{1}{D-m_n} Q$	$\frac{du}{dx} - m_n u = Q$	$u = e^{m_n x} \int Q e^{-m_n x}\, dx$
$v = \frac{1}{D-m_{n-1}} u$	$\frac{dv}{dx} - m_{n-1} v = u$	$v = e^{m_{n-1} x} \int u e^{-m_{n-1} x}\, dx$
....	....	....
....	....	....
$y = \frac{1}{D-m_1} w$	$\frac{dy}{dx} - m_1 y = w$	$y = e^{m_1 x} \int w e^{-m_1 x}\, dx.$

Como se vê no Problema 3, abaixo, pode-se estabelecer a seguinte fórmula:

$$A) \quad y = e^{m_1 x} \int e^{(m_2 - m_1)x} \int e^{(m_3 - m_2)x} \int \cdots\cdots \int e^{m_n - m_{n-1}} \int Q e^{m_n x} \, (dx)^n.$$

(Ver Problemas 1-6).

Segundo Método. Consiste em exprimir $\frac{1}{F(D)}$ como a soma de n frações parciais: $\frac{N_1}{D - m_1} \frac{N_2}{D - m_2} + \cdots\cdots + \frac{N_n}{D - m_n}$.

Então:

$$B) \quad y = N_1 e^{m_1 x} \int Q e^{-m_1 x} \, dx + N_2 e^{m_2 x} \int Q e^{-m_2 x} \, dx + \cdots + $$
$$+ N_n e^{m_n x} \int Q e^{-m_n x} \, dx.$$

(Ver Problemas 4-5).

Ao calcular $A)$ e $B)$ é costume desprezar as constantes de integração; de outro modo obter-se-ia a primitiva em lugar da integral particular da equação diferencial. A função complementar é determinada por inspeção e adicionada à solução particular para formar a primitiva.

As seguintes fórmulas serão úteis:

$e^{ibx} = \cos bx + i \operatorname{sen} bx$ $\qquad$ $e^{-ibx} = \cos bx - i \operatorname{sen} bx$

$\operatorname{sen} bx = \dfrac{e^{ibx} - e^{-ibx}}{2i}$ $\qquad$ $\cos bx = \dfrac{e^{ibx} + e^{-ibx}}{2}$

$e^{bx} = \cosh bx + \operatorname{senh} bx$ $\qquad$ $e^{-bx} = \cosh bx - \operatorname{senh} bx$

$\operatorname{senh} bx = \frac{1}{2} (e^{bx} - e^{-bx})$ $\qquad$ $\cosh bx = \frac{1}{2} (e^{bx} + e^{-bx})$

PROBLEMAS RESOLVIDOS

1) Resolver $(D_2 - 3D + 2) y = e^x$ ou $(D - 1)(D - 2) y = e^x$.

A função complementar é $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$ e a integral particular é $y = \frac{1}{D-1} \cdot \frac{1}{D-2} e^x$.

Façamos $u = \frac{1}{D-2} e^x$. Daí

$$(D - 2) u = e^x \quad \text{ou} \quad \frac{du}{dx} - 2u = e^x,$$

$$ue^{-2x} = \int e^x e^{-2x} \, dx = \int e^{-x} \, dx = -e^{-x}, \quad \text{e} \quad u = -e^x.$$

Agora $y = \frac{1}{D-1}u$, $(D-1)\,y = u$ ou $\frac{dy}{dx} - y = -e^{-x}$

e
$$y = e^x \int -e^x\, e^{-x}\, dx = -xe^x.$$

A primitiva é $y = C_1e^x + C_2e^{2x} - xe^x$.

2) Resolver $(D^3 + 3D^2 - 4)\,y = xe^{-2x}$ ou $(D-1)(D+2)^2\,y = xe^{-2x}$.

A função complementar é $y = C_1e^x + C_2e^{-2x} + C_3xe^{-2x}$ e a integral particular é $y = \frac{1}{D-1}\cdot\frac{1}{D+2}\cdot\frac{1}{D+2}xe^{-2x}$.

Façamos $u = \frac{1}{D+2}xe^{-2x}$.

Daí $\frac{du}{dx} + 2u = xe^{-2x}$ e $u = e^{-2x}\int xe^{-2x}\,.\,e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}x^2e^{-2x}$.

Façamos $v = \frac{1}{D+2}u$.

Daí $\frac{dv}{dx} + 2v = \frac{1}{2}x^2e^{-2x}$ e $v = e^{-2x}\int \frac{1}{2}x^2e^{-2x}\cdot e^{2x}\,dx = \frac{1}{6}x^3e^{-2x}$.

Agora $y = \frac{1}{D-1}\ v$. Então

$$\frac{dy}{dx} - y = \frac{1}{6}x^3e^{-2x} \text{ e } y = e^x\int \frac{1}{6}x^3e^{-2x}.e^{-x}\,dx = \frac{1}{6}e^x\int x^3e^{-3x}\,dx =$$
$$= -\frac{1}{18}e^{-2x}\left(x^3 + x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{2}{9}\right).$$

A primitiva é $y = C_1e^x + C_2e^{-2x} + C_3xe^{-2x} - \frac{1}{18}(x^3 + x^2)\,e^{-2x}$, sendo os têrmos restantes da integral particular absorvidos pela função complementar.

3) Achar a integral particular de $(D-a)(D-b)\,y = Q$.

Uma integral particular é dada por $y = \frac{1}{D-a}\cdot\frac{1}{D-b}Q$.

Seja $\frac{1}{D-b}Q = u$. Daí $\frac{du}{dx} - bu = Q$ e $u = e^{bx}\int Qe^{-bx}\,dx$.

Agora $y = \frac{1}{D-a}u$. Então $\frac{dy}{dx} - ay = u = e^{bx}\int Qe^{-bx}\,dx$ e

$$y = e^{ax}\int e^{bx}\,e^{-ax}\int Qe^{-bx}\,dx\,dx = e^{ax}\int e^{(b-a)x}\int Qe^{-bx}(dx)^2.$$

4) Resolver $(D^2 - 3D + 2)\,y = e^{5x}$ ou $(D-1)(D-2)\,y = e^{5x}$.

A função complementar é $y = C_1e^x + C_2e^{2x}$ e a integral particular é $y = \frac{1}{D-1} \cdot \frac{1}{D-2}\,e^{5x}$.

Primeiro Método.

$$y = \frac{1}{D-1} \cdot \frac{1}{D-2}\,e^{5x} = e^x \int e^{(2-1)x} \int e^{5x} \cdot e^{-2x}\,(dx)^2 =$$

$$= e^x \int e^x \int e^{3x}\,(dx)^2 = e^x \int e^x \frac{1}{3}\,e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}\,e^x \int e^{4x}\,dx = \frac{1}{12}\,e^{5x}.$$

Segundo Método.

$$y = \frac{1}{(D-1)(D-2)}\,e^{5x} = \left(-\frac{1}{D-1} + \frac{1}{D-2}\right) e^{5x} =$$

$$= -e^x \int e^{5x} \cdot e^{-x}\,dx + e^{2x} \int e^{5x} \cdot e^{-2x}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{4}\,e^x e^{4x} + \frac{1}{3}\,e^{2x} e^{3x} = \frac{1}{12}\,e^{5x}.$$

A primitiva é $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + \frac{1}{12}\,e^{5x}$.

5) Resolver $(D^2 + 5D + 4)\,y = 3 - 2x$ ou $(D+1)(D+4)\,y = 3 - 2x$.

A função complementar é $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-4x}$ e a integral particular é

$$y = \frac{1}{(D+1)(D+4)}\,(3 - 2x).$$

Primeiro Método.

$$y = \frac{1}{D+1} \cdot \frac{1}{D+4}\,(3-2x) = e^{-x} \int e^{(-4+1)\,x} \int (3-2x)\,e^{4x}\,(dx)^2 =$$

$$= e^{-x} \int e^{-3x} \left(\frac{3}{4}\,e^{4x} - \frac{1}{2}\,xe^{4x} + \frac{1}{8}\,e^{4x}\right) dx = e^{-x} \int \left(\frac{7}{8}\,e^x - \frac{1}{2}\,xe^x\right) dx =$$

$$= e^{-x} \left(\frac{7}{8}\,e^x - \frac{1}{2}\,xe^x + \frac{1}{2}\,e^x\right) = \frac{11}{8} - \frac{1}{2}\,x.$$

Segundo Método.

$$y = \frac{1}{D+1} \cdot \frac{1}{D+4}\,(3-2x) = \left(\frac{1/3}{D+1} - \frac{1/3}{D+4}\right)(3-2x) =$$

$$= \frac{1}{3}\,e^{-x} \int (3-2x)\,e^x\,dx - \frac{1}{3}\,e^{-4x} \int (3-2x)\,e^{4x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\,e^{-x}\,(3e^x - 2xe^x + 2e^x) - \frac{1}{3}\,e^{-4x} \left(\frac{3}{4}\,e^{4x} - \frac{1}{2}\,xe^{4x} + \frac{1}{8}\,e^{4x}\right) = \frac{11}{8} - \frac{1}{2}\,x.$$

A primitiva é $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-4x} - \frac{1}{2}\,x + \frac{11}{8}$.

6) Resolver $(D^3 - 5D^2 + 8D - 4)\,y = e^{2x}$ ou $(D-1)(D-2)^2\,y = e^{2x}$.

A função complementar é $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 x e^{2x}$, e uma integral particular é

$$y = \frac{1}{(D-1)(D-2)^2}\,e^{2x}.$$

$$\begin{aligned}
y &= \frac{1}{D-1}\cdot\frac{1}{D-2}\cdot\frac{1}{D-2}\,e^{2x} \\
&= e^x \int e^{(2-1)\,x} \int e^{(2-2)\,x} \int e^{2x}\,e^{-2x}\,(dx)^3 = \\
&= e^x \int e^x \int\int (dx)^3 = e^x \int e^x \int x\,(dx)^2 = e^x \int e^x \tfrac{1}{2}\,x^2\,dx = \\
&= \tfrac{1}{2}\,e^x \int x^2 e^x\,dx = \tfrac{1}{2}\,e^x\,(x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x) = \tfrac{1}{2}\,e^{2x}\,(x^2 - 2x + 2).
\end{aligned}$$

A primitiva é $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 x e^{2x} + \frac{1}{2}\,x^2 e^{2x}$, sendo os têrmos restantes da integral particular absorvidos pela função complementar.

7) Resolver $(D^2 + 9)\,y = x\cos x$.

A função complementar é $y = C_1 \cos 3x + C^2 \operatorname{sen} 3x$ e uma integral particular é

$$y = \frac{1}{D^2+9}\,x\cos x = e^{-3ix} \int e^{(3i+3i)\,x} \int x \cos x\, e^{-3ix}\,(dx)^2.$$

É mais simples aqui empregar $\cos x = \frac{1}{2}\,(e^{ix} + e^{-xi})$, de modo que:

$$\begin{aligned}
y &= \tfrac{1}{2}\,e^{-3ix} \int e^{6ix} \int x\,(e^{-2ix} + e^{-4xi})\,(dx)^2 \\
&= \frac{1}{2}\,e^{-3xi} \int e^{6ix} \left(\frac{1}{2}\,ixe^{-2ix} + \frac{1}{4}\,e^{-2ix} + \frac{1}{4}\,ixe^{-4ix} + \frac{1}{16}\,e^{-4ix}\right) dx = \\
&= \frac{1}{2}\,e^{-3ix} \int \left(\frac{1}{2}\,ixe^{4ix} + \frac{1}{4}\,e^{4ix} + \frac{1}{4}\,ixe^{2ix} + \frac{1}{16}\,e^{2ix}\right) dx = \\
&= \frac{1}{2}\,e^{-3ix}\left(\frac{1}{8}\,xe^{4ix} + \frac{1}{32}\,ie^{4ix} - \frac{1}{16}\,ie^{4ix} + \frac{1}{8}\,xe^{2ix} + \frac{1}{16}\,ie^{2ix} - \frac{1}{32}\,ie^{2ix}\right) = \\
&= \frac{1}{16}\,x\,(e^{ix} + e^{-ix}) - \frac{1}{64}\,i\,(e^{ix} - e^{-ix}) = \frac{1}{8}\,x\left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right) + \frac{1}{32}\left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right) = \\
&= \frac{1}{8}\,x\cos x + \frac{1}{32}\operatorname{sen} x.
\end{aligned}$$

A primitiva é $y = C_1 \cos 3x + C_2 \operatorname{sen} 3x + \dfrac{1}{8}\,x\cos x + \dfrac{1}{32}\operatorname{sen} x$.

8) Resolver $(D^2 + 4)\,y = 2\cos x \cos 3x = \cos 2x + \cos 4x$.

A função complementar é $y = C_1 \cos 2x + C_2 \operatorname{sen} 2x$ e uma integral particular é

$$\begin{aligned}
y &= \frac{1}{D^2+4}\,(\cos 2x + \cos 4x) = \frac{1}{4}\,i\left(\frac{1}{D+2i} - \frac{1}{D-2i}\right)(\cos 2x + \cos 4x) = \\
&= \tfrac{1}{4}\,i\,\left\{e^{-2ix} \int (\cos 2x + \cos 4x)\,e^{2ix}\,dx - e^{2ix} \int (\cos 2x + \cos 4x)\,e^{-2ix}\,dx\right\} =
\end{aligned}$$

$$= \tfrac{1}{4}\, i \left\{ e^{-2ix} \int e^{2ix} \left[\tfrac{1}{2} (e^{2ix} + e^{-2ix}) + \tfrac{1}{2} (e^{4ix} + e^{-4ix}) \right] dx + \right.$$

$$\left. - e^{2ix} \int e^{-2ix} \left[\tfrac{1}{2} (e^{2ix} + e^{-2ix}) + \tfrac{1}{2} (e^{4ix} + e^{-4ix}) \right] dx \right\} =$$

$$= \frac{1}{8} \left\{ e^{-2ix} \int (e^{4ix} + 1 + e^{6ix} + e^{-2ix})\, i\, dx + \right.$$

$$\left. - e^{2ix} \int (1 + e^{-4ix} + e^{2ix} + e^{-6ix})\, i\, dx \right\} =$$

$$= \frac{1}{8} \left\{ e^{-2ix} \left(\frac{1}{4} e^{4ix} + ix + \frac{1}{6} e^{6ix} - \frac{1}{2} e^{-2ix} \right) + \right.$$

$$\left. - e^{2ix} (ix - \frac{1}{4} e^{-4ix} + \frac{1}{2} e^{2ix} - \frac{1}{6} e^{-6ix}) \right\} =$$

$$= \frac{1}{8} \left\{ - ix (e^{2ix} - e^{-2ix}) + \frac{1}{4} (e^{2ix} + e^{-2ix}) - \frac{1}{3} (e^{4ix} + e^{-4ix}) \right\} =$$

$$= \frac{1}{4} x \left(\frac{e^{2ix} - e^{-2ix}}{2i} \right) + \frac{1}{16} \left(\frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2} \right) - \frac{1}{12} \left(\frac{e^{4ix} + e^{-4ix}}{2} \right) =$$

$$= \frac{1}{4} x \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{16} \cos 2x - \frac{1}{12} \cos 4x.$$

A primitiva é $y = C_1 \cos 2x + C_2 \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{4} x \operatorname{sen} 2x - \frac{1}{12} \cos 4x.$

9) Resolver $(D^2 - 9D + 18)\, y = e^{e^{-3x}}$.

A função complementar é $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{6x}$ e uma integral particular é

$$y = \frac{1}{(D-6)(D-3)}\, e^{e^{-3x}} = e^{6x} \int e^{-3x} \int e^{e^{-3x}} \cdot e^{-3x} (dx)^2 =$$

$$= e^{6x} \int e^{-3x} \left(-\frac{1}{3} e^{e^{-3x}}\right) dx = \frac{1}{3} e^{6x} \int e^{e^{-3x}} (-e^{-3x})' dx = \frac{1}{9} e^{e^{-3x}} \cdot e^{6x}.$$

A solução é $y = C_1 e^{3x} + (C_2 + \frac{1}{9} e^{e^{-3x}})\, e^{6x}.$

Nota. Trocando-se os fatôres, uma integral particular é

$$y = e^{3x} \int e^{3x} \int e^{e^{-3x}} \cdot e^{-6x} (dx)^2.$$

Fazendo: $e^{-3x} = v$, tem-se

$$y = \frac{1}{9v} \int \frac{1}{v^2} \int e^v v\, (dv)^2 = \frac{1}{9v} \int e^v \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v^2} \right) dv = \frac{1}{9v_2}\, e^v$$

ou $y = \frac{1}{9} e^{e^{-3x}} \cdot e^{6x}$, como antes.

PROBLEMAS PROPOSTOS

10) Calcular, desprezando as constantes arbitrárias.

a) $\frac{1}{D+1}e^x$ *Resp.:* $\frac{1}{2}e^x$

b) $\frac{1}{D-1}e^x$ *Resp.:* xe^x

c) $\frac{1}{D+1}(x+1)$ *Resp.:* x

d) $\frac{1}{D+1}(x^2+1)$ *Resp.:* x^2-2x+3

e) $\frac{1}{D+2}\text{sen } 3x$ *Resp.:* $\frac{1}{13}(2 \text{ sen } 3x - 3 \cos 3x)$

f) $\frac{1}{D+2}e^{-2x}\text{sen } 3x$ *Resp.:* $-\frac{1}{3}e^{-2x}\cos 3x$

Resolver:

11) $(D^2-4D+3)y = 1$ *Resp.:* $y = C_1e^x + C_2e^{3x} + 1/3$

12) $(D^2-4D)y = 5$ *Resp.:* $y = C_1 + C_2e^{4x} - 5x/4$

13) $(D^3-4D^2)y = 5$ *Resp.:* $y = C_1 + C_2x + C_3e^{4x} - 5x^2/8$

14) $(D^5-4D^3)y = 5$ *Resp.:* $y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4e^{2x} + C_5e^{-2x} - 5x^3/24$

15) $(D^3-4D)y = x$ *Resp.:* $y = C_1 + C_2e^{2x} + C_3e^{-2x} - x^2/8$

16) $(D^2-6D+9)y = e^{2x}$ *Resp.:* $y = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x} + e^{2x}$

17) $(D^2+D-2)y = 2(1+x-x^2)$ *Resp.:* $y = C_1e^x + C_2e^{-2x} + x^2$

18) $(D^2-1)y = 4xe^x$ *Resp.:* $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + e^x(x^2 -$

19) $(D^2-1)y = \text{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ *Resp.:* $y = C_1e^x + C_2e^{-x} - \frac{1}{2} + \frac{1}{10}\cos 2x$

20) $(D^2-1)y = (1+e^{-x})^{-2}$ *Resp.:* $y = C_1e^x + C_2e^{-x} - 1 + e^{-x}\ln(1+e$

21) $(D^2+1)y \text{ cosec } x$ *Resp.:* $y = C_1\cos x + C_2 \text{ sen } x + \text{sen } x \ln \text{sen } x - x\cos x$

22) $(D^2-3D+2)y = \text{sen } e^{-x}$ *Resp.:* $y = C_1e^x + C_2e^{2x} - e^{2x}\text{sen } e^{-x}$

CAPÍTULO XV

EQUAÇÕES LINEARES COM COEFICIENTES CONSTANTES

Variação de Parâmetros, Coeficientes Indeterminados

Dois outros métodos para determinar uma integral particular de uma equação diferencial linear com coeficientes constantes

(1) $F(D)y = (D^n + P_1D^{n-1} + P_2D^{n-2} + \cdots\cdots + P_{n-1}D + P_n)y = Q$

serão apresentados por meio de exemplos.

Variação de Parâmetros. Da função complementar de (1),

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \cdots\cdots + C_ny_n(x),$$

tiramos a relação básica

(2) $y = L_1(x)y_1(x) + L_2(x)y_2(x) + \cdots\cdots + L_n(x)y_n(x)$

substituindo os C por funções desconhecidas de x, os L. O método consiste em um processo para se determinar os L de modo que (2) satisfaça (1). (Ver Problemas 1-4).

Coeficientes Indeterminados. A relação básica é

(3) $y = A\,r_1(x) + B\,r_2(x) + C\,r_3(x) + \cdots\cdots + G\,r_t(x),$

onde as funções $r_1(x), \cdots\cdots, r_t(x)$ são os têrmos de Q e os que aparecem por derivação dos mesmos, sendo $A, B, C, \cdots, G$ constantes

Por exemplo, se a equação fôr $F(D)y = x^3$, tomaremos para (3)

$$y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D\,;$$

se a equação fôr $f(D)y = e^x + e^{3x}$, tomaremos para (3)

$$y = Ae^x + Be^{3x},$$

porque não se obtém nenhum têrmo pela derivação de e^x e e^{3x}; se a equação fôr $F(D)y = \operatorname{sen} ax$, tomaremos para (3)

$$y = A \operatorname{sen} ax + B \cos ax\,;$$

se a equação fôr $F(D)y = \sec x$, o método falha porque o número de têrmos obtidos pela derivação de $Q = \sec x$ é infinito.

Entrando com (3) em (1), os coeficientes A, B, C, ... podem ser determinados pela identidade resultante. (Ver Problemas 5-6).

O processo deve ser modificado quando:

a) Um têrmo de Q é também um têrmo da função complementar. Se um têrmo de Q, digamos u, fôr também um têrmo da função complementar, correspondente a uma raiz m de multiplicidade s, introduziremos em (3) um têrmo $x^s u$ e mais os têrmos que aparecerem da derivação dêste.

Por exemplo, para determinar a integral particular de

$$(D-2)^2(D+3)y = e^{2x} + x^2,$$

a relação básica é

$$y = Ax^2e^{2x} + Bxe^{2x} + Ce^{2x} + Dx^2 + Ex + F,$$

os três primeiros têrmos resultando do fato de ser o têrmo e^2x de Q, um têrmo da função complementar, correspondente a uma raiz dupla, $m = 2$; assim, empregamos x^2e^{2x} e todos os têrmos resultantes da derivação dêste último.

b) Um têrmo de Q é $x^r u$ e u é um têrmo da função complementar. Se u corresponder a uma raiz m de multiplicidade s, (3) conterá o têrmo $x^{r+s}u$ e todos os resultantes de sua derivação.

Por exemplo, para achar uma integral particular de

$$(D-2)^3(D+3)y = x^2e^{2x} + x^2,$$

a relação básica é

$$y = Ax^5e^{2x}+Bx^4e^{2x}+Cx^3e^{2x}+Dx^2e^{2x}+Exe^{2x}+Fe^{2x}+Gx^2+Hx+J,$$

os primeiros seis têrmos resultando do fato de ser e^{2x} uma parte da função complementar correspondente à raiz tripla $m = 2$. (Ver Problema 9).

PROBLEMAS RESOLVIDOS

VARIAÇÃO DE PARÂMETROS

1) Mostre que sendo $y = C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3$ a função complementar de

$$F(D)\,y = (D^3 + P_1D^2 + P_2D + P_3)\,y = Q$$

tem-se

$$y = L_1y_1 + L_2y_2 + L_3y_3, \tag{1}$$

como uma solução particular da equação diferencial, onde L_1, L_2, L_3 satisfaz à condição

$$\text{A)}\quad \begin{aligned} L_1'y_1 + L_2'y_2 + L_3'y_3 &= 0 \\ L_1'y_1' + L_2'y_2' + L_3'y_3' &= 0 \\ L_1'y_1'' + L_2'y_2'' + L_3'y_3'' &= Q, \end{aligned}$$

De A), por derivação sucessiva, tem-se $y = L_1y_1 + L_2y_2 + L_3y_3$:

$$Dy = L_1y_1' + L_2y_2' + L_3y_3' + (L_1'y_1 + L_2'y_2 + L_3'y_3) = \\ = L_1y_1' + L_2y_2' + L_3y_3'$$

B) $$D^2y = L_1y_1'' + L_2y_2'' + L_3y_3'' + (L_1'y_1' + L_2'y_2' + L_3'y_3') = \\ = L_1y_1'' + L_2y_2'' + L_3y_3''$$

$$D^3y = L_1y_1''' + L_2y_2''' + L_3y_3''' + (L_1'y_1'' + L_2'y_2'' + L_3'y_3'') = \\ = L_1y_1''' + L_2y_2''' + L_3y_3''' + Q.$$

Então

$$F(D)\,y = L_1\{y_1''' + P_1y_1'' + P_2y_1' + P_3y_1\} + L_2\{y_2''' + P_1y_2'' + P_2y_2' + P_3y_2\} + \\ + L_3\{y_3''' + P_1y_3'' + P_2y_3' + P_3y_3\} + Q =$$

$$= L_1F(D)\,y_1 + L_2F(D)\,y_2 + L_3F(D)\,y_3 + Q = 0 + 0 + 0 + Q = Q,$$

porque y_1, y_2, y_3 são soluções de $F(D)\,y = 0$.

Para empregar êste método:

a) Escrever a função complementar.

b) Formar a função L, (1), que será uma integral particular, substituindo os C da função complementar por L.

c) Determinar as equações B) derivando (1) um número de vêzes igual ao grau da equação diferencial. Depois de cada derivação, igualar a soma dos têrmos contendo derivadas dos L, a zero, exceto na última derivação, em que se iguala a Q. As equações assim obtidas formam o grupo A) de equações.

d) Resolvendo essas equações, determinar L_1', L_2', ...

e) Obter L_1, L_2, ..., por integração.

2) Resolver $(D^2 - 2D)\,y = e^x \operatorname{sen} x$.

A função complementar é $y = C_1 + C_2e^{2x}$.

Formamos a relação

$$y = L_1 + L_2e^{2x},$$

obtendo, por derivação,

$$Dy = 2L_2e^{2x} + (L_1' + L_2'e^{2x}),$$

e fazendo

$$(1) \qquad L_1' + L_2'e^{2x} = 0.$$

Agora $Dy = 2L_2e^{2x}$, $D^2y = 4L_2e^{2x} + 2L_2'e^{2x}$ e daí $2L_2'e^{2x} = Q = e^x \operatorname{sen} x$.

Então, $L_2' = \frac{1}{2}\,e^{-x} \operatorname{sen} x$ e $L_2 = -\frac{1}{4}\,e^{-x}(\operatorname{sen} x + \cos x)$.

De (1), $L_1' = -L_2'e^{2x} = -\frac{1}{2}\,e^x \operatorname{sen} x$ e $L_1 = -\frac{1}{4}\,e^x\,(\operatorname{sen} x - \cos x)$.

Uma integral particular da equação dada é

$y = L_1 + L_2e^{2x} = -\frac{1}{4}e^x(\text{sen}\,x - \cos x) - \frac{1}{4}e^x(\text{sen}\,x + \cos x) = -\frac{1}{2}e^x\,\text{sen}\,x$

e a primitiva é $y = C_1 + C_2e^{2x} - \frac{1}{2}e^x\,\text{sen}\,x$.

3) Resolver $(D^3 + D)\,y = \text{cosec}\,x$.

A função complementar é $y = C_1 + C_2\cos x + C_3\,\text{sen}\,x$.

Da relação

$$y = L_1 + L_2\cos x + L_3\,\text{sen}\,x$$

temos

$$Dy = (-L_2\,\text{sen}\,x + L_3\cos x) + (L_1' + L_2'\cos x + L_3'\,\text{sen}\,x)$$

e daí

(1) $$L_1' + L_2'\cos x + L_3'\,\text{sen}\,x = 0.$$

Então

$$Dy = -L_2\,\text{sen}\,x + L_3\cos x,$$
$$D^2y = (-L_2\cos x - L_3\,\text{sen}\,x) + (-L_2'\,\text{sen}\,x + L_3'\cos x).$$

Temos

(2) $$-L_2'\,\text{sen}\,x + L_3'\cos x = 0.$$

Então

$$D^2y = -L_2\cos x - L_3\,\text{sen}\,x,$$
$$D^3y = (L_2\,\text{sen}\,x - L_3\cos x) + (-L_2'\cos x - L_3'\,\text{sen}\,x).$$

Temos

(3) $$-L_2'\cos x - L_3'\,\text{sen}\,x = Q = \text{cosec}\,x.$$

Somando (1) e (3), $L_1' = \text{cosec}\,x$ e $L_1 = -\ln(\text{cosec}\,x + \text{cotg}\,x)$.

Resolvendo (2) e (3), $L_3' = -1$ e $L_2' = -\text{cotg}\,x$, temos: $L_3 = -x$ e $L_2 = -\ln\,\text{sen}\,x$.

Então, uma integral particular da equação diferencial é

$y = L_1 + L_2\cos x + L_3\,\text{sen}\,x = -\ln(\text{cosec}\,x + \text{cotg}\,x) - \cos x\ln\,\text{sen}\,x - x\,\text{sen}\,x$

e a primitiva é

$y = C_1 + C_2\cos x + C_3\,\text{sen}\,x - \ln(\text{cosec}\,x + \text{cotg}\,x) - \cos x\ln\,\text{sen}\,x - x\,\text{sen}\,x.$

4) Resolver $(D^2 - 6D + 9)\,y = e^{3x}/x^2$.

A função complementar é $y = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x}$.

Da relação

$$y = L_1e^{3x} + L_2xe^{3x}$$

temos

$$Dy = (3L_1 + L_2)\,e^{3x} + 3L_2xe^{3x} + (L_1'e^{3x} + L_2'xe^{3x}).$$

Daí

$$L_1'e^{3x} + L_2'xe^{3x} = 0. \tag{1}$$

Então

$$D^2y = (9L_1 + 6L_2)\,e^{3x} + 9L_2xe^{3x} + (3L_1' + L_2')\,e^{3x} + 3L_2'xe^{3x},$$

e daí

$$(3L_1' + L_1')\,e^{3x} + 3L_2'\,xe^{3x} = e^{3x}/x^2. \tag{2}$$

Resolvendo (1) e (2), $L_1' = -1/x$ e $L_2' = 1/x^2$, temos: $L_1 = -\ln x$ e $L_2 = -1/x$.

Então, uma integral particular da equação diferencial é

$$y = L_1e^{3x} + L_2xe^{3x} = -e^{3x}\ln x - e^{3x},$$

e a primitiva é $y = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x} - e^{3x}\ln x$.

COEFICIENTES INDETERMINADOS

5) Resolver $(D^2 - 2D)\,y = e^x \operatorname{sen} x$.

A função complementar é $y = C_1 + C_2e^x$.

Como uma integral particular, tomamos $y = Ae^x \operatorname{sen} x + Be^x \cos x$.

Então

$$Dy = (A - B)\,e^x \operatorname{sen} x + (A + B)\,e^x \cos x,$$

$$D^2y = -2Be^x \operatorname{sen} x + 2Ae^x \cos x,$$

e $$(D^2 - 2D)\,y = -2Ae^x \operatorname{sen} x - 2Be^x \cos x = e^x \operatorname{sen} x = Q.$$

Igualando os coeficientes correspondentes $-2A = 1$ e $-2B = 0$, vem: $A = -\frac{1}{2}$ e $B = 0$.

Assim, uma integral particular da equação diferencial é

$$y = Ae^x \operatorname{sen} x + Be^x \cos x = -\tfrac{1}{2}\,e^x \operatorname{sen} x,$$

e a primitiva é $y = C_1 + C_2e^{2x} - \frac{1}{2}\,e^x \operatorname{sen} x$.

Esta primitiva foi obtida como no Problema 2, acima.

6) Resolver $(D^2 - 2D + 3)\,y = x^3 + \operatorname{sen} x$.

A função complementar é $y = e^x(C_1 \cos \sqrt{2}\,x + C_2 \operatorname{sen} \sqrt{2}\,x)$.

Como uma integral particular tomamos

$$y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + E + F \operatorname{sen} x + G \cos x.$$

Então

$$Dy = 3Ax^2 + 2Bx + C - G \operatorname{sen} x + F \cos x,$$
$$D^2y = 6Ax + 2B - F \operatorname{sen} x - G \cos x,$$

e $(D^2 - 2D+3)\, y = 3Ax^3+3(B-2A)x^2+(3C-4B+6A)x+(3E-2C+2B)+$
$+ 2(F+G) \operatorname{sen} x + 2(G-F)\cos x = x^3 + \operatorname{sen} x$

Igualando os coeficientes correspondentes: $3A=1$ e $A=1/3$; $B-2A=0$ e $B = 2/3$; $3C-4B+6A=0$ e $C=2/9$; $3E-2C+2B=0$ e $E=-8/27$; $2(F+G)=1$, $G-F=0$ e $F=G=\frac{1}{4}$.

Então, uma integral particular da equação diferencial é

$$y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{9}x - \frac{8}{27} + \frac{1}{4}(\operatorname{sen} x + \cos x)$$

e a primitiva é

$$y = e^x (C_1 \cos \sqrt{2}\,x + C_2 \operatorname{sen} \sqrt{2}\,x) + \frac{1}{27}(9x^3 + 18x^2 + 6x - 8) + $$
$$+ \frac{1}{4}(\operatorname{sen} x + \cos x).$$

7) Resolver $(D^3 + 2D^2 - D - 2)\, y = e^x + x^2$.

A função complementar é $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3e^{-2x}$. Como e^x aparece em Q e na função complementar, correspondendo a uma raiz de multiplicidade um, tomaremos como integral particular:

(1) $$y = Ax^2 + Bx + C + Exe^x + Fe^x$$

Então

$$Dy = 2Ax + B + Exe^x + (E+F)e^x,$$
$$D^2y = 2A + Exe^x + (2E+F)\,e^x,$$
$$D^3y = Exe^x + (3E+F)\,e^x,$$

e $(D^3+2D^2-D-2)y = -2Ax^2-2(B+A)x+(4A-B-2C)+6Ee^x = e^x+x^2$.

Igualando os coeficientes correspondentes, $-2A=1$, $B+A=0$, $4A-B-2C=0$, $6E=1$; assim, $A=-\frac{1}{2}$, $B=\frac{1}{2}$, $C=-\frac{5}{4}$, $E=\frac{1}{6}$, e F é arbitrário. F é arbitrário aqui porque C_1e^x é um têrmo da função complementar. Então, ao escrever (1), a inclusão de Fe^x foi desnecessária.

Uma integral particular é $y = -\dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{5}{4} + \dfrac{1}{6}xe^x$ e a primitiva é $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3e^{-2x} - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{5}{4} + \dfrac{1}{6}xe^x$.

8) Resolver $(D^2 - 4D + 4)\, y = x^3e^{2x} + xe^{2x}$.

A função complementar é $y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}$. e^{2x} é uma parte de Q e aparece, também, na função complementar, correspondendo a uma raiz de multiplicidade dois. Como uma integral particular, tomamos:

$$y = Ax^5e^{2x} + Bx^4e^{2x} + Cx^3e^{2x} + Ex^2e^{2x}.$$

Note que os têrmos encerrando xe^{2x} e e^{2x} não foram incluídos, porque aparecem na função complementar com coeficientes arbitrários. Então:

$$Dy = 2Ax^5e^{2x} + (5A + 2B)\,x^4e^{2x} + (4B + 2C)\,x^3e^{2x} + \\ + (3C + 2E)\,x^2e^{2x} + 2Exe^{2x},$$

$$D^2y = 4Ax^5e^{2x} + (20A+4B)\,x^4e^{2x} + (20A + 16B + 4C)\,x^3e^{2x} + \\ + (12B+12C+4E)\,x^2e^{2x} + (6C+8E)\,xe^{2x} + 2Ee^{2x}$$

e $(D^2-4D+4)\,y = 20Ax^3e^{2x} + 12Bx^2e^{2x} + 6Cxe^{2x} + 2Ee^{2x} = x^3e^{2x} + xe^{2x}$.

Igualando os coeficientes correspondentes: $20A = 1$, $12B = 0$, $6C = 1$, $2E = 0$; assim: $A = 1/20$, $B = 0$, $C = 1/6$, $E = 0$.

Uma integral particular é

$$y = \frac{1}{20}x^5e^{2x} + \frac{1}{6}x^3e^{2x},$$

e a primitiva é

$$y = C_1e^{2x} + C_2xe^{x} + \frac{1}{20}x^5e^{2x} + \frac{1}{6}x^3e^{2x}.$$

9) Resolver $(D^2 + 4)\,y = x^2 \operatorname{sen} 2x$.

A função complementar é $y = C_1 \cos 2x + C_2 \operatorname{sen} 2x$.

Como $x^2 \operatorname{sen} 2x$ aparece em Q e $2x$ é uma parte da função complementar correspondente a uma raiz de multiplicidade um, tomamos como integral particular

$$y = Ax^3 \cos 2x + Bx^3 \operatorname{sen} 2x + Cx^2 \cos 2x + Ex^2 \operatorname{sen} 2x + Fx \cos 2x + Gx \operatorname{sen} 2x.$$

Note que $H \cos 2x + K \operatorname{sen} 2x$ não foram incluídos, porque êstes têrmos estão na função complementar. Então:

$$Dy = 2Bx^3 \cos 2x - 2Ax^3 \operatorname{sen} 2x + (3A + 2E)\,x^2 \cos 2x + \\ + (3B - 2C)\,x^2 \operatorname{sen} 2x + (2C + 2G)\,x \cos 2x + \\ + (2E - 2F)\,x \operatorname{sen} 2x + F \cos 2x + G \operatorname{sen} 2x,$$

$$D^2y = -4Ax^3 \cos 2x - 4Bx^3 \operatorname{sen} 2x + (12B - 4C)\,x^2 \cos 2x + \\ + (-12A - 4E)\,x^2 \operatorname{sen} 2x + (6A + 8E - 4F)\,x \cos 2x + \\ + (6B - 8C - 4G)\,x \operatorname{sen} 2x + (2C + 4G) \cos 2x + (2E - 4F) \operatorname{sen} 2x$$

e $$(D^2+4)\,y = 12Bx^2 \cos 2x - 12Ax^2 \operatorname{sen} 2x + (6A + 8E)\,x \cos 2x + \\ + (6B - 8C)\,x \operatorname{sen} 2x + (2C + 4G) \cos 2x + (2E - 4F) \operatorname{sen} 2x = \\ = x^2 \operatorname{sen} 2x.$$

Igualando os coeficientes correspondentes, $-12A = 1$, $12B = 0$, $6A + 8E = 0$, $6B - 8C = 0$, $2C + 4G = 0$, $2E - 4F = 0$; assim, $= -1/12$, $B = 0$, $C = 0$, $E = 1/16$, $F = 1/32$, $G = 0$.

Uma integral particular é

$$y = -\frac{1}{12}x^3 \cos 2x + \frac{1}{16}x^2 \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{32}x \cos 2x$$

e a primitiva é

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \operatorname{sen} 2x - \frac{1}{12}x^3 \cos 2x + \frac{1}{16}x^2 \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{32}x \cos 2x.$$

PROBLEMAS PROPOSTOS

Resolver, empregando o método de variação de parâmetros:

10) $(D^2 + 1)y = \operatorname{cosec} x$

Resp.: $y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x \ln \operatorname{sen} x - x \cos x$

11) $(D^2 + 4)y = 4 \sec^2 2x$

Resp.: $y = C_1 \cos 2x + C_2 \operatorname{sen} 2x - 1 + \operatorname{sen} 2x \ln (\sec 2x + \operatorname{tg} 2x)$

12) $(D^2 - 4D + 3)y = (1 + e^{-x})^{-1}$

Resp.: $y = C_1 e^x + C_2 e^{3x} + \frac{1}{2} e^{2x} + \frac{1}{2} (e^x - e^{3x}) \ln (1 + e^{-x})$

13) $(D^2 - 1)y = e^{-x} \operatorname{sen} e^{-x} + \cos e^{-x}$

Resp.: $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - e^x \operatorname{sen} e^{-x}$

14) $(D^2 - 1)y = (1 + e^{-x})^{-2}$

Resp.: $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - 1 + e^{-x} \ln (1 + e^x)$

Resolver, empregando o método dos coeficientes indeterminados:

15) $(D^2 + 2)y = e^x + 2$

Resp.: $y = C_1 \cos \sqrt{2}\, x + C_2 \operatorname{sen} \sqrt{2}\, x + e^x/3 + 1$

16) $(D^2 - 1)y = e^x \operatorname{sen} 2x$

$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - e^x (\operatorname{sen} 2x + \cos 2x)/8$

17) $(D^2 + 2D + 2)y = x^2 + \operatorname{sen} x$

Resp.: $y = e^{-x} (C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x) + \frac{1}{2} (x-1)^2 + \frac{1}{5} (\operatorname{sen} x - 2 \cos x)$

18) $(D^2 - 9)y = x + e^{2x} - \operatorname{sen} 2x$

Resp.: $y = C_1 e^{3x} + C^2 e^{-3x} - x/9 - e^{2x}/5 + \frac{1}{13} \operatorname{sen} 2x$

19) $(D^3 + 3D^2 + 2D)y = x^2 + 4x + 8$ (Usar $Ax^3 + Bx^2 + Cx$).

Resp.: $y = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{-2x} + \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{4} x^2 + \frac{11}{4} x$

20) $(D^2 + 1)y = -2 \operatorname{sen} x + 4x \cos x$

Resp.: $y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x + 2x \cos x + x^2 \operatorname{sen} x$

21) $(D^3 - D^2 - 4D + 4)y = 2x^2 - 4x - 1 + 2x^2 e^{2x} + 5x e^{2x} + e^{2x}$

Resp.: $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-2x} + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 e^{2x}$

CAPÍTULO XVI

EQUAÇÕES LINEARES COM COEFICIENTES CONSTANTES

Métodos Abreviados

Uma integral particular de uma equação diferencial linear $F(D)y = Q$ com coeficientes constantes é dada por $y = \frac{1}{F(D)} Q$. Para certas formas de Q, o trabalho necessário para o cálculo dêste símbolo pode ser bastante reduzido, do seguinte modo:

a) Q é da forma e^{ax},

$$y = \frac{1}{F(D)} e^{ax} = \frac{1}{F(a)} e^{ax}, \qquad F(a) \neq 0.$$

(Ver Probl. 2-3 quando $F(a) \neq 0$, e Probl. 4-5 quando $F(a) = 0$).

b) Q é da forma $\operatorname{sen}(ax + b)$ ou $\cos(ax + b)$,

$$y = \frac{1}{F(D^2)} \operatorname{sen}(ax + b) = \frac{1}{F(-a^2)} \operatorname{sen}(ax + b), \qquad F(-a^2) \neq 0,$$

$$y = \frac{1}{F(D^2)} \cos(ax + b) = \frac{1}{F(-a^2)} \cos(ax + b), \qquad F(-a^2) \neq 0.$$

(Ver Probl. 7-11 quando $F(-a^2) \neq 0$ e Probl. 12 quando $F(-a^2) = 0$).

c) Q é da forma x^m,

$$y = \frac{1}{F(D)} x^m = (a_0 + a_1 D + a_2 D^2 + \cdots\cdots + a_m D^m) x^m, \qquad a_0 \neq 0,$$

obtido pelo desenvolvimento de $\frac{1}{F(D)}$ em potências crescentes de D e desprezando todos os têrmos além de D^m, porque $D^n x^m = 0$ quando $n > m$. (Ver Problemas 13-15).

d) Q é da forma $e^{ax}V(x)$,

$$y = \frac{1}{F(D)} e^{ax} V = e^{ax} \frac{1}{F(D+a)} V.$$

(Ver Problemas 17-20).

e) Q é da forma $xV(x)$,

$$y = \frac{1}{F(D)} xV = x \frac{1}{F(D)} V - \frac{F'(D)}{\{F(D)\}^2} V.$$

(Ver Problemas 21-23).

PROBLEMAS RESOLVIDOS

1) Estabelecer a regra da letra *a*), acima.

Quando $y = e^{ax}$, $Dy = ae^{ax}$, $D^2y = a^2e^{ax}$, ..., $D^re^{ax} = a^re^{ax}$
$F(D)e^{ax} = \sum_r P_r D^r e^{ax} = \sum_r P_r a^r e^{ax} = F(a)e^{ax}$. Assim, $\frac{1}{F(D)} e^{ax} = \frac{1}{F(a)} e^{ax}$.

2) Resolver $(D^3 - 2D^2 - 5D + 6)y = e^{4x}$ ou $(D-1)(D-3)(D+2)y = e^{4x}$.

A função complementar é $y = C_1e^x + C_2e^{3x} + C_3e^{-2x}$.

Uma integral particular é

$$y = \frac{1}{(D-1)(D-3)(D+2)} e^{4x} =$$

$$= \frac{1}{(4-1)(4-3)(4+2)} e^{4x} = \frac{1}{3 \cdot 1 \cdot 6} e^{4x} = \frac{1}{18} e^{4x}.$$

Assim, a primitiva é $y = C_1e^x + C_2e^{3x} + C_3e^{-2x} + \frac{1}{18}e^{4x}$.

3) Resolver $(D^3 - 2D^2 - 5D + 6)y = (e^{2x} + 3)^2$.

A função complementar é, do Problema 2, $y = C_1e^x + C_2e^{3x} + C_3e^{-2x}$.

Uma integral particular é

$$y = \frac{1}{(D-1)(D-3)(D+2)} (e^{2x} + 3)^2 =$$

$$= \frac{1}{(D-1)(D-3)(D+2)} e^{4x} + \frac{6}{(D-1)(D-3)(D+2)} e^{2x} + \frac{9}{(D-1)(D-3)(D+2)} e^{0x} =$$

$$= \frac{1}{3(1)6} e^{4x} + \frac{6}{1(-1)4} e^{2x} + \frac{9}{(-1)(-3)2} = \frac{e^{4x}}{18} - \frac{3e^{2x}}{2} + \frac{3}{2}.$$

A primitiva é $y = C_1e^x + C_2e^{3x} + C_3e^{-2x} + \frac{e^{4x}}{18} - \frac{3e^{2x}}{2} + \frac{3}{2}$.

4) **Resolver** $(D^3 - 2D^2 - 5D + 6)\,y = e^{3x}$.

A função complementar é $y = C_1e^x + C_2e^{3x} + C_3e^{2x}$.

Uma integral particular é $y = \dfrac{1}{(D-1)(D-3)(D+2)}\,e^{3x}$.

Aqui $F(a) = F(3) = 0$, e o método abreviado não se aplica.

Entretanto, podemos escrever:

$$y = \frac{1}{(D-1)(D-3)(D+2)}\,e^{3x} = \frac{1}{D-3}\left(\frac{1}{(D-1)(D+2)}\,e^{3x}\right) =$$

$$= \frac{1}{D-3}\left(\frac{1}{2\cdot 5}\,e^{3x}\right) = \frac{1}{10}\,\frac{1}{D-3}\,e^{3x} =$$

$$= \frac{1}{10}\,e^{3x}\int e^{3x}e^{-3x}\,dx = \frac{1}{10}\,e^{3x}\int dx = \frac{1}{10}\,xe^{3x}.$$

A primitiva é $y = C_1e^x + C_2e^{3x} + C_3e^{-2x} + xe^{3x}/10$.

5) **Resolver** $(D^3 - 5D^2 + 8D - 4)\,y = e^{2x} + 2e^x + 3e^{-x}$.

A função complementar é $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + C_3xe^{2x}$ e uma integral particular é

$$y = \frac{1}{(D-1)(D-2)^2}\,e^{2x} + \frac{2}{(D-1)(D-2)^2}\,e^x + \frac{3}{(D-1)(D-2)^2}\,e^{-x}$$

$$= \frac{1}{(D-2)^2}\left(\frac{1}{D-1}\,e^{2x}\right) + \frac{2}{D-1}\left(\frac{1}{(D-2)^2}\,e^x\right) + \frac{3}{(D-1)(D-2)^2}\,e^{-x} =$$

$$= \frac{1}{(D-2)^2}\,e^{2x} + \frac{2}{D-1}\,e^x + \frac{3}{(-2)(-3)^2}\,e^{-x} =$$

$$= e^{2x}\int\!\!\int (dx)^2 + 2e^x\int dx - \frac{1}{6}\,e^{-x} = \frac{1}{2}\,x^2e^{2x} + 2xe^x - \frac{1}{6}\,e^{-x}.$$

A primitiva é $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + C_3xe^{2x} + \dfrac{1}{2}\,x^2e^{2x} + 2xe^x - \dfrac{1}{6}\,e^{-x}$.

6) **Estabelecer a regra da letra** $b)$ **acima, para** $\cos(ax + b)$.

Quando $y = \cos(ax+b)$, $D^2y = -a^2\cos(ax+b)$, $D^4y = (-a^2)^2\cos(ax+b)$, ..., $D^{2r}y = (-a^2)^r\cos(ax+b)$, então

$$F(D^2)\cos(ax+b) = \sum_r P_rD^{2r}\cos(ax+b) = \sum_r P_r(-a^2)^r\cos(ax+b) =$$

$$= F(-a^2)\cos(ax+b).$$

Assim:
$$\frac{1}{F(D^2)}\cos(ax+b) = \frac{1}{F(-a^2)}\cos(ax+b).$$

7) Resolver $(D^2 + 4)\,y = \operatorname{sen} 3x$.

A função complementar é $y = C_1 \cos 2x + C_2 \operatorname{sen} 2x$ e uma solução particular é

$$y = \frac{1}{D^2 + 4} \operatorname{sen} 3x = \frac{1}{-(3)^2 + 4} \operatorname{sen} 3x = -\frac{1}{5} \operatorname{sen} 3x.$$

A primitiva é $y = C_1 \cos 2x + C_2 \operatorname{sen} 2x - \frac{1}{5} \operatorname{sen} 3x$.

8) Resolver $(D^4 + 10D^2 + 9)\,y = \cos(2x + 3)$.

A função complementar é $y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x + C_3 \cos 3x + C_4 \operatorname{sen} 3x$ e uma integral particular é

$$y = \frac{1}{(D^2+1)(D^2+9)} \cos(2x + 3) = \frac{1}{(-3)(5)} \cos(2x + 3) = -\frac{1}{15} \cos(2x + 3).$$

A primitiva é $y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x + C_3 \cos 3x + C^4 \operatorname{sen} 3x - \frac{1}{15} \cos(2x+3)$.

9) Resolver $(D^2 + 3D - 4)\,y = \operatorname{sen} 2x$.

A função complementar é $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-4x}$ e uma integral particular é

$$y = \frac{1}{D^2 + 3D - 4} \operatorname{sen} 2x = \frac{1}{(D-1)(D+4)} \operatorname{sen} 2x.$$

O operador não é da forma $\frac{1}{F(D^2)}$ e o método abreviado não se aplica. Entretanto, podemos utilizar qualquer um dos processos seguintes, a fim de abreviar o trabalho:

a) $$y = \frac{1}{(D-1)(D+4)} \operatorname{sen} 2x = \frac{(D+1)(D-4)}{(D^2-1)(D^2-16)} \operatorname{sen} 2x = \frac{1}{100}(D^2 - 3D - 4) \operatorname{sen} 2x =$$

$$= \frac{1}{100}(-4 \operatorname{sen} 2x - 6 \cos 2x - 4 \operatorname{sen} 2x) = -\frac{1}{50}(4 \operatorname{sen} 2x + 3 \cos 2x).$$

b) $$y = \frac{1}{D^2 + 3D - 4} \operatorname{sen} 2x = \frac{1}{(-4) + 3D - 4} \operatorname{sen} 2x = \frac{1}{3D - 8} \operatorname{sen} 2x = \frac{3D + 8}{9D^2 - 64} \operatorname{sen} 2x =$$

$$= -\frac{1}{100}(3D + 8) \operatorname{sen} 2x = -\frac{1}{100}(6 \cos 2x + 8 \operatorname{sen} 2x) = -\frac{1}{50}(4 \operatorname{sen} 2x + 3 \cos 2x).$$

A primitiva é $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-4x} - \frac{1}{50}(4 \operatorname{sen} 2x + 3 \cos 2x)$.

10) Resolver $(D^3 + D^2 + D + 1)\,y = \operatorname{sen} 2x + \cos 3x$.

A função complementar é $y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x + C_3 e^{-x}$ e uma integral particular é:

$$y = \frac{1}{(D^2+1)(D+1)}(\text{sen } 2x + \cos 3x) =$$

$$= \frac{1}{(D^2+1)(D+1)}\text{sen } 2x + \frac{1}{(D^2+1)(D+1)}\cos 3x =$$

$$= -\frac{1}{3}\,\frac{1}{D+1}\,\text{sen } 2x - \frac{1}{8}\,\frac{1}{D+1}\cos 3x = -\frac{1}{3}\,\frac{D-1}{D^2-1}\,\text{sen } 2x - \frac{1}{8}\,\frac{D-1}{D^2-1}\cos 3x =$$

$$= \frac{1}{15}(D-1)\,\text{sen } 2x + \frac{1}{80}(D-1)\cos 3x =$$

$$= \frac{1}{15}(2\cos 2x - \text{sen } 2x) - \frac{1}{80}(3\,\text{sen } 3x + \cos 3x).$$

A primitiva é

$$y = C_1 \cos x + C_2\,\text{sen } x + C_3 e^{-x} + \frac{1}{15}(2\cos 2x - \text{sen } 2x) - \frac{1}{80}(3\,\text{sen } 3x + \cos 3x).$$

11) Resolver $(D^2 - D + 1)\,y = \text{sen } 2x$.

A função complementar é $y = e^{\frac{1}{2}x}\left(C_1 \cos \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,x + C_2\,\text{sen } \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,x\right)$ e uma integral particular é:

$$y = \frac{1}{D^2-D+1}\,\text{sen } 2x = \frac{1}{(-4)-D+1}\,\text{sen } 2x = -\frac{1}{D+3}\,\text{sen } 2x = -\frac{D-3}{D^2-9}\,\text{sen } 2x =$$

$$= \frac{1}{13}(D-3)\,\text{sen } 2x = \frac{1}{13}(2\cos 2x - 3\,\text{sen } 2x).$$

A primitiva é

$$y = e^{\frac{1}{2}x}\left(C_1 \cos \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,x + C_2\,\text{sen } \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,x\right) + \frac{1}{13}(2\cos 2x - 3\,\text{sen } 2x).$$

12) Resolver $(D^2 + 4)\,y = \cos 2x + \cos 4x$.

A função complementar é $y = C_1 \cos 2x + C_2\,\text{sen } 2x$ e uma integral particular é:

$$y = \frac{1}{D^2+4}(\cos 2x + \cos 4x) = \frac{1}{D^2+4}\cos 2x + \frac{1}{D^2+4}\cos 4x.$$

O método dêste capítulo não pode ser usado para calcular $\frac{1}{D^2+4}\cos 2x$ porque, quando D^2 fôr substituído por -4, $D^2 + 4 = 0$. Entretanto, podemos operar do seguinte modo:

$$\frac{1}{D^2+4}\cos(2+h)x = \frac{1}{-(2+h)^2+4}\cos(2+h)x = -\frac{1}{4h+h^2}\cos(2+h)x =$$

$$= -\frac{1}{h(4+h)}\left[\cos 2x - hx\,\text{sen } 2x - \tfrac{1}{2}(hx)^2 \,\text{cis } 2x + \cdots\cdots\cdots\right]$$

pelo teorema de Taylor. O primeiro têrmo, $\cos 2x$, é parte da função complementar e não precisa ser considerado. Assim, uma integral particular é

$$\frac{1}{D^2+4}\cos(2+h)x = \frac{1}{h(4+h)}\left[hx\,\text{sen } 2x + \tfrac{1}{2}(hx)^2\cos 2x - \cdots\cdots\cdots\right] =$$

$$= \frac{1}{4+h}\left(x\,\text{sen } 2x + \tfrac{1}{2}hx^2\cos 2x - \cdots\cdots\cdots\right).$$

Fazendo $h \to 0$, temos $\frac{1}{D^2+4}\cos 2x = \frac{1}{4}x \operatorname{sen} 2x$.

Como $\frac{1}{D^2+4}\cos 4x = -\frac{1}{12}\cos 4x$, a primitiva é

$$y = C_1\cos 2x + C_2 \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{4}x \operatorname{sen} 2x - \frac{1}{12}\cos 4x.$$

(Compare esta solução com a que foi dada no Problema 8, Capítulo XIV).

13) Resolver $(2D^2+2D+3)\,y = x^2+2x-1$.

A função complementar é $y = e^{-\frac{1}{2}x}(C_1\cos\frac{1}{2}\sqrt{5}\,x + C_2 \operatorname{sen}\frac{1}{2}\sqrt{5}\,x)$ e uma integral particular é:

$$y = \frac{1}{2D^2+2D+3}(x^2+2x-1) = \left(\frac{1}{3}-\frac{2}{9}D-\frac{2}{27}D^2\right)(x^2+2x-1) =$$

$$= \frac{1}{3}(x^2+2x-1) - \frac{2}{9}(2x+2) - \frac{2}{27}(2) = \frac{1}{3}x^2+\frac{2}{9}x-\frac{25}{27}.$$

NOTA:

$$\frac{1}{2D^2+2D+3} = \left(\frac{1}{3}-\frac{2}{9}D-\frac{2}{27}D^2+\cdots\cdots\cdots\right) \text{ por divisão direta.}$$

A primitiva é

$$y = e^{-\frac{1}{2}x}(C_1\cos\tfrac{1}{2}\sqrt{5}\,x + C_2 \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\sqrt{5}\,x) + \frac{1}{3}x^2+\frac{2}{9}x-\frac{25}{27}.$$

14) Resolver $(D^3-2D+4)\,y = x^4+3x^2-5x+2$.

A função complementar é $y = C_1e^{-2x} + e^x(C_2\cos x + C_3 \operatorname{sen} x)$ e uma integral particular é:

$$y = \frac{1}{D^3-2D+4}(x^4+3x^2-5x+2) =$$

$$= \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}D+\frac{1}{16}D^2-\frac{1}{32}D^3-\frac{3}{64}D^4\right)(x^4+3x^2-5x+2) =$$

$$= \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{4}x - \frac{7}{8}.$$

A primitiva é

$$y = C_1e^{-2x} + e^x(C_2\cos x + C_3 \operatorname{sen} x) + \frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{5}{4}x-\frac{7}{8}.$$

15) Resolver $(D^3-4D^2+3D)\,y = x^2$.

A função complementar é $y = C_1 + C_2e^x + C_3e^{3x}$, e uma integral particular é:

$$y = \frac{1}{D(D^2-4D+3)}x^2 = \frac{1}{D}\left(\frac{1}{D^2-4D+3}\right)x^2 =$$

$$= \frac{1}{D}\left(\frac{1}{3}+\frac{4}{9}D+\frac{13}{27}D^2\right)x^2 =$$

$$= \frac{1}{D}\left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{8}{9}x + \frac{26}{27}\right) = \frac{1}{9}x^3 + \frac{4}{9}x^2 + \frac{26}{27}x,$$

porque $\frac{1}{D}\{f(x)\} = \int f(x)\,dx$.

A primitiva é $y = C_1 + C_2e^x + C_3e^{3x} + \frac{1}{9}x^3 + \frac{4}{9}x^2 + \frac{26}{27}x$.

16) Resolver $(D^4 + 2D^3 - 3D^2)\,y = x^2 + 3e^{2x} + 4\,\text{sen}\,x$.

A função complementar é: $y = C_1 + C_2x + C_3e^x + C_4e^{-3x}$ e uma integral particular é

$$y = \frac{1}{D^2(D^2+2D-3)}(x^2 + 3e^{2x} + 4\,\text{sen}\,x) =$$

$$= \frac{1}{D^2(D^2+2D-3)}x^2 + 3\frac{1}{D^2(D^2+2D-3)}e^{2x} + 4\frac{1}{D^2(D^2+2D-3)}\text{sen}\,x =$$

$$= \frac{1}{D^2}\left\{\frac{1}{D^2+2D-3}x^2\right\} + \frac{3}{4(4+4-3)}e^{2x} + \frac{4}{(-1)(-1+2D-3)}\text{sen}\,x =$$

$$= \frac{1}{D^2}\left(-\frac{1}{3} - \frac{2}{9}D - \frac{7}{27}D^2\right)x^2 + \frac{3}{20}e^{2x} - \frac{2}{D-2}\text{sen}\,x =$$

$$= -\frac{1}{27}\frac{1}{D^2}(9x^2 + 12x + 14) + \frac{3}{20}e^{2x} - 2\frac{D+2}{D^2-4}\text{sen}\,x =$$

$$= -\frac{1}{27}\left(\frac{3}{4}x^4 + 2x^3 + 7x^2\right) + \frac{3}{20}e^{2x} + \frac{2}{5}(\cos x + 2\,\text{sen}\,x).$$

A primitiva é

$$y = C_1 + C_2x + C_3e^x + C_4e^{-3x} - \frac{x^2}{108}(3x^2 + 8x + 28) + \frac{3}{20}e^{2x} + \frac{2}{5}(\cos x + 2\,\text{sen}\,x).$$

17) Estabelecer a regra da letra *d*) acima, mostrando antes que

$$F(D)\,e^{ax}\,U = e^{ax}\,F(D+a)\,U.$$

Quando $y = e^{ax}U$, $Dy = ae^{ax}U + e^{ax}DU = e^{ax}(D+a)\,U$,
$D^2y = ae^{ax}(D+a)\,U + e^{ax}D(D+a)\,U = e^{ax}(D^2+2aD+a^2)\,U = e^{ax}(D+a)^2\,U$,
$\ldots\ldots\ldots\ldots$, $D^r y = e^{ax}(D+a)^r\,U$ e

$$(1)\quad F(D)\,e^{ax}U = \sum_r P_r D^r(e^{ax}U) = \sum_r P_r\,e^{ax}(D+a)^r\,U = e^{ax}\sum_r P_r(D+a)^r\,U = e^{ax}F(D+a)\,U.$$

Para $V = F(D+a)\,U$ vem $U = \frac{1}{F(D+a)}V$.

Então de (1), $F(D)\,e^{ax}\frac{1}{F(D+a)}V = e^{ax}V$

e $$\frac{1}{F(D)}e^{ax}V = \frac{1}{F(D)}\left\{F(D)\,e^{ax}\frac{1}{F(D+a)}V\right\} = e^{ax}\frac{1}{F(D+a)}V.$$

18) Resolver $(D^2 - 4)\,y = x^2 e^{3x}$.

A função complementar é $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$, e uma integral particular é:

$$y = \frac{1}{D^2 - 4} x^2 e^{3x} = e^{3x} \frac{1}{(D+3)^2 - 4} x^2 = e^{3x} \frac{1}{D^2 + 6D + 5} x^2 =$$

$$= e^{3x} \left(\frac{1}{5} - \frac{6}{25} D + \frac{31}{125} D^2 \right) x^2 = e^{3x} \left(\frac{x^2}{5} - \frac{12}{25} x + \frac{62}{125} \right).$$

A primitiva é $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + \frac{1}{125} e^{3x} (25x^2 - 60x + 62)$.

19) Resolver $(D + 2D + 4)\,y = e^x \operatorname{sen} 2x$.

A função complementar é $y = e^{-x} (C_1 \cos \sqrt{3}\, x + C_2 \operatorname{sen} \sqrt{3}\, x)$ e uma integral particular é:

$$y = \frac{1}{D^2 + 2D + 4} e^x \operatorname{sen} 2x = e^x \frac{1}{(D+1)^2 + 2(D+1) + 4} \operatorname{sen} 2x =$$

$$= e^x \frac{1}{D^2 + 4D + 7} \operatorname{sen} 2x =$$

$$= e^x \frac{1}{4D + 3} \operatorname{sen} 2x = e^x \frac{4D - 3}{16D^2 - 9} \operatorname{sen} 2x = - \frac{e^x}{73} (4D - 3) \operatorname{sen} 2x =$$

$$= - \frac{e^x}{73} (8 \cos 2x - 3 \operatorname{sen} 2x).$$

A primitiva é

$$y = e^{-x} (C_1 \cos \sqrt{3}\, x + C_2 \operatorname{sen} \sqrt{3}\, x) - \frac{e^x}{73} (8 \cos 2x - 3 \operatorname{sen} 2x).$$

20) Resolver $(D^2 - 4D + 3)\,y = 2xe^{3x} + 3e^x \cos 2x$.

A função complementar é $y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$ e uma integral particular é:

$$y = \frac{1}{D^2 - 4D + 3} (2xe^{3x} + 3e^x \cos 2x) =$$

$$= 2 \frac{1}{D^2 - 4D + 3} xe^{3x} + 3 \frac{1}{D^2 - 4D + 3} e^x \cos 2x =$$

$$= 2e^{3x} \frac{1}{D^2 + 2D} x + 3e^x \frac{1}{D^2 - 2D} \cos 2x =$$

$$= 2e^{3x} \frac{1}{D} \cdot \frac{1}{D + 2} x + 3e^x \frac{1}{-4 - 2D} \cos 2x =$$

$$= 2e^{3x} \frac{1}{D} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} D \right) x - \frac{3}{2} e^x \frac{D - 2}{D^2 - 4} \cos 2x =$$

$$= \frac{1}{2} e^{3x} \frac{1}{D} (2x - 1) + \frac{3}{16} e^x (D - 2) \cos 2x =$$

$$= \frac{1}{2} e^{3x} (x^2 - x) - \frac{3}{8} e^x (\cos 2x + \operatorname{sen} 2x).$$

A primitiva é

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{3x} + \frac{1}{2} e^{3x} (x^2 - x) - \frac{3}{8} e^x (\cos 2x + \operatorname{sen} 2x).$$

21) Estabelecer a regra da letra *e*) acima, mostrando antes que

$$F(D)\,xU = xF(D)\,U + F'(D)\,U.$$

Quando $y = xU$, $Dy = xDU + U$, $D^2y = xD^2U + 2DU$, ...,

$$D^r y = xD^r U + rD^{r-1} U = xD^r U + \left(\frac{d}{dD} D^r\right) U, \text{ então}$$

$$(1) \quad F(D)\,xU = \sum_r P_r D^r(xU) = \sum_r P_r xD^r U + \sum_r P_r \left(\frac{d}{dD} D^r\right) U = \\ = xF(D)\,U + F'(D)\,U.$$

Para $V = F(D)\,U$ temos: $U = \dfrac{1}{F(D)} V$.

Substituindo em (1), $F(D)\,x\dfrac{1}{F(D)} V = xF(D)\dfrac{1}{F(D)} V + F'(D)\dfrac{1}{F(D)} V$,

$$xV = F(D)\,x\frac{1}{F(D)} V - F'(D)\frac{1}{F(D)} V$$

$$\text{e } \frac{1}{F(D)} xV = x\frac{1}{F(D)} V - \frac{1}{F(D)} F'(D)\frac{1}{F(D)} V = x\frac{1}{F(D)} V - \frac{F'(D)}{\{F(D)\}^2} V.$$

22) Resolver $(D^2 + 3D + 2)\,y = x \operatorname{sen} 2x$.

A função complementar é $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}$ e uma integral particular é:

$$y = \frac{1}{D^2 + 3D + 2} x \operatorname{sen} 2x = x\frac{1}{D^2 + 3D + 2} \operatorname{sen} 2x - \frac{2D + 3}{(D^2 + 3D + 2)^2} \operatorname{sen} 2x =$$

$$= x\frac{1}{3D - 2} \operatorname{sen} 2x - \frac{2D + 3}{D^4 + 6D^3 + 13D^2 + 12D + 4} \operatorname{sen} 2x =$$

$$= x\frac{1}{3D - 2} \operatorname{sen} 2x - \frac{2D + 3}{(-4)^2 + 6(-4)D + 13(-4) + 12D + 4} \operatorname{sen} 2x,$$

substituindo D^2 por -4,

$$= x\frac{3D + 2}{9D^2 - 4} \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{4}\,\frac{(2D + 3)(3D - 8)}{9D^2 - 64} \operatorname{sen} 2x =$$

$$= \frac{-x(3\cos 2x + \operatorname{sen} 2x)}{20} + \frac{24 \operatorname{sen} 2x + 7\cos 2x}{200}.$$

A primitiva é

$$y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} - \frac{30x - 7}{200}\cos 2x - \frac{5x - 12}{100} \operatorname{sen} 2x.$$

23) Resolver $(D^2 - 1)\,y = x^2 \operatorname{sen} 3x$.

A função complementar é $y = C_1e^{x} + C_2e^{-x}$ e uma integral particular é:

$$y = \frac{1}{D^2-1}x^2 \operatorname{sen} 3x = x\frac{1}{D^2-1}x \operatorname{sen} 3x - \frac{2D}{(D^2-1)^2}x \operatorname{sen} 3x =$$

$$= x^2\frac{1}{D^2-1}\operatorname{sen} 3x - x\frac{2D}{(D^2-1)^2}\operatorname{sen} 3x -$$

$$- 2D\left\{x\frac{1}{D^4-2D^2+1}\operatorname{sen} 3x - \frac{4D^3-4D}{(D^4-2D^2+1)^2}\operatorname{sen} 3x\right\} =$$

$$= x^2\frac{1}{D^2-1}\operatorname{sen} 3x - x\frac{2D}{(D^2-1)^2}\operatorname{sen} 3x -$$

$$- 2D\left\{x\frac{1}{(D^2-1)^2}\operatorname{sen} 3x\right\} + \frac{8D^2}{(D^2-1)^3}\operatorname{sen} 3x =$$

$$= -\frac{1}{10}x^2 \operatorname{sen} 3x - \frac{3}{50}x\cos 3x - \frac{1}{50}D(x \operatorname{sen} 3x) + \frac{9}{125}\operatorname{sen} 3x =$$

$$= -\frac{1}{10}x^2 \operatorname{sen} 3x - \frac{3}{25}x\cos 3x + \frac{13}{250}\operatorname{sen} 3x.$$

A primitiva é

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x} - \frac{25x^2-13}{250}\operatorname{sen} 3x - \frac{3}{25}x\cos 3x.$$

24) Resolver $(D^3-3D^2-6D+8) = xe^{-3x}$.

A função complementar é $y = C_1e^x + C_2e^{4x} + C_3e^{-2x}$ e uma integral particular é:

$$y = \frac{1}{D^3-3D^2-6D+8}xe^{-3x}.$$

Por *a*):

$$y = e^{-3x}\frac{1}{(D-3)^3-3(D-3)^2-6(D-3)+8}x = e^{-3x}\frac{1}{D^3-12D^2+39D-28}x =$$

$$= e^{-3x}\left(-\frac{1}{28}-\frac{39}{784}D\right)x = e^{-3x}\left(-\frac{1}{28}x-\frac{39}{784}\right).$$

Por *e*):

$$y = x\frac{1}{D^3-3D^2-6D+8}e^{-3x} - \frac{3D^2-6D-6}{(D^3-3D^2-6D+8)^2}e^{-3x} =$$

$$= -\frac{1}{28}xe^{-3x} - \frac{3D^2-6D-6}{(-28)^2}e^{-3x} = -\frac{1}{28}xe^{-3x} - \frac{39}{784}e^{-3x}.$$

A primitiva é $y = C_1e^x + C_2e^{4x} + C_3e^{-2x} - \dfrac{e^{-3x}}{784}(28x+39)$.

PROBLEMAS PROPOSTOS

Achar uma integral particular.

25) $(D^2 + 2)\,y = e^{2x}$ — *Resp.:* $y = e^{2x}/6$

26) $(D^2 + D + 1)\,y = e^x$ — *Resp.:* $y = e^x/3$

27) $(D^2 - 1)\,y = e^x$ — *Resp.:* $y = xe^x/2$

28) $(D - 2)^2\,y = e^x + xe^{2x}$ — *Resp.:* $y = e^x + x^3\,e^{2x}/6$

29) $(D^4 - 1)\,y = \operatorname{sen} 2x$ — *Resp.:* $y = \dfrac{1}{15}\operatorname{sen} 2x$

30) $(D^3 + 1)\,y = \cos x$ — *Resp.:* $y = \dfrac{1}{2}(\cos x - \operatorname{sen} x)$

31) $(D^2 + 4)\,y = \operatorname{sen} 2x$ — *Resp.:* $y = -\dfrac{1}{4}\,x\cos 2x$

32) $(D^2 + 5)\,y = \cos\sqrt{5}\,x$ — *Resp.:* $y = \dfrac{\sqrt{5}}{10}\,x\operatorname{sen}\sqrt{5}\,x$

33) $(D^3 + D^2 + D + 1)\,y = e^x + e^{-x} + \operatorname{sen} x$ — *Resp.:* $y = \dfrac{1}{4}(e^x + 2xe^{-x}) - \dfrac{1}{4}\,x(\operatorname{sen} x + \cos x)$

34) $(D^2 - 1)\,y = x^2$ — *Resp.:* $y = -x^2 - 2$

35) $D^4(D^2 - 1)\,y = x^2$ — *Resp.:* $y = -\dfrac{1}{360}(x^6 + 30x^4)$

36) $(D^2 + 2)\,y = x^3 + x^2 + e^{-2x} + \cos 3x$ — *Resp.:* $y = \dfrac{1}{2}(x^3 + x^2 - 3x - 1) + \dfrac{1}{6}e^{-2x} - \dfrac{1}{7}\cos 3x$

37) $(D^2 - 2D - 1)\,y = e^x\cos x$ — *Resp.:* $y = -\dfrac{1}{3}e^x\cos x$

38) $(D - 2)^2\,y = e^{2x}/x^2$ — *Resp.:* $y = -e^{2x}\ln x$

39) $(D^2 - 1)\,y = xe^{3x}$ — *Resp.:* $y = \dfrac{1}{32}e^{3x}(4x - 3)$

40) $(D^2 + 5D + 6)\,y = e^{-2x}(\sec^2 x)(1 + 2\operatorname{tg} x)$ — *Resp.:* $y = e^{-2x}\operatorname{tg} x$

Capítulo XVII

EQUAÇÕES LINEARES COM COEFICIENTES VARIÁVEIS

Equações Lineares de Cauchy e Legendre

A Equação Linear de Cauchy

$$(1) \quad p_0 x^n \frac{d^n y}{dx^n} + p_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots\cdots + p_{n-1} x \frac{dy}{dx} + p_n y = Q(x),$$

onde p_0, p_1, ·····, p_n são constantes e a *Equação Linear de Legendre*

$$(2) \quad p_0 (ax+b)^n \frac{d^n y}{dx^n} + p_1 (ax+b)^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots\cdots +$$
$$+ p_{n-1}(ax+b) \frac{dy}{dx} + p_n y = Q(x),$$

da qual (1) é o caso particular ($a=1$, $b=0$), podem ser reduzidas às equações com coeficientes constantes por meio de transformações convenientes da variável independente.

Equação Linear de Cauchy. Seja $x = e^z$; sendo $\mathfrak{D}$ definido por $\mathfrak{D} = \dfrac{d}{dz}$, temos:

$$Dy = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dz} \qquad \text{e} \qquad xDy = \frac{dy}{dz} = \mathfrak{D}y,$$

$$D^2 y = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dz}\right) = \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2 y}{dz^2} - \frac{dy}{dz}\right) \quad \text{e} \quad x^2 D^2 y = \mathfrak{D}(\mathfrak{D}-1)y,$$

$$D^3 y = -\frac{2}{x^3}\left(\frac{d^2 y}{dz^2} - \frac{dy}{dz}\right) + \frac{1}{x^3}\left(\frac{d^3 y}{dz^3} - \frac{d^2 y}{dz^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{x^3}\left(\frac{d^3 y}{dz^3} - 3\frac{d^2 y}{dz^2} + 2\frac{dy}{dz}\right) \qquad \text{e} \quad x^3 D^3 y = \mathfrak{D}(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-2)y,$$

. . . .

. . . .

$$x^r D^r y = \mathfrak{D}(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-2)\cdots\cdots(\mathfrak{D}-r+1)y.$$

Depois das substituições, (1) transforma-se em

$$\Big\{p_0\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-2)\cdots\cdots(\mathfrak{D}-n+$$
$$+\,p_1\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-2)\cdots\cdots(\mathfrak{D}-n+2)+\cdots\cdots\cdots+$$
$$+\,p_{n-1}\mathfrak{D}+p_n\Big\}y=Q(e^z),$$

equação linear com coeficientes constantes. (Ver Problemas 1-3).

Equação Linear de Legendre. Seja $ax+b=e^z$; então

$$Dy=\frac{dy}{dz}\,\frac{dz}{dx}=\frac{a}{ax+b}\,\frac{dy}{dz}\quad\text{e}\quad(ax+b)\,Dy=a\frac{dy}{dz}=a\mathfrak{D}y,$$

$$D^2y=\frac{a^2}{(ax+b)^2}\left(\frac{d^2y}{dz^2}-\frac{dy}{dz}\right)\quad\text{e}\quad(ax+b)^2D^2y=a^2\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-1)y,$$

. . . .

. . . .

$$(ax+b)^r D^ry=a^r\,\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-1)\cdots\cdots(\mathfrak{D}-r+1)y.$$

Depois das substituições, (2) transforma-se em

$$\Big\{p_0\,a^n\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-2)\cdots\cdots(\mathfrak{D}-n+1)+$$
$$+\,p_1\,a^{n-1}\,\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-2)\cdots\cdots(\mathfrak{D}-n+2)+\cdots\cdots\cdots+$$
$$+\,p_{n-1}\,a\mathfrak{D}+p_n\Big\}\;y=Q\left(\frac{e^z-b}{a}\right),$$

equação linear com coeficientes constantes. (Ver Problemas 4-5).

PROBLEMAS RESOLVIDOS

1) Resolver $(x^3D^3+3x^2D^2-2xD+2)\,y=0$.

A transformação $x=e^z$ reduz a equação a

$$\{\,\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-2)+3\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-1)-2\,\mathfrak{D}+2\,\}\,y=(\mathfrak{D}^3-3\mathfrak{D}+2)\,y=0$$

cuja solução é $y=C_1e^z+C_2ze^z+C_3e^{-2z}$.

Como $z=\ln x$, a solução geral da equação dada é

$$y=C_1x+C_2x\ln x+C_3/x^2.$$

2) Resolver $(x^3D^3+2xD-2)\,y=x^2\ln x+3x$.

A transformação $x=e^z$ reduz a equação a

$$\{\,\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-2)+2\mathfrak{D}-2\,\}\,y=(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}^2-2\mathfrak{D}+2)\,y=ze^{2z}+3e^z.$$

A função complementar é $y = C_1 e^z + e^z (C_2 \cos z (C_3 \operatorname{sen} z)$ e uma integral particular é:

$$y = \frac{1}{\mathfrak{D}^3 - 3\mathfrak{D}^2 + 4\mathfrak{D} - 2}(ze^{2z} + 3e^z) =$$

$$= e^{2z} \frac{1}{(\mathfrak{D}+2)^3 - 3(\mathfrak{D}+2)^2 + 4(\mathfrak{D}+2) - 2} z + 3 \frac{1}{(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}^2 - 2\mathfrak{D}+2)} e^z =$$

$$= e^{2z} \frac{1}{\mathfrak{D}^3 + 3\mathfrak{D}^2 + 4\mathfrak{D} + 2} z + 3 \frac{1}{(\mathfrak{D}-1)(1)} e^z =$$

$$= e^{2z} \left(\tfrac{1}{2} - \mathfrak{D}\right) z + 3e^z \int e^z \cdot e^{-z} dz = e^{2z} \left(\tfrac{1}{2} z - 1\right) + 3ze^z.$$

A solução é:

$$y = C_1 e^z + e^z (C_2 \cos z + C_3 \operatorname{sen} z) + \tfrac{1}{2} e^{2z} (z-2) + 3ze^z =$$

$$= C_1 x + x (C_2 \cos \ln x + C_3 \operatorname{sen} \ln x) + \tfrac{1}{2} x^2 (\ln x - 2) + 3x \ln x.$$

3) Resolver $(x^2 D^2 - xD + 4) y = \cos \ln x + x \operatorname{sen} \ln x.$

A transformação $x = e^z$ reduz a equação a

$$\left\{ \mathfrak{D}(\mathfrak{D}-1) - \mathfrak{D} + 4 \right\} y = (\mathfrak{D}^2 - 2\mathfrak{D} + 4) y = \cos z + e^z \operatorname{sen} z.$$

A função complementar é $y = e^z (C_1 \cos \sqrt{3}\, z + C_2 \operatorname{sen} \sqrt{3}\, z$ e uma solução particular é:

$$y = \frac{1}{\mathfrak{D}^2 - 2\mathfrak{D} + 4} \cos z + \frac{1}{\mathfrak{D}^2 - 2\mathfrak{D}^2 + 4} e^z \operatorname{sen} z =$$

$$= \frac{1}{3 - 2\mathfrak{D}} \cos z + e^z \frac{1}{\mathfrak{D}^2 + 3} \operatorname{sen} z = \frac{1}{13}(3 \cos z - 2 \operatorname{sen} z) + \frac{1}{2} e^z \operatorname{sen} z.$$

A solução é:

$$y = e^z (C_1 \cos \sqrt{3}\, z + C_2 \operatorname{sen} \sqrt{3}\, z) + \frac{1}{13}(3 \cos z - 2 \operatorname{sen} z) + \frac{1}{2} e^z \operatorname{sen} z =$$

$$= x\, (C_1 \cos \sqrt{3} \cdot \ln x + C_2 \operatorname{sen} \sqrt{3} \cdot \ln x) +$$

$$+ \frac{1}{13}(3 \cos \ln x - 2 \operatorname{sen} \ln x) + \frac{1}{2} x \operatorname{sen} \ln x.$$

4) Resolver $(x+2)^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} - (x+2)\dfrac{dy}{dx} + y = 3x + 4.$

Fazendo $x + 2 = e^z$; a equação se transforma em

$$\left\{ \mathfrak{D}(\mathfrak{D}-1) - \mathfrak{D} + 1 \right\} y = (\mathfrak{D}-1)^2 y = 3e^z - 2.$$

A função complementar é $y = C_1 e^z + C_2 z e^z$ e uma integral particular é:

$$y = \frac{1}{(\mathfrak{D}-1)^2}(3e^z - 2) = 3e^z \int\int (dz)^2 - 2 \frac{1}{(\mathfrak{D}-1)^2} e^{0z} = \frac{3}{2} z^2 e^z - 2.$$

A solução é: $y = C_1 e^z + C_2 z e^z + \frac{3}{2} z^2 e^z - 2$ ou, por ser $z = \ln(x+2)$,

$$y = (x+2)\left[C_1 + C_2 \ln(x+2) + \frac{3}{2}\ln^2(x+2)\right] - 2.$$

5) Resolver $\left\{(3x+2)^2 D^2 + 3(3x+2)D - 36\right\} y = 3x^2 + 4x + 1.$

A transformação $3x + 2 = e^z$ reduz a equação a

$$\left\{ 9\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-1) + 9\mathfrak{D} - 36 \right\} y = 9(\mathfrak{D}^2 - 4) y = \frac{1}{3}(9x^2 + 12x + 3) = \frac{1}{3}(e^{2z} - 1)$$

ou

$$(\mathfrak{D}^2 - 4) y = \frac{1}{27}(e^{2z} - 1).$$

A solução geral é

$$y = C_1 e^{2z} + C_2 e^{-2z} + \frac{1}{27}\left(\frac{1}{\mathfrak{D}^2 - 4} e^{2z} - \frac{1}{\mathfrak{D}^2 - 4} e^{0z}\right) =$$

$$= C_1 e^{2z} + C_2 e^{-2z} + \frac{1}{108}(z e^{2z} + 1)$$

ou $\quad y = C_1 (3x+2)^2 + C_2 (3x+2)^{-2} + \frac{1}{108}\left[(3x+2)^2 \ln(3x+2) + 1\right].$

PROBLEMAS PROPOSTOS

Resolver:

6) $(x^2 D^2 - 3xD + 4) y = x + x^2 \ln x$

Resp.: $y = C_1 x^2 + C_2 x^2 \ln x + x + \frac{1}{6} x^2 \ln^3 x$

7) $(x^2 D^2 - 2xD + 2) y = \ln^2 x - \ln x^2$

Resp.: $y = C_1 x + C_2 x^2 + \frac{1}{2}(\ln^2 x + \ln x) + \frac{1}{4}$

8) $(x^3 D^3 + 2x^2 D^2) y = x + \operatorname{sen}(\ln x)$

Resp.: $y = C_1 + C_2 x + C_3 \ln x + x \ln x + \frac{1}{2}(\cos \ln x + \operatorname{sen} \ln x)$

9) $x^3 y''' + x y' - y = 3x^4$

Resp.: $y = C_1 x + C_2 x \ln x + C_3 x \ln^2 x + x^4/9$

10) $[(x+1)^2 D^2 + (x+1) D - 1] y = \ln(x+1)^2 + x - 1$

Resp.: $y = C_1 (x+1) + C_2 (x+1)^{-1} - \ln(x+1)^2 + \frac{1}{2}(x+1) \cdot \ln(x+1) + 2$

11) $(2x+1)^2 y'' - 2(2x+1) y' - 12 y = 6x$

Resp.: $y = C_1 (2x+1)^{-1} + C_2 (2x+1)^3 - 3x/8 + 1/16$

Capítulo XVIII

EQUAÇÕES LINEARES COM COEFICIENTES VARIÁVEIS

Equações de Segunda Ordem

Uma equação diferencial linear de segunda ordem tem a forma

$$(1) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + R(x)\,\frac{dy}{dx} + S(x)y = Q(x).$$

Se os coeficientes R e S forem constantes, a equação poderá ser resolvida pelo método do capítulo precedente. Caso contrário, não há método geral conhecido. Daremos neste capítulo alguns processos que, em alguns casos, permitirão resolver a equação.

Troca da Variável Dependente. Fazendo-se

$$y = uv, \qquad u = u(x) \quad \text{e} \quad v = v(x),$$

$$\frac{dy}{dx} = u\,\frac{dv}{dx} + v\,\frac{du}{dx}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = u\,\frac{d^2v}{dx^2} + 2\,\frac{dv}{dx}\cdot\frac{du}{dx} + v\,\frac{d^2u}{dx^2},$$

(1) transforma-se em:

$$(2) \qquad \frac{d^2v}{dx^2} + R_1(x)\,\frac{dv}{dx} + S_1(x)\,v = Q_1(x)$$

onde

$$R_1(x) = \frac{2}{u}\,\frac{du}{dx} + R(x)\,, \quad S_1(x) = \frac{1}{u}\left(\frac{d^2u}{dx^2} + R(x)\,\frac{du}{dx} + S(x)\cdot u\right),$$

$$Q_1(x) = \frac{Q(x)}{u}.$$

a) Se u fôr uma integral particular de

$$\frac{d^2y}{dx^2} + R(x)\,\frac{dy}{dx} + S(x)y = 0,$$

teremos $S_1 = 0$ e (2) transforma-se em:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + R_1(x)\frac{dv}{dx} = Q_1(x). \tag{3}$$

Fazendo, agora, $\dfrac{dv}{dx} = p$, $\dfrac{d^2 v}{dx^2} = \dfrac{dp}{dx}$ a equação (3) reduz-se a

$$\frac{dp}{dx} + R_1(x)\,p = Q_1(x), \tag{4}$$

equação diferencial linear de primeira ordem.

(Ver Problemas 1-6).

b) Se u fôr escolhido de modo que

$$R_1(x) = \frac{2}{u}\,\frac{du}{dx} + R(x) = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{du}{u} = -\tfrac{1}{2}\,R(x)\,dx,$$

teremos $$u = e^{-\frac{1}{2}\int R(x)\,dx}.$$

Então $\dfrac{du}{dx} = -\tfrac{1}{2}\,u\,R(x)$ e $\dfrac{d^2u}{dx^2} = -\tfrac{1}{2}\,R(x)\dfrac{du}{dx} - \tfrac{1}{2}\,u\,\dfrac{dR}{dx}$

de modo que

$$S_1(x) = S(x) + \frac{R(x)}{u}\,\frac{du}{dx} + \frac{1}{u}\,\frac{d^2u}{dx^2} =$$

$$= S(x) + \tfrac{1}{2}\,\frac{R(x)}{u}\,\frac{du}{dx} - \tfrac{1}{2}\,\frac{dR}{dx} = S - \tfrac{1}{4}\,R^2 - \tfrac{1}{2}\,\frac{dR}{dx} \quad \text{e} \quad Q_1 = Q/u.$$

Se $S_1(x) = S - \tfrac{1}{4}\,R^2 - \tfrac{1}{2}\,\dfrac{dR}{dx} = A$, constante, (2) transforma-se em $\dfrac{d^2 v}{dx^2} + Av = Q/u$, equação diferencial linear com coeficientes constantes.

Se $S_1(x) = A/x^2$, (2) transforma-se em $x^2\,\dfrac{d^2 v}{dx^2} + Av = Qx^2/u$, uma equação de Cauchy e a substituição $x = e^z$ reduzi-la-á a outra de coeficientes constantes. (Ver Problemas 7-10.)

Troca da Variável Independente. Façamos $z = \theta(x)$.

Então

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\,\frac{dz}{dx}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dz^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{dz}\,\frac{d^2z}{dx^2}$$

e (1) transforma-se em:

$$\frac{d^2y}{dz^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dx^2} + R\,\frac{dz}{dx}\right)\frac{dy}{dz} + Sy = Q$$

ou

$$\text{(5)} \qquad \frac{d^2y}{dz^2} = \frac{\dfrac{d^2z}{dx^2} + R\,\dfrac{dz}{dx}}{\left(\dfrac{dz}{dx}\right)^2}\,\frac{dy}{dz} + \frac{Sy}{\left(\dfrac{dz}{dx}\right)^2} = \frac{Q}{\left(\dfrac{dz}{dx}\right)^2}.$$

Escolhamos $z = \theta(x)$ de modo que $\dfrac{dz}{dx} = \sqrt{\dfrac{\pm S}{a^2}}$, escolhendo-se o sinal de modo que $\dfrac{dz}{dx}$ seja real e a^2 sendo uma constante positiva. (Pode-se tomar $a^2 = 1$.)

Se, agora, $\dfrac{\dfrac{d^2z}{dx^2} + R\,\dfrac{dz}{dx}}{\left(\dfrac{dz}{dx}\right)^2} = A$, constante, (5) transformar-se-á em $\dfrac{d^2y}{dz^2} + A\,\dfrac{dy}{dz} \pm a^2y = \dfrac{Q}{\left(\dfrac{dz}{dx}\right)^2}$, equação diferencial linear com coeficientes constantes. (Ver Problemas 11-14).

Fatoração dos Operadores. Poderá ser possível fatorar o primeiro membro de

$$\left\{P(x)D^2 + R(x)D + S(x)\right\}\; y = Q(x)$$

em dois operadores lineares $F_1(D)$ e $F_2(D)$ de modo que

$$\text{(6)} \quad \left\{F_1(D)\cdot F_2(D)\right\}y = F_1(D)\left\{F_2(D)y\right\} = \\ = \left\{P(x)D^2 + R(x)D + S(x)\right\}y = Q(x).$$

Fazendo $F_2(D)y = v$, (6) transforma-se em $F_1(D)v = Q(x)$, equação diferencial de primeira ordem.

A fatoração aqui difere da que foi vista no Cap. XIII. Com possíveis exceções, os fatôres encerram a variável independente x, não são comutativos e a fatoração é diferente da que trata D como variável. Por exemplo:

$$\left\{xD^2 - (x^2 + 2)D + x\right\}y = \left\{(xD - 2)(D - x)\right\}y,$$

porque

$$\left\{(xD-2)(D-x)\right\}y = (xD-2)\left(\frac{d}{dx}-x\right)y = (xD-2)(y'-xy) =$$

$$= (x\frac{d}{dx}-2)(y'-xy) = x(y''-y-xy')-2(y'-xy) =$$

$$= xy''-(x^2+2)y'+xy = \left\{(xD^2-(x^2+2)D+x\right\}y.$$

Os fatôres não são comutativos, porque

$$\left\{(D-x)(xD-2)\right\}y = (D-x)(xy'-2y) = xy''+y'-2y'-x^2y'+2xy =$$

$$= xy''-(x^2+1)y'+2xy = \left\{xD^2-(x^2+1)D+2x\right\}y.$$

Finalmente, quando D é tratado como variável e não como operador,

$$\left\{(xD-2)(D-x)\right\}y = \left\{xD^2-(x^2+2)D+2x\right\}y.$$

(Ver Problemas 15-17).

Resumindo, sugere-se o seguinte processo para resolver a equação

$$\frac{d^2y}{dx^2} + R(x)\frac{dy}{dx} + S(x)y = Q(x).$$

1) Achar, por inspeção ou qualquer outro meio, uma integral particular $u = u(x)$ da equação obtida com $Q(x) = 0$. A substituição $y = uv$ conduzirá a uma equação diferencial linear em que a variável dependente v não aparece. Esta equação é de primeira ordem em $\frac{dv}{dx} = p$.

2) Se não fôr possível encontrar uma integral particular, calcular $S - \frac{1}{4}R^2 - \frac{1}{2}\frac{dR}{dx}$. Se o resultado fôr uma constante K ou K/x^2, a transformação $y = ve^{-\int \frac{1}{2}R\,dx}$ reduzirá a equação dada a uma equação diferencial linear com coeficientes constantes ou a uma equação de Cauchy.

3) Se o processo acima não fôr aplicável, fazer $\frac{dz}{dx} = \sqrt{\frac{\pm S}{a^2}}$ (escolhendo o sinal de modo que a raiz seja real) e substituir em $\dfrac{\frac{d^2z}{dx^2} + R\frac{dz}{dx}}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$. Se o resultado fôr uma constante, a transfor-

mação $z = \int \sqrt{\frac{\pm S}{a^2}}\, dx$ conduzirá a uma equação diferencial linear com coeficientes constantes.

4) Se o primeiro membro da equação permitir a fatoração dos operadores, o problema se reduzirá a resolver duas equações lineares de primeira ordem.

NOTA. Como verificação parcial do trabalho, é vantajoso saber o tipo de equação que resulta quando se fazem as transformações (1)-(3).

PROBLEMAS RESOLVIDOS

1) Mostrar que para a equação $(D^2 + RD + S)\,y = 0$,

a) $y = x$ é uma integral particular se $R + xS = 0$,

b) $y = e^x$ é uma integral particular se $1 + R + S = 0$,

c) $y = e^{-x}$ é uma integral particular se $1 - R + S = 0$,

d) $y = e^{mx}$ é uma integral particular se $m^2 + mR + S = 0$.

a) Se $y = x$ fôr uma integral particular de $(D^2 + RD + S)\,y = 0$, como $Dy = 1$ e $D^2 y = 0$, tem-se $R + Sx = 0$.

d) Se $y = e^{mx}$ fôr uma integral particular de $(D^2+RD+S)\,y = 0$, como $Dy = my$ e $D^2y = m^2y$, tem-se $(m^2+mR+S)\,y = 0$ e $m^2+mR+S = 0$. *b*) e *c*) são casos particulares ($m = 1$, $m = -1$) de *d*).

2) Resolver $\left(D^2 - \frac{3}{x}D + \frac{3}{x^2}\right) y = 2x - 1.$

Aqui, $R + Sx = 0$ e $y = x$ é uma integral particular de

$$\left(D^2 - \frac{3}{x}D + \frac{3}{x^2}\right) y = 0.$$

A transformação $y = xv$, $Dy = x\frac{dv}{dx} + v$, $D^2y = x\frac{d^2v}{dx^2} + 2\frac{dv}{dx}$ reduz a equação dada a $x\frac{d^2v}{dx^2} + 2\frac{dv}{dx} - 3\frac{dv}{dx} - \frac{3}{x}v + \frac{3}{x}v = x\frac{d^2v}{dx^2} - \frac{dv}{dx} = 2x - 1$

ou $\frac{d^2v}{dx^2} - \frac{1}{x}\frac{dv}{dx} = 2 - \frac{1}{x}$.

Fazendo

$\frac{dv}{dx} = p$, $\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$, temos $\frac{dp}{dx} - \frac{1}{x}p = 2 - \frac{1}{x}$ sendo $e^{\int -dx/x} = 1/x$

um fator de integração. Então:

$$\frac{p}{x} = \int \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx = 2\ln x + \frac{1}{x} + K, \quad p = \frac{dv}{dx} = 2x\ln x + 1 + Kx,$$

$$v = \frac{y}{x} = \int (2x\ln x + 1 + Kx)\,dx = x^2 \ln x + x + C_1 x^2 + C^2$$

e

$$y = C_1 x^3 + C_2 x + x^3 \ln x + x^2.$$

3) Resolver $x^2(x+1)\dfrac{d^2y}{dx^2} - x(2+4x+x^2)\dfrac{dy}{dx} + (2+4x+x^2)\,y = -x^4 - 2x^3$.

Aqui: $R + Sx = -\dfrac{x(2+4x+x^2)}{x^2(x+1)} + x\,\dfrac{2+4x+x^2}{x^2(x+1)} = 0$ e $y = x$ é uma integral particular da equação obtida quando se substitui o segundo membro da equação dada por zero.

A transformação $y = xv$, $\dfrac{dy}{dx} = x\dfrac{dv}{dx} + v$, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = x\dfrac{d^2v}{dx^2} + 2\dfrac{dv}{dx}$ reduz a equação dada a $x^2(x+1)\left(x\dfrac{d^2v}{dx^2} + 2\dfrac{dv}{dx}\right) - x(2+4x+x^2)\left(x\dfrac{dv}{dx} + v\right) +$

$$+ (2+4x+x^2)\,xv = -x^4 - 2x^3$$

ou
$$\frac{d^2v}{dx^2} - \frac{x+2}{x+1}\frac{dv}{dx} = -\frac{x+2}{x+1}.$$

Fazendo $\dfrac{dv}{dx} = p$, temos

$$\frac{dp}{dx} - \frac{x+2}{x+1}p = -\frac{x+2}{x+1} \quad \text{sendo} \quad e^{-\int 1+\left(\frac{1}{x+1}\right)dx} = \frac{e^{-x}}{x+1}$$

um fator de integração. Então:

$$\frac{e^{-x}}{x+1}p = -\int \frac{(x+2)\,e^{-x}}{(x+1)^2}\,dx = \frac{e^{-x}}{x+1} + C_1, \quad p = \frac{dv}{dx} = 1 + C_1(x+1)\,e^x,$$

$$v = \frac{y}{x} = x + C_1 xe^x + C_2 \quad \text{e} \quad y = C_1 x^2 e^x + C_2 x + x^2.$$

4) Resolver $x\dfrac{d^2y}{dx^2} - (2x+1)\dfrac{dy}{dx} + (x+1)\,y = (x^2+x-1)\,e^{2x}$.

Aqui: $1 + R + S = 1 - \dfrac{2x+1}{x} + \dfrac{x+1}{x} = 0$ e $y = e^x$ é uma integral particular da equação dada com o segundo membro nulo.

A transformação

$$y = e^x v, \quad \frac{dy}{dx} = e^x\left(\frac{dv}{dx} + v\right), \quad \frac{d^2y}{dx^2} = e^x\left(\frac{d^2v}{dx^2} + 2\frac{dv}{dx} + v\right)$$

reduz a equação dada a $\dfrac{d^2v}{dx^2} - \dfrac{1}{x}\dfrac{dv}{dx} = \left(x + 1 - \dfrac{1}{x}\right)e^x$.

Fazendo $\dfrac{dv}{dx} = p$ temos $\dfrac{dp}{dx} - \dfrac{1}{x}p = \left(x+1-\dfrac{1}{x}\right)e^x$ sendo $\dfrac{1}{x}$ um fator de integração. Então

$$\frac{p}{x} = \int\left(e^x + \frac{xe^x - e^x}{x^2}\right)dx = e^x + \frac{e^x}{x} + K, \quad p = \frac{dv}{dx} = xe^x + e^x + Kx,$$

$$v = \frac{y}{e^x} = xe^x + C_1 x^2 + C_2 \quad \text{e} \quad y = C_1 x^2 e^x + C_2 e^x + xe^{2x}.$$

5) Resolver $(x-2)\frac{d^2y}{dx^2}-(4x-7)\frac{dy}{dx}+(4x-6)y=0.$

Aqui: $m^2+mR+S=m^2-m\frac{4x-7}{x-2}+\frac{4x-6}{x-2}=0$ quando $m=2$ e $y=e^{2x}$ é uma integral particular.

A transformação

$$y=e^{2x}v,\ \ \frac{dy}{dx}=e^{2x}\frac{dv}{dx}+2e^{2x}v,\ \ \frac{d^2y}{dx^2}=e^{2x}\frac{d^2v}{dx^2}+4e^{2x}\frac{dv}{dx}+4e^{2x}v$$

reduz a equação dada a

$$(x-2)\left(\frac{d^2v}{dx^2}+4\frac{dv}{dx}+4v\right)-(4x-7)\left(\frac{dv}{dx}+2v\right)+(4x-6)v=0$$

ou

$$\frac{d^2v}{dx^2}-\frac{1}{x-2}\frac{dv}{dx}=0.$$

Fazendo $\frac{dv}{dx}=p$, temos $\frac{dp}{dx}-\frac{1}{x-2}p=0$. Então

$$p=\frac{dv}{dx}=K(x-2),\ \ v=\frac{y}{e^{2x}}=C_1(x-2)^2+C_2\ \ \text{e}\ \ y=C_1e^{2x}(x-2)^2+C_2e^{2x}.$$

6) Resolver $\frac{d^2y}{dx^2}-2\operatorname{tg}x\frac{dy}{dx}+3y=2\sec x.$

Por inspeção, vê-se que $y=\operatorname{sen}x$ é uma integral particular de $(D^2-2\operatorname{tg}xD+3)y=0.$

A transformação $y=v\operatorname{sen}x$ reduz a equação dada a:

$$\operatorname{sen}x\frac{d^2v}{dx^2}+2\left(\cos x-\frac{\operatorname{sen}^2x}{\cos x}\right)\frac{dv}{dx}=2\sec x,$$

ou

$$\frac{d^2v}{dx^2}+2(\operatorname{cotg}x-\operatorname{tg}x)\frac{dv}{dx}=4\operatorname{cosec}2x.$$

A substituição $\frac{dv}{dx}=p$ reduz a equação a

$$\frac{dp}{dx}+2(\operatorname{cotg}x-\operatorname{tg}x)p=4\operatorname{cosec}2x$$

para a qual um fator de integração é $\frac{1}{4}\operatorname{sen}^2 2x$. Então

$$\frac{1}{4}p\operatorname{sen}^2 2x=\int\operatorname{sen}2x\,dx=-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}K_1,$$

$$p=\frac{dv}{dx}=-2\operatorname{cosec}2x\operatorname{cotg}2x+K_1\operatorname{cosec}^2 2x,$$

$$v=\frac{y}{\operatorname{sen}x}=\operatorname{cosec}2x+K\operatorname{cotg}2x+C_2$$

$$y=\frac{1}{2}\sec x+C_1\left(\cos x-\frac{1}{2}\sec x\right)+C_2\operatorname{sen}x.$$

7) Resolver $\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{2}{x}\dfrac{dy}{dx} + \left(1 + \dfrac{2}{x^2}\right) y = xe^x$.

Temos $R = -\dfrac{2}{x}$, $S = 1 + \dfrac{2}{x^2}$, $S - \frac{1}{4} R^2 - \frac{1}{2}\dfrac{dR}{dx} = 1$

e
$$u = e^{-\frac{1}{2}\int R\,dx} = e^{\int dx/x} = x.$$

A transformação $y = uv = xv$, $\dfrac{dy}{dx} = x\dfrac{dv}{dx} + v$, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = x\dfrac{d^2v}{dx^2} + 2\dfrac{dv}{dx}$ reduz a equação dada a $\dfrac{d^2v}{dx^2} + v = e^x$, equação diferencial linear com coeficientes constantes, cuja solução geral é:

$$v = \frac{y}{x} = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x + \frac{1}{D^2+1} e^x = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x + \tfrac{1}{2} e^x.$$

Então, $\quad y = C_1 x \cos x + C_2 x \operatorname{sen} x + \frac{1}{2} xe^x.$

8) Resolver $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2x\dfrac{dy}{dx} + (x^2+2)\, y = e^{\frac{1}{2}(x^2+2x)}$.

Temos:
$R = -2x$, $S = x^2 + 2$, $S - \frac{1}{4}R^2 - \frac{1}{2}\dfrac{dR}{dx} = 3$ e $u = e^{-\frac{1}{2}\int R\,dx} = e^{\frac{1}{2}x^2}$.

A transformação $y = e^{\frac{1}{2}x^2} v$ reduz a equação a $\dfrac{d^2v}{dx^2} + 3v = e^x$ cuja solução geral é:

$$v = y/e^{\frac{1}{2}x^2} = C_1 \cos\sqrt{3}\,x + C_2 \operatorname{sen}\sqrt{3}\,x + \frac{1}{D^2+3} e^x =$$
$$= C_1 \cos\sqrt{3}\,x + C_2 \operatorname{sen}\sqrt{3}\,x + \tfrac{1}{4} e^x.$$

Então,
$$y = e^{\frac{1}{2}x^2}(C_1 \cos\sqrt{3}\,x + C_2 \operatorname{sen}\sqrt{3}\,x) + \tfrac{1}{4} e^{\frac{1}{2}(x^2+2x)}.$$

9) Resolver $\left(D^2 - \dfrac{3}{x}D + \dfrac{3}{x^2}\right) y = 2x - 1$. (Problema 2).

Temos: $\quad S - \frac{1}{4}R^2 - \frac{1}{2}\dfrac{dR}{dx} = \dfrac{3}{x^2} - \dfrac{9}{4x^2} - \dfrac{3}{2x^2} = -\dfrac{3}{4x^2}$

e
$$u = e^{-\frac{1}{2}\int R\,dx} = e^{-\frac{1}{2}\int -3\,dx/x} = x^{3/2}.$$

A transformação $y = uv = x^{3/2} v$ reduz a equação a $\dfrac{d^2v}{dx^2} - \dfrac{3}{4x^2}v = \dfrac{2x-1}{x^{3/2}}$

ou $x^2\dfrac{d^2v}{dx^2} - \dfrac{3}{4}v = 2x^{3/2} - x^{1/2}$, equação de Cauchy.

Fazendo $x = e^z$, temos $\left(\mathfrak{D}^2 - \mathfrak{D} - \frac{3}{4}\right) v = 2e^{3z/2} - e^{z/2}$.

A função complementar é $v = C_1 e^{-z/2} + C_2 e^{3z/2}$ e uma integral particular é

$$v = \frac{1}{\mathfrak{D}^2 - \mathfrak{D} - 3/4}(2e^{3z/2} - e^{z/2}) = \frac{1}{\mathfrak{D} - 3/2} e^{3z/2} + e^{z/2} = ze^{3z/2} + e^{z/2}.$$

A solução geral é $v = y/x^{3/2} = C_1 x^{-1/2} + C_2 x^{3/2} + x^{3/2} \ln x + x^{1/2}$

e $$y = C_1 x + C_2 x^3 + x^3 \ln x + x^2.$$

10) Resolver $\frac{d^2y}{dx^2} - 4x\frac{dy}{dx} + 4x^2 y = xe^{x^2}$.

Temos $S - \frac{1}{4}R^2 - \frac{1}{2}\frac{dR}{dx} = 2$ e $u = e^{2\int x\,dx} = e^{x^2}$.

A transformação $y = ve^{x^2}$ reduz a equação a $\frac{d^2v}{dx^2} + 2v = x$ cuja solução geral é

$$v = C_1 \cos\sqrt{2}\,x + C_2 \operatorname{sen}\sqrt{2}\,x + 1\,x.$$

Então $y = ve^{x^2} = e^{x^2}(C_1 \cos\sqrt{2}\,x + C_2 \operatorname{sen}\sqrt{2}\,\tfrac{1}{2}\,xe^{x^2}$.

11) Resolver $\frac{d^2y}{dx^2} - (1 + 4e^x)\frac{dy}{dx} + 3e^{2x}\,y = e^{2(x+e^x)}$.

Quando $$\frac{dz}{dx} = \sqrt{\frac{S}{a^2}} = \sqrt{\frac{3e^{2x}}{3}} = e^x,$$

$$\frac{d^2 z/dx^2 + R\,(dz/dx)}{(dz/dx)^2} = \frac{e^x - (1 + 4e^x)\,e^x}{(e^x)^2} = -4 = A.$$

A introdução de $z = e^x$, como nova variável independente, acarreta $\frac{d^2y}{dz^2} + A\frac{dy}{dz} + a^2y = \frac{Q}{dz/dx^2}$ ou $\frac{d^2y}{dz^2} - 4\frac{dy}{dz} + 3y = \frac{e^{2(x+e^x)}}{e^{2x}} = e^{2e^x} = e^{2z}$ cuja solução geral é

$$y = C_1 e^z + C_2 e^{3z} + \frac{1}{\mathfrak{D}^2 - 4\mathfrak{D} + 3} e^{2z} = C_1 e^z + C_2 e^{3z} - e^{2z}.$$

Substituindo z por e^x, temos $y = C_1 e^{e^x} + C_2 e^{3e^x} - e^{2e^x}$.

NOTA. A escolha de $a^2 = 3$ foi apenas por conveniência. Tomando $a^2 = 1$, $\frac{dz}{dx} = \sqrt{3}\,e^x$ e $A = \frac{-4}{\sqrt{3}}$. A transformação $z = \sqrt{3}\,e^x$ dá $\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{4}{\sqrt{3}}\frac{dy}{dz} + y = \frac{1}{3}\,e^{2z/\sqrt{3}}$ cuja solução é $y = C_1 e^{z/\sqrt{3}} + C_2 e^{\sqrt{3}\,z} - e^{2z\sqrt{3}}$.

Então $y = C_1 e^{e^x} + C_2 e^{3e^x} - e^{2e^x}$, como antes.

12) Resolver $\dfrac{d^2y}{dx^2} - \operatorname{cotg} x \dfrac{dy}{dx} - \operatorname{sen}^2 x y = \cos x - \cos^3 x$.

Temos $S = -\operatorname{sen}^2 x$ e quando

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt{\frac{-S}{1}} = \operatorname{sen} x, \quad \frac{d^2z/dx^2 + R\,(dz/dx)}{(dz/dx)^2} = \frac{\cos x + (-\operatorname{cotg} x)(\operatorname{sen} x)}{\operatorname{sen}^2 x} = 0.$$

Então, a introdução de $z = -\cos x$ como nova variável independente, acarreta $\dfrac{d^2y}{dz^2} - y = \cos x = -z$ cuja solução geral é $y = C_1 e^z + C_2 e^{-z} + z$.

Substituindo z por $-\cos x$, temos $y = C_1 e^{-\cos x} + C_2 e^{\cos x} - \cos x$.

13) Resolver $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{2}{x}\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{1}{x^4} y = \dfrac{2x^2+1}{x^6}$.

Quando $\dfrac{dz}{dx} = \sqrt{S} = \sqrt{\dfrac{1}{x^4}} = \dfrac{1}{x^2}$, $\dfrac{d^2z/dx^2 + R\,(dz/dx)}{(dz/dx)^2} = 0$. Trabalhando-se com $z = -\dfrac{1}{x}$ como nova variável independente, temos: $\dfrac{d^2y}{dz^2} + y = 2 + z^2$ cuja solução geral é $y = C_1 \cos z + K \operatorname{sen} z + z^2$.

Substituindo z por $-1/x$, temos:

$$y = C_1 \cos(-1/x) + K \operatorname{sen}(-1/x) + 1/x^2 =$$
$$= C_1 \cos(1/x) + C_2 \operatorname{sen}(1/x) + 1/x^2.$$

14) Resolver $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \left(4x - \dfrac{1}{x}\right)\dfrac{dy}{dx} + 4x^2 y = 3xe^{-x^2}$.

Quando

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt{S} = \sqrt{4x^2} = 2x, \quad \frac{d^2z/dx^2 + R\,(dz/dx)}{(dz/dx)^2} = \frac{2 + (4x - 1x)\,2x}{(2x)^2} = 2.$$

Assim, $z = x^2$ como nova variável independente dá $\dfrac{d^2y}{dz^2} + 2\dfrac{dy}{dz} + y = \dfrac{3e^{-z}}{4\sqrt{z}}$ cuja solução geral é

$$y = C_1 e^{-z} + C_2 z e^{-z} + \frac{3/4}{(D+1)^2} e^{-z} z^{-1/2} = C_1 e^{-z} + C_2 z e^{-z} + z^{3/2} e^{-z}.$$

Substituindo z por x^2, temos $y = C_1 e^{-x^2} + C_2 x^2 e^{-x^2} + x^3 e^{-x^2}$.

15) Resolver $\left(D^2 - \dfrac{3}{x} D + \dfrac{3}{x^2}\right) y = 2x - 1$. (Problema 2).

a) A equação é equivalente a $D^2 y - D\left(\dfrac{3}{x} y\right) = D\left(D - \dfrac{3}{x}\right) y = 2x - 1$.

Fazendo $\left(D - \dfrac{3}{x}\right) y = v$, temos $Dv = 2x - 1$ e $v = x^2 - x + K$.

Daí $\left(D - \dfrac{3}{x}\right) y = x^2 - x + K$ sendo $\dfrac{1}{x^3}$ um fator de integração.

Então:

$$\frac{y}{x^3} = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{K}{x^3}\right) dx = \ln x + \frac{1}{x} + \frac{C_1}{x^2} + C_2$$

e

$$y = C_1 x + C_2 x^3 + x^2 (1 + x \ln x).$$

b) A equação $\left(xD^2 - 3D + \frac{3}{x}\right) y = 2x^2 - x$ é equivalente *a*

$$\left(D - \frac{3}{x}\right)(xD - 1)\, y = 2x^2 - x.$$

Fazendo $(xD - 1)\, y = v$, temos $\left(D - \frac{3}{x}\right) v = 2x^2 - x$ sendo $\frac{1}{x^3}$ um fator de integração.

Então $$\frac{v}{x^3} = \int \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx = 2 \ln x + \frac{1}{x} + K$$

e

$(xD-1)\, y = v = 2x^3 \ln x + x^2 + Kx^3$ ou $(D-1/x)\, y = 2x^2 \ln x + x + Kx^2$.

$1/x$ é um fator de integração, dando:

$$y/x = \int (2x \ln x + 1 + Kx)\, dx = x^2 \ln x - \tfrac{1}{2} x^2 + x + K_1 x^2 + C^2 =$$

$$= x^2 \ln x + x + C_1 x^2 + C_2$$

e

$$y = C_1 x^3 + C_2 x + x^2 (1 + x \ln x).$$

16) Resolver $[xD^2 + (1-x)\, D - 2\,(1+x)]\, y = e^{-x}(1 - 6x)$.

A equação é equivalente a $[xD + (1+x)]\,[D-2]\, y = e^{-x}(1-6x)$.

Fazendo $(D-2)\, y = v$, temos

$$[xD + 1 + x]v = e^{-x}(1-6x) \text{ ou } (D + \frac{1}{x} + 1)v = e^{-x}\left(\frac{1}{x} - 6\right).$$

xe^x é um fator de integração dando:

$vx\, e^x = \int (1-6x)\, dx = x - 3x^2 + K$ e $(D-2)\, y = v = (1-3x)e^{-x} + Ke^{-x}/x$.

e^{-2x} é um fator de integração, o que dá:

$$ye^{-2x} = \int [(1-3x)\, e^{-3x} + Ke^{-3x}/x]\, dx = xe^{-3x} + C_1 \int \frac{e^{-3x}}{x} dx + C^2$$

e

$$y = xe^{-x} + C_1 e^{2x} \int \frac{e^{-3x}}{x} dx + C_2 e^{2x}.$$

17) Resolver $[(x+3)\, D^2 - (2x+7)\, D + 2]\, y = (x+3)^2 e^x$.

A equação pode ser escrita do seguinte modo:

$$[(x+3)\, D - 1]\,[D-2]\, y = (x+3)^2 e^x.$$

Fazendo $(D-2)\, y = v$, temos:

$$[(x+3)\, D - 1]\, v = (x+3)^2 e^x \text{ ou } \left(D - \frac{1}{x+3}\right) v = (x+3)\, e^x.$$

Usando o fator de integração $1/(x+3)$, temos:

$$v/(x+3) = \int e^x\,dx = e^x + K$$

de modo que: $(D-2)\,y = v = (x+3)\,e^x + K\,(x+3)$.

Com o fator de integração e^{-2x}, temos:

$$ye^{-2x} = \int [(x+3)\,e^{-x} + K\,(x+3)\,e^{-2x}]\,dx =$$

$$= -xe^{-x} - 4e^{-x} + K\left(-\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{7}{4}e^{-2x}\right) + C_2$$

e $$y = -xe^x - 4e^x + C_1\,(2x+7) + C_2\,e^{2x}.$$

18) Mostrar que a equação de Riccati $\dfrac{dy}{dx} + yP(x) + y^2Q(x) = R(x)$, $Q(x) \neq 0$, reduz-se a uma equação diferencial linear de segunda ordem, fazendo-se $y = \dfrac{1}{Qu}\,\dfrac{du}{dx}$.

Como $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{Qu}\,\dfrac{d^2u}{dx^2} - \dfrac{1}{Qu^2}\left(\dfrac{du}{dx}\right)^2 - \dfrac{1}{Q^2u}\,\dfrac{dQ}{dx}\,\dfrac{du}{dx}$, a substituição acima acarreta:

$$\frac{1}{Qu}\,\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{1}{Qu^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 - \frac{1}{Q^2u}\,\frac{dQ}{dx}\,\frac{du}{dx} + \frac{P}{Qu}\,\frac{du}{dx} + \frac{1}{Qu^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 - R = 0$$

ou $$\frac{d^2u}{dx^2} + \left(P - \frac{1}{Q}\,\frac{dQ}{dx}\right)\frac{du}{dx} - RQu = 0.$$

19) Empregando o processo exposto no Problema 18, resolver

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}\,y + \frac{1}{2}\,x^3\,y^2 = \frac{1}{2x}.$$

A substituição $y = \dfrac{1}{Qu}\,\dfrac{du}{dx} = \dfrac{2}{x^3u}\,\dfrac{du}{dx}$ reduz a equação a:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \left(\frac{2}{x} - \frac{3x^2/2}{x^3/2}\right)\frac{du}{dx} - \frac{1}{2x}\cdot\frac{x^3}{2}\,u = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d^2u}{dx^2} - \frac{1}{x}\,\frac{du}{dx} - \frac{1}{4}\,x^2u = 0.$$

Por sua vez, a substituição $\dfrac{dz}{dx} = \sqrt{\dfrac{-S}{\frac{1}{4}}} = \sqrt{\dfrac{\frac{1}{4}x^2}{\frac{1}{4}}} = x$ reduz a equação a

$\dfrac{d^2u}{dz^2} - \dfrac{1}{4}\,u = 0$ cuja solução é $u = C_1e^{\frac{1}{2}z} + C_2e^{-\frac{1}{2}z}$.

Então

$$y = \frac{1}{Qu}\,\frac{du}{dx} = \frac{2}{x^3}\cdot\frac{\frac{1}{2}\left(C_1e^{\frac{1}{2}z} - C_2e^{-\frac{1}{2}z}\right)}{C_1e^{\frac{1}{2}z} + C_2e^{-\frac{1}{2}z}}\,x = \frac{1}{x^2}\cdot\frac{e^{\frac{1}{4}x^2} - ke^{-\frac{1}{4}x^2}}{e^{\frac{1}{4}x^2} + ke^{-\frac{1}{4}x^2}},$$

onde $k = \dfrac{C_2}{C_1}$.

20) Resolver $\frac{dy}{dx} - (\text{tg}\, x + 3\cos x)\, y + y^2 \cos^2 x = -2.$

A substituição $y = \frac{1}{Qu}\frac{du}{dx} = \frac{\sec^2 x}{u}\frac{du}{dx}$ reduz a equação a

$$\frac{d^2u}{dx^2} + (\text{tg}\, x - 3\cos x)\frac{du}{dx} + 2u\cos^2 x = 0.$$

Por sua vez, a substituição $\frac{dz}{dx} = \sqrt{\frac{2\cos^2 x}{2}} = \cos x$, ou $z = \text{sen}\, x$, reduz a equação a $\frac{d^2u}{dz^2} - 3\frac{du}{dz} + 2u = 0$ cuja solução é $u = C_1 e^z + C_2 e^{2z}$.

Então

$$y = \frac{1}{Qu}\frac{du}{dx} = \frac{\sec^2 x\,(C_1 e^z + 2C_2 e^{2z})}{C_1 e^z + C_2 e^{2z}}\cos x = \sec x\,\frac{e^{\text{sen}\, x} + 2ke^{2\,\text{sen}\, x}}{e^{\text{sen}\, x} + ke^{2\,\text{sen}\, x}}.$$

PROBLEMAS PROPOSTOS

Resolver:

21) $xy'' - (x+2)y' + 2y = 0$ *Resp.:* $y = C_1 e^x + C_2(x^2 + 2x + 2)$

22) $(1 + x^2)y'' - 2xy' + 2y = 2$ *Resp.:* $y = C_1 x + C_2(x^2 - 1) + x^2$

23) $(x^2 + 4)y'' - 2xy' + 2y = 8$ *Resp.:* $y = C_1(x^2 - 4) + C_2 x + x^2$

24) $(x+1)y'' - (2x+3)y' + (x+2)y = (x^2 + 2x + 1)e^{2x}$
Resp.: $y = C_1 e^x + C_2 e^x (x+1)^2 + xe^{2x}$

25) $y'' - 2\,\text{tg}\, x\, y' - 10y = 0$ *Resp.:* $y = (C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x})\sec x$

26) $x^2 y'' - x(2x+3)y' + (x^2 + 3x + 3)y = (6 - x^2)e^x$
Resp.: $y = C_1 x^3 e^x + C_2 xe^x + e^x(x^2 + 2)$

27) $4x^2 y'' + 4x^3 y' + (x^2 + 1)^2 y = 0$ *Resp.:* $y = \sqrt{x}\, e^{-x^2/4}(C_1 + C_2 \ln x)$

28) $x^2 y'' + (x - 4x^2)y' + (1 - 2x + 4x^2)y = (x^2 - x + 1)e^x$
Resp.: $y = e^{2x}(C_1 \cos \ln x + C_2 \,\text{sen} \ln x) + e^x$

29) $xy'' - y' + 4x^3 y = 0$ *Resp.:* $y = C_1 \,\text{sen}\, x^2 + C_2 \cos x^2$

30) $x^4 y'' + 2x^3 y' + y = (1 + x)/x$
Resp.: $y = C_1 \cos(1/x) + C_2 \,\text{sen}\,(1/x) + (1 + x)/x$

31) $x^3 y'' + 4x^7 y' + y = 1/x^3$ *Resp.:* $y = C_1 \cos(1/3x^3) + C_2 \,\text{sen}\,(1/3x^3) + 1/x^3$

32) $(x\,\text{sen}\, x + \cos x)y'' - x\cos x\, y' + y\cos x = x$
Resp.: $y = C_1 x + C_2 \cos x - \text{sen}\, x$

33) $xy'' - 3y' + 3y/x = x + 2$ *Resp.:* $y = C_1 x + C_2 x^3 - x^2 - x\ln x$

34) Resolver o Problema 21 pela fatoração.

35) $[(x+1)D^2 - (3x+4)D + 3]\,y = (3x + 2)e^{3x}$
Resp.: $y = C_1(3x + 4) + C_2 e^{3x} + xe^{3x}$

36) $x^2 y'' - 4xy' + (6 + 9x^2)y = 0$ *Resp.:* $y = x^2(C_1 \cos 3x + C_2 \,\text{sen}\, 3x)$

37) $xy'' + 2y' + 4xy = 4$ *Resp.:* $y = (C_1 \cos 2x + C_2 \,\text{sen}\, 2x + 1)/x$

38) $(1 + x^2)y'' - 2xy' + 2y = (1 - x^2)/x$ *Resp.:* $y = C_1(x^2 - 1) + C_2 x + x\ln x$

CAPÍTULO XIX

EQUAÇÕES LINEARES COM COEFICIENTES VARIÁVEIS

Tipos Diversos

Neste Capítulo estudaremos vários tipos de equações diferenciais de ordem superior, com coeficientes variáveis. Não há processo geral, semelhante ao que vimos nas equações lineares. Entretanto, para as equações que consideraremos, o processo consistirá em determinarmos uma equação de grau mais baixo, partindo da equação dada. Por exemplo, se a equação fôr de terceira ordem, procuraremos uma de segunda ordem, que se resolverá por um dos métodos dos capítulos anteriores. Se isso fôr conseguido, a equação dada estará resolvida.

Ausência da Variável Dependente. Se y não aparecer na equação, isto é, se a equação fôr da forma

$$(1) \qquad f\left(\frac{d^n y}{dx^n}, \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}, \ldots\ldots, \frac{dy}{dx}, x\right) = 0,$$

a substituição $\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$, ... diminuirá a ordem de uma unidade.

EXEMPLO. A equação $x^2 \frac{d^3y}{dx^3} + 2\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dy}{dx} - 3x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x^3 = 0$, de terceira ordem, reduz-se a $x^2\frac{d^2p}{dx^2} + 2p\frac{dp}{dx} - 3xp^2 + x^3 = 0$, de segunda ordem, pela substituição $\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$, $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^2p}{dx^2}$.

Se a equação dada fôr da forma

$$(2) \qquad f\left(\frac{d^n y}{dx^n}, \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}, \ldots\ldots, \frac{d^k y}{dx^k}, x\right) = 0,$$

a substituição $\frac{d^k y}{dx^k} = q$, $\frac{d^{k+1}y}{dx^{k+1}} = \frac{dq}{dx}$, ... reduzirá a ordem de k unidades. (Ver Problemas 1-5).

Ausência da Variável Independente. Se x não aparecer na equação, isto é, se a equação fôr da forma

$$(3) \qquad f\left(\frac{d^n y}{dx^n}, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}, \ldots\ldots, \frac{dy}{dx}, y\right) = 0,$$

a substituição $\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$,

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dy}\left(p\frac{dp}{dy}\right)\frac{dy}{dx} = \left\{p\frac{d^2p}{dy^2} + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2\right\}\frac{dy}{dx} = p^2\frac{d^2p}{dy^2} + p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 \text{ etc.,}$$

reduzirá a ordem da equação diferencial de uma unidade.

EXEMPLO. A substituição $\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{d^2y}{dx^2} = p\frac{dp}{dy}$, $\frac{d^3y}{dx^3} = p^2\frac{d^2p}{dy^2} + p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2$ reduz a equação $yy''' - y''(y')^2 = 1$, de terceira ordem, a

$$yp^2\frac{d^2p}{dy^2} + py\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 - p^3\frac{dp}{dy} = 1,$$

de segunda ordem. (Ver Problemas 6-10).

Equação Diferencial Linear com Integral Particular Conhecida. Se uma integral particular $y = u(x)$ da equação

$$(4) \qquad (P_0D^n + P_1D^{n-1} + \cdots\cdots + P_{n-1}D + P_n)y = 0$$

fôr conhecida, a substituição $y = uv$ transformará

$$(5) \qquad (P_0D^n + P_1D^{n-1} + \cdots\cdots + P_{n-1}D + P_n)y = Q(x)$$

em uma equação da mesma ordem, porém fará desaparecer a variável dependente. Por sua vez, a ordem desta equação pode ser reduzida pelo processo visto acima. A equação (4) é denominada *equação reduzida* da equação (5).

EXEMPLO. Como $y = x$ é uma solução de $(D^2 - xD + 1)y = 0$, a substituição $y = vx$, $\frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v$, $\frac{d^2y}{dx^2} = x\frac{d^2v}{dx^2} + 2\frac{dv}{dx}$ reduz $(D^2 - xD + 1)y = e^{2x}$ a $\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{2-x^2}{x}\frac{dv}{dx} = \frac{e^{2x}}{x}$. Nesta, foi eliminada a variável dependente v e o processo visto na primeira seção, acima, pode ser aplicado.

(Ver Problemas 11-14).

Equações Diferenciais Exatas. A equação diferencial

$$(6) \qquad f\left(\frac{d^n y}{dx^n}, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}, \ldots\ldots, \frac{dy}{dx}, y, x\right) = Q(x)$$

é denominada equação diferencial exata se puder ser obtida derivando-se, uma vez, uma equação

$$(7) \qquad g\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}, \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}, \ldots\ldots, \frac{dy}{dx}, y, x\right) = Q_1(x) + C$$

cuja ordem é uma unidade menor. Por exemplo, a equação

$$3y^2y''' + 14yy'y'' + 4(y')^3 + 12y'y'' = 2x$$

é uma equação diferencial exata porque pode ser obtida derivando-se, uma vez, a equação

$$3y^2y'' + 4y(y')^2 + 6(y')^2 = x^2 + C.$$

A equação linear (4) é uma equação diferencial exata se

$$P^n - P'_{n-1} + P''_{n-2} + \cdots\cdots + (-1)P_0^{(n)} \equiv 0.$$

Exemplo. Consideremos a equação $(x^3 - 2x)y''' + (8x^2 - 5)y'' + 15xy' + 5y = 0$ em que $P_3 = 5$, $P_2 = 15x$ e $P'_2 = 15$, $P_1 = 8x^2 - 5$ e $P''_1 = 16$, e $P_0 = x^3 - 2x$ e $P'''_0 = 6$. A equação é uma equação diferencial exata, porque:

$$P_3 - P'_2 + P''_1 - P'''_0 = 5 - 15 + 16 - 6 = 0.$$

A equação dada é a derivada de: $(x^3 - 2x)y'' + (5x^2 - 3)y' + 5xy = C$.

Se a equação (6) não fôr linear, não existe nenhum processo simples para se verificar se se trata ou não de uma equação diferencial exata. Neste caso, mostra-se que (6) é uma equação diferencial exata, determinando-se a equação de ordem uma unidade abaixo, da qual ela poderá ser obtida por uma derivação.

Se (6) não fôr uma equação diferencial exata; é possível acharse um fator de integração, porém, ainda aqui, não se tem uma regra geral para a determinação dêsse fator.

(Ver Problemas 15-21).

PROBLEMAS RESOLVIDOS

VARIÁVEL DEPENDENTE AUSENTE

1) Resolver $2\dfrac{d^2y}{dx^2} - \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + 4 = 0$.

A substituição $\dfrac{dy}{dx} = p$ reduz a equação a $2\dfrac{dp}{dx} = p^2 - 4$ ou $\dfrac{2\,dp}{p^2 - 4} = dx$.

Integrando,

$$\tfrac{1}{2}\ln\frac{p-2}{p+2} = x + \ln K;\quad \frac{p-2}{p+2} = C_1e^{2x},\quad p = \frac{2(1 + C_1e^{2x})}{1 - C_1e^{2x}} = 2\left(1 + \frac{2C_1e^{2x}}{1 - C_1e^{2x}}\right)$$

e $y = 2x - 2\ln(1 - C_1e^{2x}) + C^2$.

2) Resolver $x\dfrac{d^3y}{dx^3} - 2\dfrac{d^2y}{dx^2} = 0.$

A substituição $\dfrac{d^2y}{dx^2} = q$ reduz a equação a $x\dfrac{dq}{dx} - 2q = 0.$

Então $\ln q = \ln x^2 + \ln K,\ q = \dfrac{d^2y}{dx^2} = Kx^2$ e $y = C_1x^4 + C_2x + C_3.$

3) Resolver $\dfrac{d^4y}{dx^4} \cdot \dfrac{d^3y}{dx^3} = 1.$

A substituição $\dfrac{d^3y}{dx^3} = q$ reduz a equação a $q\dfrac{dq}{dx} = 1$ e $q^2 = 2x + C_1.$

Então $q = \dfrac{d^3y}{dx^3} = \pm\,(2x+C_1)^{1/2},\ \dfrac{d^2y}{dx^2} = \pm\dfrac{1}{3}(2x+C_1)^{3/2} + K,$

$\dfrac{dy}{dx} = \pm\dfrac{1}{15}(2x+C_1)^{5/2} + Kx + K_3,\ y = \pm\dfrac{1}{105}(2x+C_1)^{7/2} + K_2x^2 + K_3x + K^4$

ou $$105\,y = \pm\,(2x + C_1)^{7/2} + C_2x^2 + C_3x + C^4.$$

4) Resolver $\left(\dfrac{d^3y}{dx^3}\right)^2 + x\dfrac{d^3y}{dx^3} - \dfrac{d^2y}{dx^2} = 0.$

A substituição $\dfrac{d^2y}{dx^2} = q$ reduz a equação a $\left(\dfrac{dq}{dx}\right)^2 + x\dfrac{dq}{dx} - q = 0$ ou $q = x\dfrac{dq}{dx} + \left(\dfrac{dq}{dx}\right)^2$, que é uma equação de Clairaut.

Então

$$q = \frac{d^2y}{dx^2} = Kx + K^2,\quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}Kx^2 + K^2x + C_2 = Cx^2 + 4C^2x + C_2,$$

e $$y = \frac{1}{3}Cx^3 + 2C^2x^2 + C_2x + C_3 = C_1x^3 + 18C_1^2x^2 + C_2x + C_3.$$

5) Resolver $(1 + 2x)\dfrac{d^3y}{dx^3} + 4x\dfrac{d^2y}{dx^2} - (1-2x)\dfrac{dy}{dx} = e^{-x}.$

A transformação $p = \dfrac{dy}{dx}$ reduz a equação a

$(1 + 2x)p'' + 4xp' - (1-2x)p = e^{-x}$ ou $p'' + \dfrac{4x}{1+2x}p' - \dfrac{1-2x}{1+2x}p = \dfrac{e^{-x}}{1+2x}.$

Como $1 - R + S = 0$, empregaremos a substituição

$$p = e^{-x}v,\quad p' = e^{-x}(v'-v),\quad p'' = e^{-x}(v''-2v'+v)$$

o que nos dá: $(1+2x)v'' - 2v' = 1$ ou $(1+2x)^2v'' - 2(1+2x)v' = (1+2x)$, que é uma equação diferencial linear de Legendre. A substituição $1+2x = e^t$ reduz a equação a $[4\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-1) - 4\mathfrak{D}]v = e^t$ ou $\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-2)v = \frac{1}{4}e^t.$

Então $v = K_1 + K_2 e^{2t} - \frac{1}{4} e^t = K_1 + K_2 (1 + 2x)^2 - \frac{1}{4} (1 + 2x)$,

$$p = \frac{dy}{dx} = e^{-x} v = K_1 e^{-x} + K_2 (1 + 2x)^2 e^{-x} - \frac{1}{4} (1 + 2x) e^{-x},$$

e
$$y = C_1 e^{-x} + C_2 (4x^2 + 12x + 13) e^{-x} + C_3 + \frac{1}{4} (2x + 3) e^{-x}$$

ou
$$y = Ae^{-x} + B (x^2 + 3x) e^{-x} + C + \frac{1}{2} xe^{-x}.$$

VARIÁVEL INDEPENDENTE AUSENTE

6) Resolver $y'' = (y')^3 + y'$.

A substituição $y' = p$, $y'' = p \dfrac{dp}{dy}$ reduz a equação a $p \dfrac{dp}{dy} = p^3 + p$ ou $\dfrac{dp}{dy} = p^2 + 1$.

Então $\dfrac{dp}{p^2 + 1} = dy$, $\quad \text{arc tg}\, p = y + K_1 \quad$ e $\quad p = \dfrac{dy}{dx} = \text{tg}\,(y + K_1)$.

Daí $\text{cotg}\,(y + K_1)\, dy = dx$, $\ln \text{sen}\,(y + K_1) = x + K_2$, $\text{sen}\,(y + K_1) = C_2 e^x$ e $y = \text{arc sen}\, C_2 e^x + C_1$.

7) Resolver $yy'' = 2(y')^2 - 2y'$.

A substituição $y' = p$, $y'' = p \dfrac{dp}{dy}$ reduz a equação a $p\,(y \dfrac{dp}{dy} - 2p + 2) = 0$.

Aqui $p = 0$ e $y = C$ é uma solução, ou

$$\frac{dp}{p-1} = 2\frac{dy}{y}, \quad \ln(p-1) = \ln A^2 y^2, \quad p = A^2 y^2 + 1, \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{1 + A^2 y^2} = dx.$$

Então $\dfrac{1}{A} \text{arc tg}\, Ay = x + K$, $\text{arc tg}\, Ay = Ax + B$ e $Ay = \text{tg}\,(Ax + B)$.

8) Resolver $yy'' - (y')^2 = y^2 \ln y$.

A substituição $y' = p$, $y'' = p \dfrac{dp}{dy}$ reduz a equação a

$$yp \frac{dp}{dy} - p^2 = y^2 \ln y \quad \text{ou} \quad \frac{2y^2\, p\, dp - 2p^2\, y\, dy}{y^4} = 2 \ln y \frac{dy}{y}.$$

Então
$$\frac{p^2}{y^2} = \ln^2 y + C, \quad \frac{dy}{y\sqrt{\ln^2 y + C}} = \pm\, dx$$

e
$$\ln(\ln y + \sqrt{\ln^2 y + C}) = \pm\, x + \ln K.$$

Daí $\ln y + \sqrt{\ln^2 y + C} = Ke^{\pm x}$, $\sqrt{\ln^2 y + C} = Ke^{\pm x} - \ln y$

e $$C = K^2 e^{\pm 2x} - 2Ke^{\pm x} \ln y,$$

que pode ser escrito:

$$\ln y = C_1 e^{\pm x} + C_2 e^{\mp x} \text{ ou, finalmente, } \ln y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}$$

porque C_1 e C_2 são constantes arbitrárias.

9) Resolver $yy'' + (y')^2 = y^2$.

A substituição $y' = p$, $y'' = p\dfrac{dp}{dy}$ reduz a equação a $py\dfrac{dp}{dy} + p^2 = y^2$ sendo y um fator de integração. A solução de $py^2\,dp + p^2 y\,dy = y^3\,dy$ é $2p^2 y^2 = y^4 + C^2$.

Agora, $$\sqrt{2}\,p = \sqrt{2}\,\frac{dy}{dx} = \pm\frac{\sqrt{y^4 + C^2}}{y}$$

cuja solução é $$\sqrt{2}\,\text{senh}^{-1}\frac{y^2}{C} = \pm 2x + K\sqrt{2}.$$

Então

$$\text{senh}^{-1}\frac{y^2}{C} = \pm\sqrt{2}\,x + K,\quad \frac{y^2}{C} = \text{senh}(\pm\sqrt{2}\,x + K) = \pm\,\text{senh}(\sqrt{2}\,x + K_1)$$

e $$y^2 = C_1\,\text{senh}(\sqrt{2}\,x + C_2).$$

10) Resolver $\dfrac{d^2y}{dx^2} = e^{2y}$ sabendo que $y = y' = 0$ quando $x = 0$.

Fazendo $y'' = p\dfrac{dp}{dy}$, temos $2p\,dp = 2e^{2y}dy$ cuja solução é $p^2 = e^{2y} + K$.

Da condição inicial: $0 = 1 + K$ e $K = -1$. Daí $p = \dfrac{dy}{dx} = \pm\sqrt{e^{2y} - 1}$ que, pela substituição $e^{2y} = z$, transforma-se em $\dfrac{dz}{2z\sqrt{z-1}} = \pm\,dx$. A solução desta equação é: $\text{arc tg}\sqrt{z-1} = \pm x + C$ ou, nas variáveis iniciais, $\text{arc tg}\sqrt{e^{2y}-1} = \pm x + C$. A condição inicial exige $C = 0$ de modo que $\sqrt{e^{2y}-1} = \text{tg}(\pm x) = \pm\,\text{tg}\,x$ e, finalmente, $e^{2y} = \sec^2 x$.

Note-se que a forma da solução da equação dada depende do sinal da primeira constante de integração. Se em $p^2 = e^{2y} + K$, K fôr positivo e $= A^2$, resolveremos

$$\frac{dz}{2z\sqrt{z + A^2}} = \pm\,dx \cdot \text{ o que nos dá } \frac{1}{2A}\ln\frac{\sqrt{z + A^2} - A}{\sqrt{z + A^2} + A} = \pm x + C.$$

Então $$\frac{\sqrt{z + A^2} - A}{\sqrt{z + A^2} + A} = Be^{\pm 2Ax} \quad\text{e}\quad \frac{A(1 + Be^{\pm 2Ax})}{1 - Be^{\pm 2Ax}} = \sqrt{z + A^2}.$$

Como A é arbitrário, podemos escrever: $z + A^2 = \dfrac{A^2(1 + Be^{2Ax})^2}{(1 - Be^{2Ax})^2}$ e daí $z = e^{2y} = \dfrac{4A^2\,Be^{2Ax}}{(1 - Be^{2Ax})^2}$ ou $e^{y} = \dfrac{2ACe^{Ax}}{1 - C^2 e^{2Ax}}$.

EQUAÇÃO DIFERENCIAL LINEAR COM INTEGRAL PARTICULAR CONHECIDA

11) Resolver $x^3(\operatorname{sen} x)y''' - (3x^2 \operatorname{sen} x + x^3 \cos x)y'' +$
$+ (6x \operatorname{sen} x + 2x^2 \cos x)y' - (6 \operatorname{sen} x + 2x \cos x)y = 0.$

Por inspeção, vê-se que $y = x$ é uma integral particular.

Fazendo-se $y = xv$, $y' = xv' + v$, $y'' = xv'' + 2v'$, $y''' = xv''' + 3v''$, a equação se reduz a $\operatorname{sen} x \dfrac{d^3v}{dx^3} - \cos x \dfrac{d^2v}{dx^2} = 0$. Por sua vez, a substituição $\dfrac{d^2v}{dx^2} = q$ reduz esta equação a $\operatorname{sen} x \dfrac{dq}{dx} - q \cos x = 0$ ou $\dfrac{dq}{q} = \operatorname{cotg} x\, dx$.

Então $\quad \ln q = \ln \operatorname{sen} x + \ln C, \quad q = \dfrac{d^2v}{dx^2} = C \operatorname{sen} x$

e
$$q = \frac{y}{x} = C_1 \operatorname{sen} x + C_2 x + C_3 .$$

Assim, a solução é: $y = C_1 x \operatorname{sen} x + C_2 x^2 + C_3 x$.

12) Resolver $(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)y^{\text{iv}} - x^3 y''' + 3x^2 y'' - 6xy' + 6y = 0.$

Por inspeção, vê-se que $y = x$ é uma integral particular.

A substituição $y = xv$, $y' = xv' + v$, $y'' = xv'' + 2v'$, $y''' = xv''' + 3v''$, $y^{\text{iv}} = xv^{\text{iv}} + 4v'''$ reduz a equação a

$$(x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 6x)v^{\text{iv}} + (-x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 24x - 24)v''' = 0.$$

Fazendo $\dfrac{d^3v}{dx^3} = q$, esta equação transforma-se em:

$$x(x^3 - 3x^3 + 6x - 6)\frac{dq}{dx} + (-x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 24x - 24)q = 0$$

ou
$$\frac{dq}{q} + \left(-1 + \frac{4}{x} - \frac{3x^2 - 6x + 6}{x^3 - 3x^2 + 6x - 6}\right)dx = 0.$$

Integrando: $\ln q = x - 4 \ln x + \ln(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + \ln A$

ou
$$q = \frac{d^3v}{dx^3} = A\,\frac{x^3 - 3x^2 + 6x - 6}{x^4}\,e^x.$$

Então

$$\frac{d^2v}{dx^2} = A\int \frac{x^3 - 3x^2 + 6x - 6}{x^4}\,e^x\,dx = A \cdot \frac{1}{D}\left(\frac{x^3 - 3x^2 + 6x - 6}{x^4}e^x\right) =$$

$$= Ae^x\,\frac{1}{D+1}\left(\frac{x^3 - 3x^2 + 6x - 6}{x^4}\right) = Ae^x\,\frac{1}{D+1}\left(\frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{6}{x^3} - \frac{6}{x^4}\right).$$

Agora, $D\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$, $D^2\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2}{x^3}$ e $D^3\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{6}{x^4}$,

de modo que

$$\frac{1}{D+1}\left(\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{6}{x^3}-\frac{6}{x^4}\right)=\frac{1}{D+1}\left[\frac{1}{x}+3D\left(\frac{1}{x}\right)+3D^2\left(\frac{1}{x}\right)+D^3\left(\frac{1}{x}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{D+1}(D+1)^3\left(\frac{1}{x}\right)=$$

$$=(D^2+2D+1)\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x^2-2x+2}{x^3}.$$

Então $\frac{d^2v}{dx^2} = A\,\frac{x^2-2x+2}{x^3}\,e^x + B$, $\frac{dv}{dx} = A\,\frac{(x-1)\,e^x}{x^2} + Bx + C$,

$$v = \frac{y}{x} = C_1\,\frac{e^x}{x} + C_2 x^2 + C_3 x + C_4 \quad \text{e} \quad y = C_1 e^x + C_2 x^3 + C_4 x^2 + C_4 x.$$

Neste exemplo é bem fácil ver que $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$ e $y = e^x$ são integrais particulares. Assim, a solução geral poderia ser escrita imediatamente.

13) Resolver $(2\,\text{sen}\,x - x\,\text{sen}\,x - x\cos x)\,y''' + (2x\cos x - \text{sen}\,x - \cos x)\,y'' +$

$$+\,x\,(\text{sen}\,x - \cos x)\,y' + (\cos x - \text{sen}\,x)\,y = 2\,\text{sen}\,x - x\cos x - x\,\text{sen}\,x.$$

Por inspeção, vê-se que $y = x$, $y = e^x$ e $y = \text{sen}\,x$ são integrais particulares da equação reduzida. Obteremos uma integral particular da equação dada, empregando o *método da variação dos parâmetros*.

Tomemos

$$y = L_1 x + L_2 e^x + L_3\,\text{sen}\,x.$$

Então

$$y' = L_1 + L_2 e^x + L_3 \cos x + (L_1' x + L_2' e^x + L_3'\,\text{sen}\,x)$$

e façamos

$$A)\quad L_1' x + L_2' e^x + L_3'\,\text{sen}\,x = 0.$$

Agora

$$y'' = L_2 e^x - L_3\,\text{sen}\,x + (L_1' + L_2' e^x + L_3' \cos x)$$

e temos

$$B)\quad L_1' = L_2' e^x + L_3' \cos x = 0.$$

Então

$$y''' = L_2 e^x - L_3 \cos x + (L_2' e^x - L_3'\,\text{sen}\,x)$$

e daí

$$C)\quad L_2' e^x - L_3'\,\text{sen}\,x = 2\,\text{sen}\,x - x\cos x - x\,\text{sen}\,x.$$

Resolvendo o sistema *A*), *B*), *C*) temos:

$L_1' = -\operatorname{sen} x + \cos x$ e $L_1 = \cos x + \operatorname{sen} x$,

$L_2' = -e^{-x}(x\cos x - \operatorname{sen} x)$

$$e \quad L_2 = \tfrac{1}{2}\, xe^{-x}(-\operatorname{sen} x + \cos x) - e^{-x}\operatorname{sen} x - \tfrac{1}{2}\, e^{-x}\cos x,$$

$L_3' = -1 + x$ e $L_3 = -x + \tfrac{1}{2}\, x^2$.

Então, a solução geral é

$$y = C_1 x + C_2 e^x + C_3 \operatorname{sen} x + \frac{1}{2} x^2 \operatorname{sen} x + \frac{3}{2} x \cos x - \frac{1}{2} x \operatorname{sen} x - \frac{1}{2}\cos x.$$

14) Resolver $(x^2 + x)\, y''' - (x^2 + 3x + 1)\, y'' +$

$$+ \left(x + 4 + \frac{2}{x}\right) y' - \left(1 + \frac{4}{x} + \frac{2}{x^2}\right) y = 3x^2 (x + 1)^2.$$

Por inspeção, vê-se que $y = x$ é uma integral particular da equação reduzida. A substituição $y = xv$ reduz a equação dada a:

$$(x^2 + x)v''' - (x^2 - 2)v'' - (x + 2)v' = 3x\,(x + 1)^2$$

e, por sua vez, a substituição $v' = u$ dá:

$$A) \qquad (x^2 + x)\, u'' - (x^2 - 2)\, u' - (x + 2)\, u = 3x\,(x + 1)^2.$$

Como a soma dos coeficientes da equação reduzida de *A*) é idênticamente nula, $u = e^x$ é uma integral particular e podemos fazer:

$$u = e^x w, \quad u' = e^x w' + e^x w, \quad u'' = e^x w'' + 2e^x w' + e^x w$$

para reduzir *A*) a

$$(x^2 + x)\, w'' + (x + 2x + 2)\, w' = 3xe^{-x}(x + 1)^2.$$

Com a substituição $w' = z$, temos

$$(x^2 + x)\, z' + (x^2 + 2x + 2)\, z = 3xe^{-x}(x + 1)^2$$

ou $\dfrac{dz}{dx} + \left(1 + \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x+1}\right) z = 3e^{-x}(x + 1)$ para a qual $\dfrac{x^2 e^x}{x+1}$ é um fator de integração.

Então:

$$z\,\frac{x^2 e^x}{x+1} = \int 3x^2\,dx = x^3 + K_1, \quad \frac{dw}{dx} = z = x(x + 1)\, e^{-x} + K_1\,\frac{x+1}{x^2}\, e^{-x},$$

$$\frac{u}{e^x} = w = -x^2 e^{-x} - 3xe^{-x} - 3e^{-x} + C_1\,\frac{e^{-x}}{x} + C_2,$$

$$\frac{dv}{dx} = u = -x^2 - 3x - 3 + \frac{C_1}{x} + C_2\, e^x$$

e $\qquad y = xv = -\dfrac{x^4}{3} - \dfrac{3}{2}\, x^3 - 3x^2 + C_1\, x \ln x + C_2\, xe^x + C_3\, x.$

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS EXATAS

15) Mostrar que $P_0(x)y^{iv}+P_1(x)y'''+P_2(x)y''+P_3(x)y'+P_4(x)y=0$ é uma equação diferencial exata se (e sòmente se), $P_4-P_3'+P_2''-P_1'''+P_0^{iv}=0$.

Admitamos que a equação diferencial dada foi obtida derivando

$$R_0(x)y'''+R_1(x)y''+R_2(x)y'+R_3(x)y=C_1.$$

Como esta derivação dá:

$$R_0y^{iv}+(R_0'+R_1)y'''+(R_1'+R_2)y''+(R_2'+R_3)y'+R_3'y=0,$$

temos

$$P_0=R_0,\quad P_1=R_0'+R_1,\quad P_2=R_1'+R_2,\quad P_3=R_2'+R_3,\ \text{e}\ P_4=R_3'.$$

Então:

$$P_4-P_3'+P_2''-P_1'''+P_0^{iv}=R_3'-(R_2''+R_3')+(R_1'''+R_2'')-(R_0^{iv}+R_1''')+R_0^{iv}=0.$$

Inversamente, suponhamos $P_4-P_3'+P_2''-P_1'''+P_0^{iv}=0$. Como

$$\frac{d}{dx}[P_0y'''+(P_1-P_0')y''+(P_2-P_1'+P_0'')y'+(P_3-P_2'+P_1''-P_0''')y]=$$

$$=P_0y^{iv}+P_1y'''+P_2y''+P_3y'-(-P_3'+P_2''-P_1'''+P_0^{iv})y=$$

$$=P_0y^{iv}+P_1y'''+P_2y''+P_3y'+P_4y,$$

a equação dada é uma equação diferencial exata.

16) Resolver $xy'''+(x^2+x+3)y''+(4x+2)y'+2y=0$.

É uma equação diferencial exata porque

$$P_3-P_2'+P_1''-P_0'''=2-4+2-0=0.$$

Consideremos o primeiro membro $xy'''+(x^2+x+3)y''+(4x+2)y'+2y$.

Para obter o primeiro têrmo devemos derivar xy''. Então $\frac{d}{dx}(xy'')=$ $=xy'''+y''$ que subtraído do primeiro membro da equação, dá: $(x^2+x+2)y''+(4x+2)y'+2y$. Para obter o primeiro têrmo da relação resultante, devemos derivar $(x^2+x+2)y'$. Tirando $\frac{d}{dx}(x^2+x+2)y'=$ $=(x^2+x+2)y''+(2x+1)y'$ da expressão acima, temos:

$$(2x+1)y'+2y=\frac{d}{dx}(2x+1)y.$$

Então, a equação dada é obtida pela derivação de

$$A)\quad xy''+(x^2+x+2)y'+(2x+1)y=C_1.$$

Como $P_2 - P_1' + P_0'' = (2x+1) - (2x+1) + 0 = 0$, trataremos o primeiro membro de A) tal como fizemos com o primeiro membro da equação original.

Subtraímos $\frac{d}{dx}(xy') = xy'' + y'$ e temos

$$(x^2+x+1)\,y' + (2x+1)\,y = \frac{d}{dx}(x^2+x+1)\,y.$$

Assim, A) é a derivada de

$$B) \quad xy' + (x^2+x+1)\,y = C_1 x + C_2,$$

equação diferencial linear para a qual $xe^{\frac{1}{2}x(x+2)}$ é um fator de integração.

Então, a solução geral da equação dada é

$$xye^{\frac{1}{2}x(x+2)} = C_1\int xe^{\frac{1}{2}x(x+2)}\,dx + C_2\int e^{\frac{1}{2}x(x+2)}\,dx + C_3.$$

É conveniente adotar o esquema que se segue:

$$\begin{array}{ll}
 & xy''' + (x^2+x+3)\,y'' + (4x+2)\,y' + 2y = 0 \\
xy'' & \underline{xy''' + \qquad\qquad y''} \\
 & (x^2+x+2)\,y'' + (4x+2)\,y' + 2y \\
(x^2+x+2)\,y' & \underline{(x^2+x+2)\,y'' + (2x+1)\,y'} \\
 & (2x+1)\,y' + 2y \\
(2x+1)\,y & (2x+1)\,y' + 2y \\
A) & xy'' + (x^2+x+2)\,y' + (2x+1)\,y = C_1 \\
xy' & \underline{xy'' + \qquad\qquad y'} \\
 & (x^2+x+1)\,y' + (2x+1)\,y \\
(x^2+x+1)\,y & (x^2+x+1)\,y' + (2x+1)\,y \\
B) & xy' + (x^2+x+1)\,y = C_1 x + C_2.
\end{array}$$

17) Resolver $2y\frac{d^3y}{dx^3} + 6\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}$.

$$\begin{array}{lll}
\text{Temos} & & 2y\frac{d^3y}{dx^3} + 6\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dy}{dx} \\
 & 2y\frac{d^2y}{dx^2} & \underline{2y\frac{d^3y}{dx^3} + 2\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dy}{dx}} \\
 & 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 & 4\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dy}{dx}
\end{array}$$

Então, a equação é uma equação diferencial exata, obtida pela derivação de

$$2y\frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = -\int\frac{1}{x^2}\,dx = \frac{1}{x} + K_1.$$

Uma segunda integração dá $2y\dfrac{dy}{dx} = \ln x + K_1 x + K_2$ cuja solução é

$$y^2 = x \ln x + C_1 x^2 + C_2 x + C_3 .$$

18) Resolver $(1 + 3xy^2)\, y''' + 9\,(y^2 + 2xyy'\,(y'' + 18y\,(y')^2 + 6x\,(y')^3 = 6.$

Temos

$$\begin{array}{ll}
 & (1 + 3xy^2)\, y''' + 9y^2\, y'' + 18xyy'\, y'' + 18y\,(y')^2 + 6x\,(y')^3 \\
(1 + 3xy^2)\, y'' & \underline{(1 + 3xy^2)\, y''' + 3y^2\, y'' + \;\; 6xyy'\, y''} \\
 & 6y^2\, y'' + 12xyy'\, y'' + 18y\,(y')^2 + 6x\,(y')^3 \\
6y^2\, y' & \underline{6y^2\, y'' \qquad\qquad\quad + 12y\,(y')^2} \\
 & 12xyy'\, y'' + \;\; 6y\,(y')^2 + 6x\,(y')^3 \\
6xy\,(y')^2 & \underline{12xyy'\, y'' + \;\; 6y\,(y')^2 + 6x\,(y')^3}
\end{array}$$

É uma equação diferencial exata obtida pela derivação de

$$\begin{array}{ll}
 & (1 + 3xy^2)\, y'' + 6y^2\, y' + 6xy\,(y')^2 = 6x + K \\
(1 + 3xy^2)\, y' & \underline{(1 + 3xy^2)\, y'' + 3y^2\, y' + 6xy\,(y')^2} \\
 & 3y^2\, y' \\
y^3 & \underline{3y^2\, y'}
\end{array}$$

e esta equação é obtida pela derivação de

$$(1 + 3xy^2)\, y' + y^3 = 3x^2 + Kx + C_2 .$$

Por sua vez, esta equação é uma equação diferencial exata, o que dá:

$$xy^3 + y = x^3 + C_1 x^2 + C_2 x + C_3 .$$

19) Resolver $x^3\, y''' + 5x^2\, y'' + (2x - x^3)\, y' - (2 + x^2)\, y = 40x^3 - 4x^5.$

Verifica-se prontamente que esta equação diferencial linear não é uma equação diferencial exata. Para verificar se possui ou não um fator de integração da forma x^m, multiplicamos por x^m:

$$x^{m+3}\, y''' + 5x^{m+2}\, y'' + (2x^{m+1} - x^{m+3})\, y' - (2x^m + x^{m+2})\, y = (40x^3 - 4x^5)\, x^m$$

e escrevemos a condição

$$\begin{aligned}
&-(2x^m + x^{m+2}) - 2\,(m+1)\, x^m + (m+3)\, x^{m+2} + 5\,(m+2)\,(m+1)\, x^m - \\
&\quad -(m+3)\,(m+2)\,(m+1)\, x^m = (m+2)\, x^{m+2} + (m+2)\,(m - m^2)\, x^m = 0,
\end{aligned}$$

para qualquer valor de x.

Então $m = -2$ e x^{-2} é um fator de integração. Temos:

$$\begin{array}{ll}
 & xy''' + 5y'' + \left(\dfrac{2}{x} - x\right) y' - \left(\dfrac{2}{x^2} + 1\right) y = 40x - 4x^3 \\
xy'' & \underline{xy''' + \;\; y''} \\
 & 4y'' + \left(\dfrac{2}{x} - x\right) y' - \left(\dfrac{2}{x^2} + 1\right) y \\
4y' + \left(\dfrac{2}{x} - x\right) y & \underline{4y'' + \left(\dfrac{2}{x} - x\right) y' - \left(\dfrac{2}{x^2} + 1\right) y}
\end{array}$$

e

$$xy'' + 4y' + \left(\frac{2}{x} - x\right) y = 20x^2 - x^4 + K.$$

A transformação $y = \dfrac{v}{x^2}$ reduz esta equação a

$$v'' - v = (D^2 - 1)\,v = 20x^3 - x^5 + Kx$$

e a solução geral é

$$v = x^2\,y = C_1\,e^x + C_2\,e^{-x} - (1 + D^2 + D^4 + D^6 + \cdots)(20x^3 - x^5 + Kx) =$$
$$= C_1\,e^x + C_2\,e^{-x} + C_3\,x + x^5.$$

20) Resolver $2yy''' + 2\,(y + 3y')\,y'' + 2\,(y')^2 = 2.$

Temos

$$\begin{array}{ll}
 & 2yy''' + 2yy'' + 6y'\,y'' + 2\,(y')^2 = 2 \\
2yy'' & \underline{2yy''' \qquad + 2y'\,y''} \\
 & \qquad 2yy'' + 4y'\,y'' + 2\,(y')^2 \\
2yy' + 2\,(y')^2 & \qquad \underline{2yy'' + 4y'\,y'' + 2\,(y')^2}
\end{array}$$

e, por integração,

$$\begin{array}{ll}
 & 2yy'' + 2\,(y')^2 + 2yy' = 2x + K_1 \\
2yy' & \underline{2yy'' + 2\,(y')^2} \\
 & \qquad\qquad 2yy' \\
y^2 & \qquad\qquad \underline{2yy'}
\end{array}$$

Daí: $2yy' + y^2 = x^2 + K_1\,x + K_2$. Por inspeção, e^x é um fator de integração. Então: $y^2\,e^x = x^2\,e^x - 2xe^x + 2e^x + K_1\,(xe^x - e^x) + K_2\,e^x + C^3$ ou $y^2 = x^2 + C_1 + C_2\,x + C_3\,e^{-x}$.

21) Resolver $x \cos y\, y''' - 3x \operatorname{sen} y\, y'\, y'' - \cos y\, y'' -$
$$- x \cos y\,(y')^3 + \operatorname{sen} y\,(y')^2 + x \cos y\, y' - \operatorname{sen} y = 0.$$

Como $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\operatorname{sen} y}{x}\right) = \dfrac{x \cos y\, y' - \operatorname{sen} y}{x^2}$, os dois últimos têrmos da equação dada sugerem $\dfrac{1}{x^2}$ como um possível fator de integração. Empregando-o e integrando temos:

$$\frac{\cos y\, y'' - \operatorname{sen} y\,(y')^2}{x} + \frac{\operatorname{sen} y}{x} = C_1$$

ou

$$\cos y\, y'' - \operatorname{sen} y\,(y')^2 + \operatorname{sen} y = C_1\,x.$$

A substituição $\operatorname{sen} y = z$ reduz esta equação a $z'' + z = C_1\,x$ cuja solução geral é

$$z = \operatorname{sen} y = C_1\,x + C_2 \cos x + C_3 \operatorname{sen} x.$$

PROBLEMAS PROPOSTOS

Resolver:

22) $y'' + (y')^2 + 1 = 0$ *Resp.:* $y = \ln \cos (x - C_1) + C_2$

23) $(1 + x^2) y'' + 2xy' = 2x^{-3}$ *Resp.:* $y = C_1 + C_2 \operatorname{arc\,tg} x + 1/x$

24) $xy'' - y' = -2/x - \ln x$ *Resp.:* $y = C_1 x^2 + C_2 + (x + q) \ln x$

25) $y''' + y'' = x^2$ *Resp.:* $y = C_1 e^{-x} + C_2 x + C_3 + x^2 (x^2 - 4x + 12)/12$

26) $yy'' + (y')^3 = 0$ *Resp.:* $x = C_1 + C_2 y + y \ln y$

27) $yy'' + (y')^2 = 2$ *Resp.:* $y^2 = 2x^2 + C_1 x + C_2$

28) $yy'' = (y')^2 (1 - y' \cos y + yy' \operatorname{sen} y)$ *Resp.:* $x = C_1 + C_2 \ln y + \operatorname{sen} y$

29) $(2x - 3) y''' - (6x - 7) y'' + 4xy' - 4y = 8$ *Resp.:* $y = C_1 x + C_2 e^x + C_3 e^2 - 2^x$
Sugestão: $y = x$ é uma integral particular da equação reduzida.

30) $(2x^3 - 1) y''' - 6x^2 y'' + 6xy' = 0$ *Resp.:* $y = C_1 (x^4 + 4x) + C_2 x^2 + C_3$

31) $yy'' - (y')^2 = y^2 \ln y$ *Resp.:* $\ln y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$
Sugestão: Use $\ln y = z$.

32) $(x + 2y) y'' + 2 (y')^2 + 2y' = 2$ *Resp.:* $y (x + y) = x^2 + C_1 x + C_2$

33) $(1 + 2y + 3y^2) y''' + 6y' [y'' + (y')^2 + 3yy''] = x$
Resp.: $y + y^2 + y^3 = C_1 x^2 + C_2 x + C_3 + x^4/24$

34) $3x [y^2 y''' + 6yy' y'' + 2 (y')^3] - 3y [yy'' + 2 (y')^2] = -2/x$
Resp.: $y^3 = C_1 x^3 + C_2 x + C_3 + x \ln x$

Sugestão: $1/x^2$ é um fator de integração.

35) $yy''' + 3y' y'' - 2yy'' - 2 (y')^2 + yy' = e^{2x}$
Resp.: $y^2 = C_1 + C_2 e^x + C_3 xe^x + e^{2x}$

Sugestão: e^{-x} é um fator de integração. Resolver usando, também, $y^2 = v$.

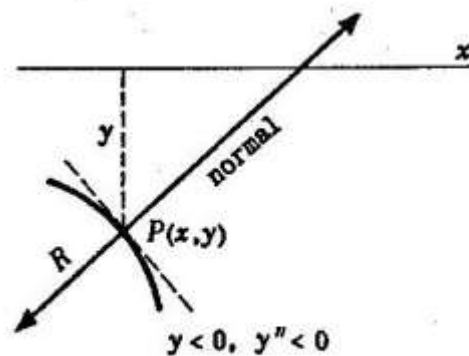
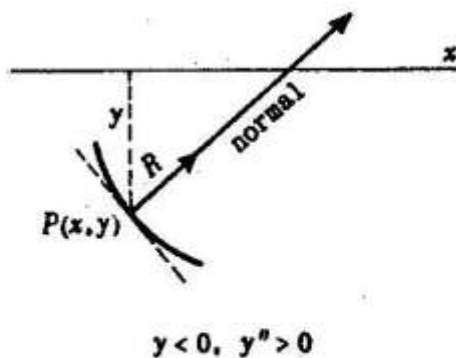
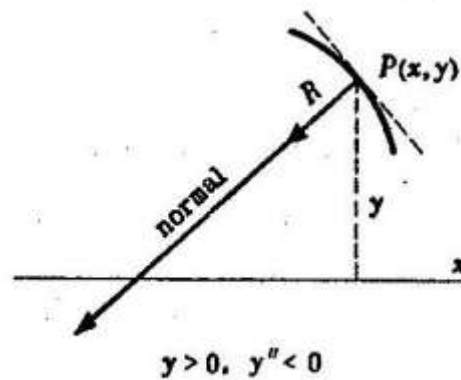
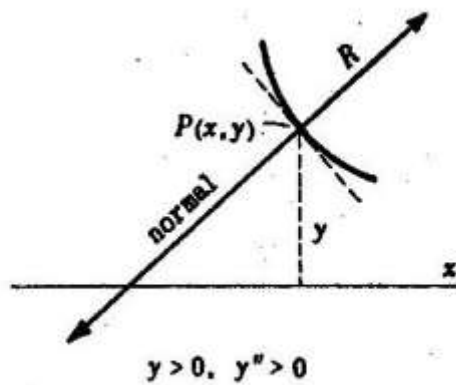
36) $2 (y + 1) y'' + 2 (y')^2 + y^2 + 2y = 0$
Resp.: $y^2 + 2y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x$

Sugestão: Use $y^2 + 2y = v$.

Capítulo XX

APLICAÇÕES DAS EQUAÇÕES LINEARES

Aplicações Geométricas. Em coordenadas retangulares, o raio de curvatura R de uma curva $y = f(x)$, em um ponto qualquer da curva, é dado por:

$$R = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Suponhamos a normal no ponto orientada de modo que aponte para o eixo dos x. Deduz-se, das figuras, que a normal e o raio de curvatura, em qualquer ponto, têm o mesmo sentido quando y e $\frac{d^2y}{dx^2}$ têm sinais opostos e são de sentidos opostos quando y e $\frac{d^2y}{dx^2}$ têm o mesmo sinal.

Aplicações Físicas. Movimento Oscilatório. Consideremos uma bola oscilando para cima e para baixo, prêsa à extremidade de um elástico.

Admitindo que nenhuma fôrça externa atue sôbre a bola para manter o movimento, depois do mesmo iniciado, que a outra extremidade do elástico esteja fixa e que a massa do elástico e a resistência do ar possam ser desprezadas, o movimento da bola será um *movimento harmônico simples*:

$$x = A \cos \omega t + B \operatorname{sen} \omega t$$

onde x é o deslocamento da bola no tempo t, a partir da sua posição de equilíbrio.

Para êsse movimento:

a) a *amplitude* ou deslocamento máximo a partir da posição de equilíbrio é $\sqrt{A^2 + B^2}$, porque quando $\frac{dx}{dt} = 0$, $\operatorname{tg} \omega t = \frac{A}{B}$ e $x = \sqrt{A^2 + B^2}$;

b) o *período* ou tempo (seg) necessário para uma oscilação completa é $\frac{2\pi}{\omega}$ seg, porque quando t varia de $\frac{2\pi}{\omega}$ seg os valores de x e $\frac{dx}{dt}$ permanecem invariáveis, enquanto que qualquer variação de t menor do que aquêle valor acarreta variação em x ou $\frac{dx}{dt}$ (ou em ambos);

c) a *freqüência* ou número de oscilações (ciclos) por segundo é $\frac{\omega}{2\pi}$ ciclos/seg;

d) a *equação diferencial* do movimento harmônico simples é $m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx$ onde k é uma quantidade positiva.

No exemplo acima,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -m\omega^2(A\cos\omega t + B\,\text{sen}\,\omega t) = -kx,$$

onde m é a massa da bola e $k = m\omega^2$.

Se as hipóteses feitas forem modificadas, de modo que não se possa desprezar a resistência do ar, o movimento da bola será um *movimento livre amortecido*:

$$x = e^{-st}(A\cos\omega t + B\,\text{sen}\,\omega t).$$

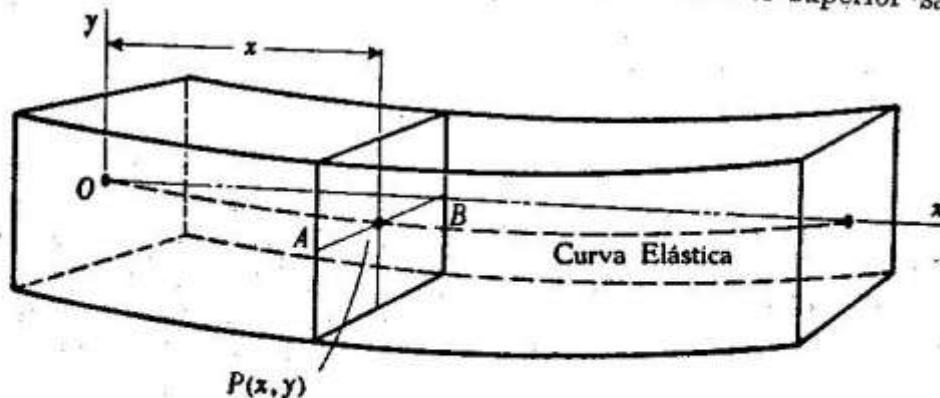
O movimento é oscilatório, como antes, porém nunca se repetirá. Como o *fator de amortecimento* e^{-st} diminui quando t aumenta, a amplitude de cada oscilação é menor do que a anterior. A freqüência é $\frac{\omega}{2\pi}$ ciclos/seg. (Ver Problema 8*a*).

Se a resistência oferecida ao movimento fôr considerada, outros casos aparecerão. (Ver Problema 8*b*).

Se, além da resistência ao movimento, houver uma fôrça externa agindo sôbre a bola ou se ao sistema completo fôr dado um movimento, o movimento da bola será chamado movimento *forçado*. Se o elemento atuante fôr harmônico, com um período $\frac{2\pi}{\lambda}$, o movimento da bola será o resultante dos dois outros — um movimento livre amortecido, que diminui à medida que o tempo aumenta (denominado *estado transitório*), e um movimento harmônico simples com período $\frac{2\pi}{\lambda}$ (denominado *estado permanente*).

(Ver Problema 9).

Vigas Horizontais. O problema consiste em se determinar a deflexão (flexão) de uma viga sujeita a cargas conhecidas. Consideraremos sòmente vigas homogêneas, quanto ao material, e uniformes.

Admitiremos a viga como sendo formada por fibras longitudinais. Na flexão vista na figura, as fibras da metade superior são

comprimidas e as da metade inferior são tracionadas, as duas partes sendo separadas por uma superfície neutra cujas fibras não sofrem tração nem compressão.

A fibra, que inicialmente coincidia com o eixo da viga, encontra-se, agora, na superfície neutra, ao longo de uma curva (curva elástica ou curva das deflexões). Determinemos a equação desta curva.

Consideremos uma seção transversal da viga, a uma distância x de uma extremidade. Seja AB sua interseção com a superfície neutra e P o traço da curva elástica nessa seção. A Mecânica demonstra que o momento M, em relação a AB, de tôdas as fôrças que agem em qualquer das partes em que a viga foi dividida pela seção feita: *a*) é independente da parte considerada, *b*) é dado por

$$A) \qquad \frac{EI}{R} = \mathrm{M}$$

onde E = módulo de elasticidade do material da viga,

I = momento de inércia da seção transversal, em relação a AB,

R = raio de curvatura da curva elástica, no ponto P.

Por conveniência, suponhamos que a viga foi substituída por sua curva elástica e a seção transversal pelo ponto P.

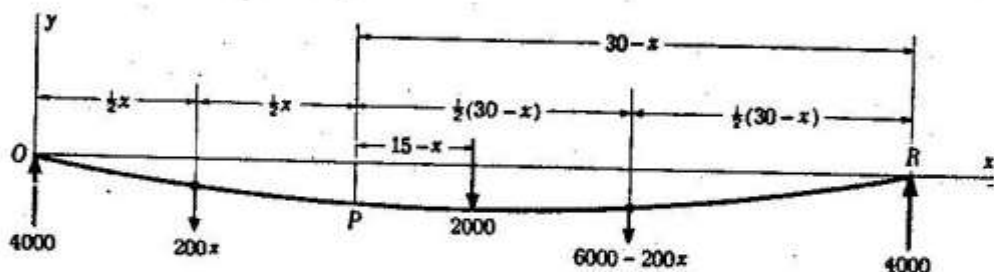
Tomemos a origem na extremidade esquerda da viga, o eixo dos x na horizontal e o ponto P com as coordenadas (x, y). Como a inclinação $\frac{dy}{dx}$ da curva elástica, em qualquer ponto, é uma quantidade necessàriamente pequena, podemos escrever

$$R = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \approx \frac{1}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

A equação *A*) reduz-se a:

$$B) \qquad EI\frac{d^2y}{dx^2} = \mathrm{M}.$$

O momento fletor M na seção transversal (ponto P da curva elástica) é a soma algébrica dos momentos, em relação à reta AB da seção transversal (ponto P da curva elástica), das fôrças externas, que agem sôbre a parte da viga (parte da curva elástica). Admitiremos aqui que as fôrças orientadas para cima dão momentos positivos e que as orientadas para baixo dão momentos negativos.

EXEMPLO. Seja uma viga de 30 m de comprimento, suportada por dois apoios verticais, como se vê na figura abaixo, sob a ação de uma carga uniformemente distribuída, com a taxa de 200 kg/m, e uma carga concentrada, aplicada no ponto meio, de 2 000 kg.

As fôrças externas que agem sôbre OP são: a) a reação do apoio em O, a x metros de P, e igual à metade da carga, isto é, $\frac{1}{2}(2\,000 + 30 \times 200) = 4\,000$ kg, e b) uma fôrça, orientada para baixo, de $200\,x$ kg, admitida como concentrada no meio de OP e, assim, a $\frac{1}{2}\,x$ metros de P. O momento fletor em P é:

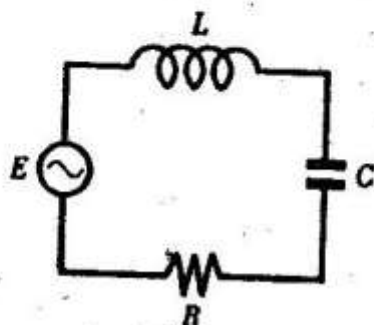
$$M = 4\,000\,x - 200\,x\left(\frac{1}{2}\,x\right) = 4\,000\,x - 100\,x^2.$$

Para mostrar que o momento fletor em P não depende do lado considerado vejamos o lado PR. Temos: a) a reação do apoio em R, de 4 000 kg, a $30 - x$ metros de P; b) a carga de 2 000 kg, orientada para baixo, no meio da viga e a $15 - x$ metros de P; c) a carga de $200\,(30 - x)$ kg, orientada para baixo e admitida como concentrada no meio de PR e a $\frac{1}{2}\,(30 - x)$ metros de P.

Então:

$$M = 4\,000\,(30 - x) - 2\,000\,(15 - x) - 200\,(300 - x)\,\frac{1}{2}\,(30 - x) \quad \therefore$$
$$M = 4\,000\,x - 100\,x^2.$$

Diz-se que uma viga é engastada em uma extremidade quando, nessa extremidade, fôr mantida na horizontal, fixada por obra de alvenaria. No exemplo acima, a viga não é horizontal em 0 e diz-se que, nesse ponto, está livremente apoiada.

Circuitos Elétricos Simples. A soma das quedas de tensão que ocorrem nos elementos de um circuito fechado é igual à fôrça eletromotriz E do circuito. A queda de tensão em uma resistência R ohms é Ri, em uma bobina de indutância L henries é $L\,\frac{di}{dt}$ e em um condensador de capacitância (capacidade) C farads é q/C. Nessas indicações, a corrente i ampères e a carga q coulombs estão ligadas pela relação $i = \frac{dq}{dt}$. Consideremos R, L e C como constantes.

Assim, a equação diferencial de um circuito elétrico contendo uma resistência R, uma indutância L, uma capacitância C e uma fôrça eletromotriz $E(t)$ é:

$$C') \qquad L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = E(t)$$

ou, como $i = \dfrac{dq}{dt}$, $\dfrac{di}{dt} = \dfrac{d^2q}{dt^2}$,

$$C) \qquad L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E(t)$$

da qual se pode determinar $q = q(t)$.

Derivando C' e tendo $\dfrac{dq}{dt} = i$, temos:

$$D) \qquad L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = E'(t)$$

da qual se pode determinar $i = i(t)$.

PROBLEMAS RESOLVIDOS

APLICAÇÕES GEOMÉTRICAS

1) Determine a curva cujo raio de curvatura em qualquer ponto $P(x, y)$ é igual à normal em P: *a*) no mesmo sentido, *b*) em sentido oposto.

a) Temos $\dfrac{[1 + (y')^2]^{3/2}}{y''} = -y\,[1 + (y')^2]^{1/2}$ ou $yy'' + (y')^2 + 1 = 0$, que é uma equação diferencial exata. Uma integração dá: $yy' + x - C_1 = 0$ ou $y\,dy + (x - C_1)\,dx = 0$.

Integrando novamente: $\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}(x - C_1)^2 = K$ ou $y^2 + (x - C_1)^2 = C^2$, família de círculos com os centros sôbre o eixo dos x.

b) Temos $\dfrac{[1 + (y')^2]^{3/2}}{y''} = y\,[1 + (y')^2]^{1/2}$ ou $yy'' - (y')^2 - 1 = 0$.

Fazendo $y' = p$, $y'' = p\dfrac{dp}{dy}$ temos (Cap. XIX):

$$yp\frac{dp}{dy} - p^2 - 1 = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{p\,dp}{1 + p^2} = \frac{dy}{y}.$$

Então

$$\ln(1 + p^2) = \ln y^2 + \ln C_1^2, \quad 1 + p^2 = C_1^2 y^2, \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{\sqrt{C_1^2 y^2 - 1}} = \pm\,dx.$$

Integrando: $\cosh^{-1} C_1 y = \pm C_1 x + C_2$, $C_1 y = \cosh(\pm C_1 x + C_2)$,

ou
$$y = \frac{1}{2C_1}\left[e^{(\pm C_1 x + C_2)} + e^{-(\pm C_1 x + C_2)}\right].$$

As curvas são catenárias e a equação pode ser posta na forma:

$$y = \tfrac{1}{2} A\left[e^{(B \pm x)/A} + e^{-(B \pm x)/A}\right], \text{ onde } A = \frac{1}{C_1} \text{ e } B = \frac{C_2}{C_1}.$$

APLICAÇÕES FÍSICAS

MOVIMENTO DE UM PÊNDULO

2) Um pêndulo de massa m, comprimento l, suspenso em P (ver figura) move-se num plano vertical que passa por P. Considerando apenas a ação da gravidade, determinar seu movimento.

Na hipótese feita, o centro de gravidade C move-se em um círculo de centro P e raio l. Seja θ, positivo no sentido contrário ao dos ponteiros de um relógio, o ângulo que o cordel faz com a vertical, no tempo t. A única fôrça é a da gravidade, positiva para baixo, e sua componente segundo a tangente ao caminho de C é mg sen θ. Chamando de s o comprimento do arco C_0C, tem-se $s = l\theta$ e a aceleração segundo o arco é:

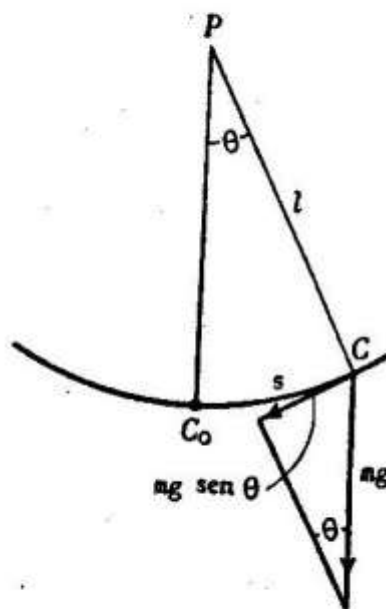
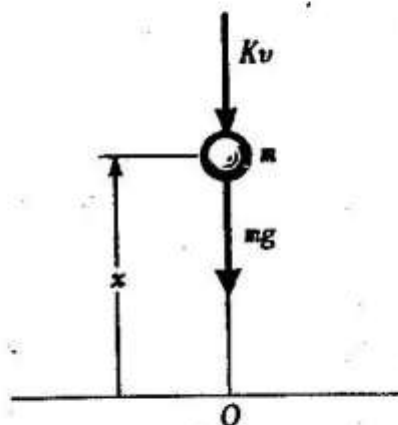
$$\frac{d^2 s}{dt^2} = l\,\frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

Então $$m \cdot l\,\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \operatorname{sen}\theta \quad \text{ou} \quad l\,\frac{d^2\theta}{dt^2} = -g \operatorname{sen}\theta.$$

Multiplicando por $2\,\dfrac{d\theta}{dt}$ e integrando: $l\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2g\cos\theta + C_1$ ou

$$\frac{d\theta}{\sqrt{2g\cos\theta + C_1}} = \pm\,\frac{dt}{\sqrt{l}}.$$

Esta integral não pode ser expressa em têrmos de funções elementares.

Quando θ é pequeno, sen $\theta = \theta$, aproximadamente. Fazendo a substituição na equação diferencial original, tem-se $\dfrac{d^2\theta}{dt^2} + \dfrac{g}{l}\,\theta = 0$ cuja solução é $\theta = C_1 \cos\sqrt{\dfrac{g}{l}}\,t + C_2 \operatorname{sen}\sqrt{\dfrac{g}{l}}\,t$. Êste é um exemplo de um movimento harmônico simples. A amplitude é $\sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ e o período é $2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$.

MOVIMENTO RETILÍNEO

3) Uma certa massa, m, é lançada verticalmente para cima, partindo de O, com a velocidade inicial v. Achar a altura máxima alcançada, supondo que a resistência do ar é proporcional à velocidade.

Tomando o sentido positivo para cima, chamando x a distância da massa ao ponto O, no tempo t, estando a massa sob a ação de duas fôrças, a da gravidade, mg, e a da resistência do ar, $Kv = K\frac{dx}{dt}$, ambas dirigidas para baixo, e sabendo que

massa × aceleração = fôrça

temos:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg - K\frac{dx}{dt} \quad \text{ou} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + k\frac{dx}{dt} = -g, \quad \text{onde } K = mk.$$

Integrando,

(1) $\quad x = C_1 + C_2 e^{-kt} - \frac{g}{k}t$, e derivando em relação a t,

(2) $\quad v = \frac{dx}{dt} = -kC_2 e^{-kt} - \frac{g}{k}$.

Para $t = 0$, $x = 0$ e $v = v_0$. Então $C_1 + C_2 = 0$, $v_0 = -kC_2 - \frac{g}{k}$ e $C_1 = -C_2 = \frac{v_0}{k} + \frac{g}{k^2}$.

Substituindo em (1), temos $x = \frac{1}{k^2}(g + kv_0)(1 - e^{-kt}) - \frac{g}{k}t$.

A altura máxima é atingida quando $v = 0$. De (2),

$$e^{-kt} = \frac{-g}{k^2 C_2} = \frac{g}{g+kv_0} \quad \text{e} \quad t = \frac{1}{k}\ln\frac{g+kv_0}{g}.$$

A altura máxima é

$$x = \frac{1}{k^2}(g+kv_0)\left(1 - \frac{g}{g+kv_0}\right) - \frac{g}{k}\left(\frac{1}{k}\ln\frac{g+kv_0}{g}\right) = \frac{1}{k}\left(v_0 - \frac{g}{k}\ln\frac{g+kv_0}{g}\right).$$

4) Uma certa massa, m, movendo-se ao longo do eixo dos x, é atraída para a origem por uma fôrça proporcional à distância da massa à origem. Achar a equação do movimento quando: *a*) tem início em $x = x_0$, partindo do repouso; *b*) tem início em $x = x_0$, com velocidade v_0, afastando-se da origem.

Seja x a distância da origem à massa m no tempo t.

Então $m\frac{d^2x}{dt^2} = -Kx$ ou $\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0$, onde $K = mk^2$.

Integrando,

(1) $x = C_1 \operatorname{sen} kt + C_2 \cos kt$, e derivando em relação a t,

(2) $v = -kC_2 \operatorname{sen} kt + kC_1 \cos kt$.

a) Para $t = 0$, $x = x_0$ e $v = 0$.

Então $C_1 = 0$ de (2), $C_2 = x_0$ de (1), e $x = x_0 \cos kt$.

b) Para $t = 0$, $x = x_0$ e $v = v_0$.

Então $C_2 = x_0$, $C_1 = v_0/k$ e $x = \dfrac{v_0}{k} \operatorname{sen} kt + x_0 \cos kt$.

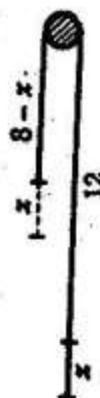
Em *a*) o movimento é harmônico simples, de amplitude x_0 e período $2\pi/k$.

Em *b*) o movimento é harmônico simples, de amplitude $\dfrac{\sqrt{v_0^2 + k^2 x_0^2}}{k}$ e período $2\pi/k$.

MOVIMENTO DE UM SISTEMA COMPLEXO

5) Uma corda passa por uma roldana, ficando com 8 m de um lado e 12 m do outro. Achar o tempo que a corda leva para deslizar da roldana, *a*) desprezando o atrito, *b*) tomando o atrito igual ao pêso de 1 m da corda.

a) Chamemos m a massa total da corda e x o comprimento (em m) que a corda deslizou no tempo t. Nesse momento existem $(8 - x)$ metros da corda em um lado e $(12 + x)$ do outro. A diferença $(4 + 2x)$ de um lado produz uma fôrça, não equilibrada, igual a $(4+2x)\dfrac{mg}{20}$. Então:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = (4 + 2x)\frac{mg}{20} \quad \text{ou} \quad 10\,\frac{d^2x}{dt^2} = gx + 2g.$$

Solução 1. Integrando

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{g}{10}x = \frac{g}{5}, \text{ temos } x = C_1 e^{\sqrt{g/10}\,t} + C_2 e^{-\sqrt{g/10}\,t} - 2.$$

Derivando em relação a t: $v = \sqrt{\dfrac{g}{10}}\,(C_1 e^{\sqrt{g/10}\,t} - C_2 e^{-\sqrt{g/10}\,t})$.

Para $t = 0$, $x = 0$ e $v = 0$. Logo:

$$C_1 = C_2 = 1 \text{ e } x = e^{\sqrt{g/10}\,t} + e^{-\sqrt{g/10}\,t} - 2 = 2\cosh\sqrt{\frac{g}{10}}\,t - 2.$$

Assim: $t = \sqrt{\dfrac{10}{g}}\cosh^{-1}\tfrac{1}{2}(x + 2) = \sqrt{\dfrac{10}{g}}\ln\dfrac{x + 2 + \sqrt{x^2 + 4x}}{2}$.

Para $x = 8$ metros, temos: $t = \sqrt{\dfrac{10}{g}}\,\ln(5 + 2\sqrt{6})$ seg.

Solução 2. Multipliquemos a equação por $\dfrac{dx}{dt}$ e integremos:

$$10\,\frac{dx}{dt}\,\frac{d^2x}{dt^2} = gx\,\frac{dx}{dt} + 2g\,\frac{dx}{dt} \quad \text{e} \quad 5\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \tfrac{1}{2}\,gx^2 + 2gx + C_1.$$

Para $t = 0$, $x = 0$ e $dx/dt = 0$. Então $C_1 = 0$ e

$$5\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \tfrac{1}{2}\,gx^2 + 2gx \quad \text{ou} \quad dt = \sqrt{\frac{10}{g}}\,\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x}}.$$

(Considerou-se o radical positivo porque x aumenta com t).

Integrando

$$t = \sqrt{\frac{10}{g}}\int\frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2-4}} = \sqrt{\frac{10}{g}}\ln\left(x + 2 + \sqrt{x^2+4x}\right) + C_2.$$

Para $t = 0$, $x = 0$.

Então $C_2 = -\sqrt{\dfrac{10}{g}}\ln 2$ e $t = \sqrt{\dfrac{10}{g}}\ln\dfrac{x+2+\sqrt{x^2+4x}}{2}$ como antes.

b) Agora $m\,\dfrac{d^2x}{dt^2} = (4 + 2x)\,\dfrac{mg}{20} - \dfrac{mg}{20}$ ou $20\,\dfrac{d^2x}{dt^2} = (2x + 3)g$.

Multiplicando por $\dfrac{dx}{dt}$ e integrando, temos:

$$10\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = gx^2 + 3gx + C_1.$$

Para $t = 0$, $x = 0$ e $v = 0$.

Então $C_1 = 0$, e $\dfrac{dx}{dt} = \sqrt{\dfrac{g}{10}\,(x^2 + 3x)}$ ou $dt = \sqrt{\dfrac{10}{g}}\,\dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + 3x}}$.

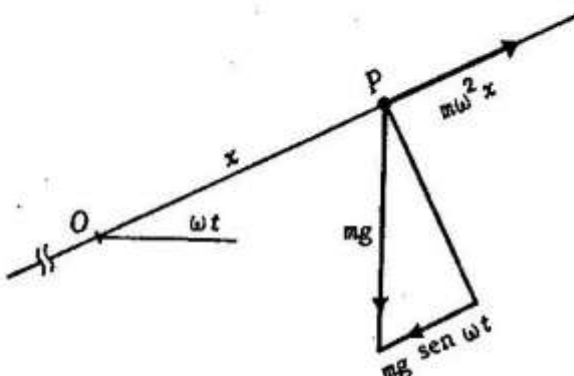
Logo: $t = \sqrt{\dfrac{10}{g}}\ln\left(x + \dfrac{3}{2} + \sqrt{x^2 + 3x}\right) + C_2$.

Para $t = 0$, $x = 0$.

Então $C_2 = -\sqrt{\dfrac{10}{g}}\ln\dfrac{3}{2}$ e $t = \sqrt{\dfrac{10}{g}}\ln\dfrac{2}{3}\left(x + \dfrac{3}{2} + \sqrt{x^2 + 3x}\right)$.

Para $x = 8$, $t = \sqrt{\dfrac{10}{g}}\ln\dfrac{19 + 4\sqrt{22}}{3} = 1{,}4$ seg.

6) Um corpo desliza, sem atrito, ao longo de uma barra retilínea, de massa desprezível, à medida que a barra gira ao redor do seu ponto meio, com velocidade angular constante ω. Determinar o movimento do corpo: *a*) admitindo-o inicialmente em O e em repouso; *b*) admitindo-o em O, inicialmente, porém, com uma velocidade $g/2\omega$.

Seja x a distância do corpo ao ponto O, no instante t. Duas são as fôrças que atuam: I) a da gravidade e II) a centrífuga $m\omega^2 x$, agindo ao longo da barra e tentando afastar o corpo da origem. Sendo ωt o ângulo descrito pela barra, temos a componente mg sen ωt, da fôrça da gravidade, orientada para O.

Assim:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = m\omega^2 x - mg \text{ sen } \omega t \quad \text{ou} \quad \frac{d^2x}{dt^2} - \omega^2 x = -g \text{ sen } \omega t.$$

Integrando,

$$(1) \qquad x = C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t} + \frac{g}{2\omega^2} \text{ sen } \omega t.$$

Derivando em relação a t:

$$(2) \qquad v = \omega C_1 e^{\omega t} - \omega C_2 e^{-\omega t} + \frac{g}{2\omega} \cos \omega t.$$

a) Para $t = 0$, $x = 0$ e $v = 0$. Então

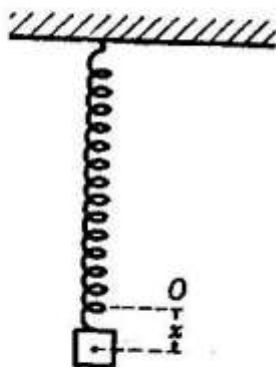
$$C_1 + C_2 = 0 \text{ de (1)}, \quad C_1 - C_2 + \frac{g}{2\omega^2} = 0 \text{ de (2)}, \quad C_1 = -C_2 = -\frac{g}{4\omega^2},$$

e $$x = \frac{g}{4\omega^2}(e^{-\omega t} - e^{\omega t}) + \frac{g}{2\omega^2} \text{ sen } \omega t = -\frac{g}{2\omega^2} \text{ senh } \omega t + \frac{g}{2\omega^2} \text{ sen } \omega t.$$

b) Para $t = 0$, $x = 0$ e $v = q/2\omega$. Então

$$C_1 + C_2 = 0, \quad C_1 - C_2 = 0, \quad C_1 = C_2 = 0 \quad \text{e} \quad x = \frac{g}{2\omega^2} \text{ sen } \omega t.$$

M O L A S

7) *Uma certa mola, cuja constante é $k = 48$ lb/ft, é mantida na vertical, estando sua extremidade superior prêsa a um suporte. Um corpo, pesando 16 lb, é amarrado à extremidade inferior da mola. Depois do sistema em repouso, o corpo é puxado, para baixo, 2 polegadas e, em seguida, sôlto. Desprezando a resistência do ar, discutir o movimento do corpo.

Tomemos a origem no centro de gravidade do corpo, depois do sistema em repouso, e chamemos x o seu deslocamento no instante t. Admitamos x positivo para baixo. Com o sistema em repouso, a fôrça da mola é igual e oposta à da gravidade. No instante t a fôrça é $-kx$, correspondente ao deslocamento x do corpo. Então:

$$\frac{16}{g}\frac{d^2x}{dt^2} = -48x \quad \text{ou} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 96x = 0, \quad \text{tomando } g = 32 \text{ ft/sec}^2.$$

(*) Os problemas 7 a 13 estão apresentados em unidades inglêsas a fim de dar ao estudante oportunidade de praticar nesse sistema, ainda bastante empregado.

Integrando, $x = C_1 \operatorname{sen} \sqrt{96}\, t + C_2 \cos \sqrt{96}\, t$.

Derivando em relação a t:

$$v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{96}\,(C_1 \cos \sqrt{96}\, t - C_2 \operatorname{sen} \sqrt{96}\, t).$$

Para $t = 0$, $x = \frac{1}{6}$ e $v = o$. Então:

$$C_2 = \frac{1}{6},\ C_1 = 0 \ \text{ e } \ x = \frac{1}{6} \cos \sqrt{96}\, t.$$

Isto representa um movimento harmônico simples. O período é $\frac{2\pi}{\sqrt{96}} = 0{,}641$ seg, a freqüência é $\frac{\sqrt{96}}{2\pi} = 1{,}56$ ciclos/seg, e a amplitude é $\frac{1}{6}$ ft.

8) Resolver o Problema 7, admitindo que o meio ofereça uma resistência (lb) igual a *a*) $v/64$ e *b*) $64v$, onde v é expresso em ft/seg.

a) Temos $\frac{16}{g}\frac{d^2x}{dt^2} = -48x - \frac{1}{64}\frac{dx}{dt}$ ou $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{32}\frac{dx}{dt} + 96x = 0$.

Com a notação D:

$$(D^2 + \frac{1}{32}D + 96)\,x = [D - (-0{,}0156 + 9{,}8i)]\,[D - (-0{,}0156 - 9{,}8i)]\,x = 0,$$

e

$$x = e^{-0{,}0156t}\,(C_1 \cos 9{,}8t + C_2 \operatorname{sen} 9{,}8t).$$

Derivando em relação a t:

$$\frac{dx}{dt} = v = e^{-0{,}0156t}\,[(9{,}8C_2 - 0{,}0156C_1)\cos 9{,}8t - (9{,}8C_1 + 0{,}0156C_2)\operatorname{sen} 9{,}8t].$$

Para $t = 0$, $v = 0$ e $x = 1/6$.

Então $C_1 = 1/6$, $0 = 9{,}8C_2 - 0{,}0156C_1$ e $C_2 = 0{,}000265$. Assim:

$$x = e^{-0{,}0156t}\left(\frac{1}{6}\cos 9{,}8t + 0{,}000265 \operatorname{sen} 9{,}8t\right).$$

O movimento é oscilatório amortecido. Note que a freqüência $\frac{9{,}8}{2\pi} = 1{,}56$ ciclos/seg permanece constante durante o movimento, enquanto que a amplitude de cada oscilação é menor do que a precedente, devido ao fator de amortecimento $e^{-0{,}0156t}$. Em $t = 0$ o valor dêsse fator é 1. Será 2/3 quando $e^{-0{,}0156t} = 2/3$ ou $t = 26$ seg. Será 1/3 quando $e^{-0{,}0156t} = 1/3$ ou $t = 70$ seg.

b) Temos $\frac{16}{32}\frac{d^2x}{dt^2} = -48x - 64\frac{dx}{dt}$ ou $(D^2 + 128D + 96)\,x = 0$.

Integrando: $x = C_1 e^{-0{,}76t} + C_2 e^{-127{,}24t}$.

Derivando em relação a t:

$$v = -0,76\,C_1\,e^{-0,76t} - 127,24\,C_2\,e^{-127,24t}.$$

Para $t = 0$, $x = 1/6$ e $v = 0$.

Então $C_1 + C_2 = 1/6$, $-0,76C_1 - 127,24C_2 = 0$, $C_1 = 0,166$, $C_2 = -0,001$ e

$$x = 0,166\,e^{-0,76t} - 0,001\,e^{-127,24t}.$$

O movimento não é vibratório. Depois do deslocamento inicial, o corpo move-se vagarosamente para a posição de equilíbrio, à medida que t aumenta.

9) Resolver o Problema 8a admitindo ainda que o suporte esteja animado de um movimento $y = \cos 4t$ ft.

Tomemos a origem como no Problema 8 e seja x o deslocamento do corpo depois de t seg. Da figura deduz-se que a distensão da mola é $(x - y)$ e que a fôrça da mola é $-48\,(x - y) = -48\,(x - \cos 4t)$ lb. Assim,

$$\frac{16}{g}\frac{d^2x}{dt^2} = -48\,(x - \cos 4t) - \frac{1}{64}\frac{dx}{dt}$$

ou $\quad (D^2 + \frac{1}{32}D + 96)\,x = 96 \cos 4t.$

Integrando,

$$x = e^{-0,0156t}(C_1 \cos 9,8t + C_2 \operatorname{sen} 9,8t) + \frac{96}{D^2 + \frac{D}{32} + 96} \cos 4t =$$

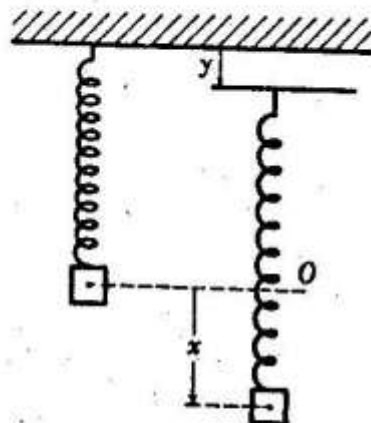
$$= e^{-0,0156t}(C_1 \cos 9,8t + C_2 \operatorname{sen} 9,8t) + 0,0019 \operatorname{sen} 4t + 1,2 \cos 4t.$$

Derivando em relação a t:

$$v = e^{-0,0156t}\,[(9,8C_2 - 0,0156C_1) \cos 9,8t - (9,8C_1 + 0,0156C_2) \operatorname{sen} 9,8t] + $$
$$+ 0,0076 \cos 4t - 4,8 \operatorname{sen} 4t.$$

Para $t=0$, $v=0$ e $x=1+1/6=7/6$. Então $C_1 = -1/30$, $C_2 = -0,0008$ e $x = e^{-0,0156t}(-0,0333 \cos 9,8t - 0,0008 \operatorname{sen} 9,8t) + 0,0019 \operatorname{sen} 4t + 1,2 \cos 4t.$

O movimento se compõe de um movimento harmônico amortecido, que desaparece gradativamente (estado transitório), e de um movimento harmônico que permanece (estado permanente). Depois de um certo tempo o movimento é o que decorre apenas dêste estado permanente. As oscilações têm período e frequência iguais à da função $y = \cos 4t$. ou seja, período $= 2\pi/4 = 1,57$ seg e freqüência $= 4/2\pi = 0,637$ ciclos/seg.

A amplitude é $\sqrt{(0,0019)^2 + (1,2)^2} = 1,2$ ft.

10) Um pêso de 20 lb está suspenso por uma determinada mola que, em conseqüência, sofre uma distensão de 3 in. A extremidade superior da mola está animada de um movimento $y = 4\,(\text{sen}\, 2t + \cos 2t)$ ft. Desprezando a resistência do ar, achar a equação do movimento.

Tomemos a origem no centro de gravidade do corpo quando em repouso. Seja x o deslocamento no instante t. A variação no comprimento da mola é $(x - y)$, a constante da mola é $20/\frac{1}{4} = 80$ lb/ft e a fôrça é $-80\,(x - y)$.

Então:

$$\frac{20}{32}\frac{d^2x}{dt^2} = -80\,(x - 4\,\text{sen}\, 2t - 4\cos 2t) \quad \text{ou} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 128x = 512\,(\text{sen}\, 2t + \cos 2t).$$

Integrando:

$$x = C_1 \cos \sqrt{128}\, t + C_2\, \text{sen}\, \sqrt{128}\, t + \frac{128}{31}(\text{sen}\, 2t + \cos 2t).$$

Derivando em relação a t:

$$v = -\sqrt{128}\, C_1\, \text{sen}\, \sqrt{128}\, t + \sqrt{128}\, C_2 \cos \sqrt{128}\, t + \frac{256}{31}(-\text{sen}\, 2t + \cos 2t).$$

Para $t = 0$, $x = 4$ e $v = 0$. Então:

$$4 = C_1 + \frac{128}{31}, \quad C_1 = -0{,}129; \quad \text{e} \quad \sqrt{128}\, C_2 + \frac{256}{31} = 0, \quad C_2 = -0{,}730.$$

Assim: $x = -0{,}13 \cos \sqrt{128}\, t - 0{,}73\, \text{sen}\, \sqrt{128}\, t + 4{,}13\, (\text{sen}\, 2t + \cos 2t)$.

11) Um corpo, pesando 64 lb, está prêso a uma certa mola, para a qual $k = 50$ lb/ft, e em repouso. Achar a posição do corpo no instante t se a êle fôr aplicada a fôrça $4\,\text{sen}\, 2t$.

Tomemos a origem no centro de gravidade do corpo quando em repouso. A equação do movimento é:

$$\frac{64}{32}\frac{d^2x}{dt^2} + 50x = 4\,\text{sen}\, 2t \quad \text{ou} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 25x = 2\,\text{sen}\, 2t.$$

Integrando, $x = C_1 \cos 5t + C_2\, \text{sen}\, 5t + \frac{2}{21}\, \text{sen}\, 2t$.

Derivando em relação a t:

$$v = -5C_1\, \text{sen}\, 5t + 5C_2 \cos 5t + \frac{4}{21} \cos 2t.$$

Das condições iniciais: $x = 0$, $v = 0$ para $t = 0$, $C_1 = 0$, $C_2 = -\frac{4}{105}$

e

$$x = -0{,}038\, \text{sen}\, 5t + 0{,}095\, \text{sen}\, 2t.$$

O deslocamento é a soma algébrica de dois outros, resultantes de movimentos harmônicos simples de períodos diferentes.

12) Um corpo, pesando 16 lb, está prêso a uma certa mola, para a qual $k = 48$ lb/ft, e em repouso. Achar a equação do movimento do corpo sabendo que o suporte da mola será animado do movimento $y = \text{sen}\, \sqrt{3g}\, t$ ft.

Tomemos a origem no centro de gravidade do corpo quando em repouso e chamemos x o deslocamento no instante t. A distensão da mola é $(x-y)$ e a fôrça é $-48(x-y)$.

Então:

$$\frac{16}{g}\frac{d^2x}{dt^2} = -48(x - \text{sen}\sqrt{3g}\,t) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + 3gx = 3g\,\text{sen}\sqrt{3g}\,t.$$

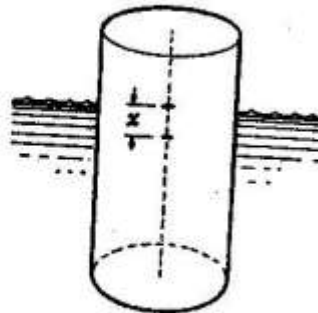
Integrando, $x = C_1 \cos\sqrt{3g}\,t + C_2\,\text{sen}\sqrt{3g}\,t - \frac{1}{2}\sqrt{3g}\,t\cos\sqrt{3g}\,t$

e $v = -C_1\sqrt{3g}\,\text{sen}\sqrt{3g}\,t + C_2\sqrt{3g}\cos\sqrt{3g}\,t - \frac{1}{2}\sqrt{3g}\cos\sqrt{3g}\,t +$
$$+\frac{3g}{2}t\,\text{sen}\sqrt{3g}\,t.$$

Das condições iniciais: $x = 0$, $v = 0$ para $t = 0$, $C_1 = 0$, $C_2 = \frac{1}{2}$ e

$$x = \frac{1}{2}\,\text{sen}\sqrt{3g}\,t - \frac{\sqrt{3g}}{2}\,t\cos\sqrt{3g}\,t.$$

O primeiro têrmo representa um movimento harmônico simples, enquanto que o segundo é um movimento vibratório com amplitude crescente (devido ao fator t). À medida que t aumenta, a amplitude aumenta, também, até ocorrer o rompimento.

13) Uma bóia cilíndrica de 2 ft de diâmetro está na água (massa específica igual a 62,4 lb/ft³), com o eixo na vertical. Empurrando-se, ligeiramente, para baixo, e soltando-se, verifica-se que o período de vibração é de 2 seg. Achar o pêso do cilindro.

Tomemos a origem na interseção do eixo do cilindro com a superfície da água, quando a bóia está em equilíbrio, e admitamos o sentido positivo para baixo.

Seja x o deslocamento no instante t. Pelo princípio de Arquimedes, todo corpo mergulhado, total ou parcialmente, num fluido recebe um impulso de baixo para cima igual ao pêso do fluido por êle deslocado. Assim, a variação da fôrça que atua na bóia é: $62{,}4 \times \pi(1)^2 x$. Daí:

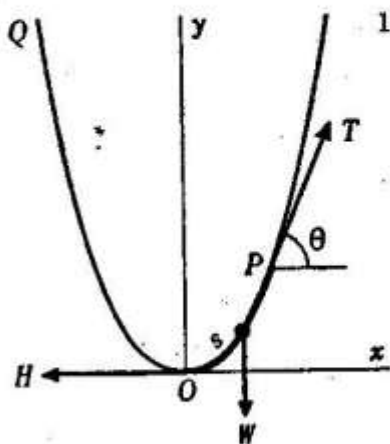
$$\frac{W}{g}\frac{d^2x}{dt^2} = -62{,}4\,\pi x \quad \text{ou} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2009}{W}\pi x = 0,$$

onde W (lb) é o pêso da bóia e $g = 32{,}2$ ft/seg².

Integrando, $x = C_1\,\text{sen}\sqrt{2009\pi/W}\,t + C_2\cos\sqrt{2009\pi/W}\,t.$

Como o período é

$$\frac{2\pi}{\sqrt{2009\pi/W}} = 2\sqrt{\pi W/2009} = 2, \quad W = \frac{2009}{\pi} = 640 \text{ lb}.$$

CABO SUSPENSO

14) Determinar a curva de um cabo homogêneo, suspenso por suas extremidades e sujeito à ação do próprio pêso.

Escolhamos os eixos coordenados como na figura, com a origem na parte mais baixa da curva. Consideremos o trecho entre O e um ponto $P(x, y)$, variável. O equilíbrio desta parte se produz pela ação das seguintes fôrças: 1) fôrça horizontal em O de intensidade H; 2) fôrça de tração T ao longo da tangente em P e 3) o pêso W de OP.

Estando OP em equilíbrio, temos a igualdade entre as fôrças horizontais que agem para a direita e as que agem para a esquerda. O mesmo acontece, na direção vertical, com as outras fôrças. Assim:

$$T\cos\theta = H, \quad T \operatorname{sen}\theta = W \quad \text{e} \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{W}{H}.$$

H é constante, decorrente da parte OQ do cabo, enquanto $W = ws$, onde s é o comprimento de OP e w o pêso por unidade de comprimento do cabo.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{H}\,\frac{dW}{dx} = \frac{w}{H}\,\frac{ds}{dx} = \frac{w}{H}\,\sqrt{1 + (dy/dx)^2}.$$

Fazendo $\dfrac{dy}{dx} = p$, temos

$$\frac{dp}{dx} = \frac{w}{H}\sqrt{1+p^2} \quad \text{ou} \quad \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{w}{H}\,dx.$$

Integrando entre os limites $x = 0,\ p = 0$ e $x = x,\ p = p$, temos:

$$\operatorname{senh}^{-1} p = \frac{w}{H}\,x \quad \text{e} \quad p = \frac{dy}{dx} = \operatorname{senh}\frac{w}{H}\,x.$$

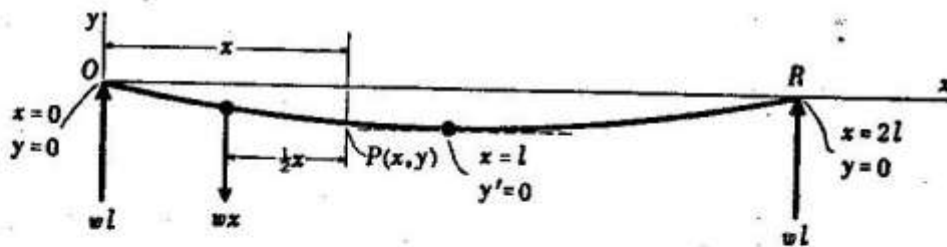
Integrando $dy = \operatorname{senh}\dfrac{w}{H}\,x\,dx$ entre os limites $x = 0,\ y = 0$ e $x = x$,

$y = y$, temos $y = \dfrac{H}{w}\left(\cosh\dfrac{w}{H}\,x - 1\right)$, equação de uma catenária.

Se a origem tivesse sido tomada a uma distância H/w abaixo do ponto mínimo da curva (de modo que H/w fôsse a ordenada na origem), a equação da curva seria:

$$y = \frac{H}{w}\cosh\frac{w}{H}\,x.$$

VIGAS HORIZONTAIS

15) Uma viga horizontal, de comprimento igual a $2l$, está livremente suportada por suas extremidades. Achar a equação da curva elástica e a flecha, sendo a carga w kg por unidade de comprimento.

Tomemos a origem e os eixos coordenados como na figura. Seja P um ponto qualquer da curva elástica, de coordenadas (x, y). Consideremos o segmento OP da viga. Em O existe a reação do apoio $= wl$ e no ponto meio de OP existe a carga wx. Como $EI\dfrac{d^2y}{dx^2} = M$, temos:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = wlx - wx\left(\tfrac{1}{2}x\right) = wlx - \tfrac{1}{2}wx^2. \tag{1}$$

Solução 1. Integrando (1) uma vez: $EI\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2}wlx^2 - \dfrac{1}{6}wx^3 + C_1$.

No ponto meio da viga, $x = l$ e $dy/dx = 0$. Então: $C_1 = -\dfrac{1}{3}wl^3$ e

$$EI\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}wlx^2 - \frac{1}{6}wx^3 - \frac{1}{3}wl^3. \tag{2}$$

Integrando (2):

$EIy = \dfrac{1}{6}wlx^3 - \dfrac{1}{24}wx^4 - \dfrac{1}{3}wl^3x + C_2$. Em O, $x=y=0$. Então: $C_2=0$ e

$$y = \frac{w}{24\,EI}(4lx^3 - x^4 - 8l^3x). \tag{3}$$

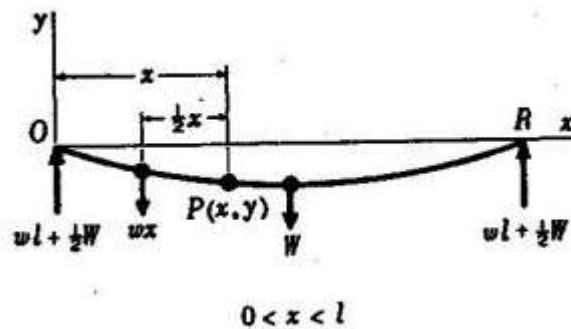
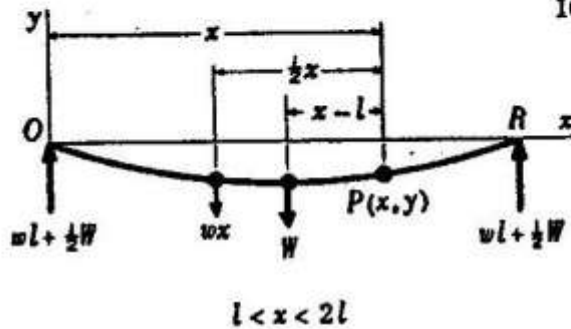
Solução 2. Integrando (1) duas vêzes: $EIy = \dfrac{1}{6}wlx^3 - \dfrac{1}{24}wx^4 + C_1x + C_2$.

Em O, $x=y=0$ e, em R, $x=2l$, $y=0$. Com estas condições limites, temos: $C_2 = 0$ e $C_1 = -\dfrac{1}{3}wl^3$, como anteriormente.

A deflexão, afundamento, da viga em um ponto qualquer, distante x unidades de O, é dada por $-y$. A flecha, deflexão máxima, ocorre no ponto meio $(x = l)$ e de (3), temos:

$$-y_{\max} = -\frac{w}{24\,EI}(4l^4 - l^4 - 8l^4) = \frac{5wl^4}{24EI}.$$

$l < x < 2l$

$0 < x < l$

16) Resolver o Problema 15 considerando mais uma carga, W, concentrada, no meio da viga.

Escolhamos os eixos como na figura 15. Como as fôrças que agem no segmento OP variam com a posição do ponto P, à esquerda ou à direita do ponto meio, devemos considerar dois casos.

Quando $0 < x < l$ as fôrças que atuam em OP são: uma reação no ponto O igual a $(wl + \frac{1}{2} w)$, para cima, e uma carga wx, para baixo, no ponto meio de OP. O momento fletor é, então:

$$(1) \qquad M = (wl + \tfrac{1}{2} W)\, x - wx \left(\tfrac{1}{2}\, x\right) = wlx + \tfrac{1}{2}\, Wx - \tfrac{1}{2}\, wx^2.$$

Quando $l<x<2l$, há uma fôrça adicional: a fôrça W no meio da viga, a $(x-l)$ unidades de P. O momento fletor é:

$$(2) \qquad M = (wl + \tfrac{1}{2} W)\, x - wx \left(\tfrac{1}{2}\, x\right) - W\,(x-l) =$$

$$= wlx + \tfrac{1}{2}\, Wx - \tfrac{1}{2}\, wx^2 - W\,(x-l).$$

(1) e (2) dão, para $x = l$, o momento: $M = \frac{1}{2}\, wl^2 + \frac{1}{2}\, Wl$. Os dois casos podem ser tratados ao mesmo tempo, notando-se que para (1):

$$wlx + \tfrac{1}{2}\, Wx - \tfrac{1}{2}\, wx^2 = wlx - \tfrac{1}{2}\, wx^2 - \tfrac{1}{2}\, W\,(l-x) + \tfrac{1}{2}\, Wl$$

e para (2):

$$wlx + \tfrac{1}{2}\, Wx - \tfrac{1}{2}\, wx^2 - W\,(x-l) = wlx - \tfrac{1}{2}\, wx^2 + \tfrac{1}{2}\, W\,(l-x) + \tfrac{1}{2}\, Wl.$$

Então:

$$(3) \qquad EI\,\frac{d^2y}{dx^2} = wlx - \tfrac{1}{2}\, wx^2 \pm \tfrac{1}{2}\, W\,(l-x) + \tfrac{1}{2}\, Wl$$

subentendendo-se que o sinal superior é para $0<x<l$ e o inferior para $l<x<2l$.

Integrando (3) duas vêzes:

$$EIy = \frac{1}{6}\, wlx^3 - \frac{1}{24}\, wx^4 \mp \frac{1}{12}\, W\,(l-x)^3 + \frac{1}{4}\, Wlx^2 + C_1\, x + C_2\,.$$

Com as condições limites $x = y = 0$ em O e $x = 2l$, $y = 0$ em R,

$$C_2 = \frac{1}{12} Wl^3, \quad 2lC_1 + C_2 = -\frac{4}{3} wl^4 + \frac{2}{3} wl^4 + \frac{1}{12} Wl^3 - Wl^3$$

e

$$C_1 = -\frac{1}{3} wl^3 - \frac{1}{2} Wl^2.$$

Então:

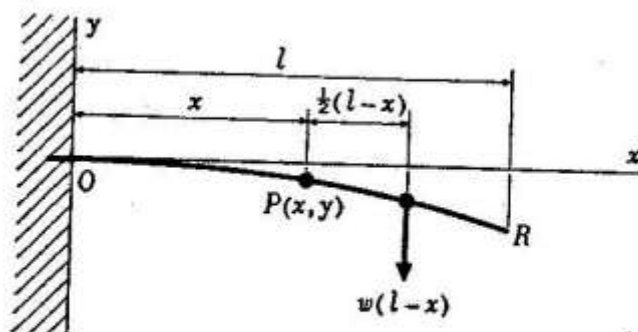
$$EIy = \frac{1}{6} wlx^3 - \frac{1}{24} wx^4 - \frac{1}{3} wl^3 x \mp \frac{1}{12} W(l-x)^3 + \frac{1}{4} Wlx^2 - \frac{1}{2} Wl^2 x + \frac{1}{12} Wl^3 =$$

$$= \frac{1}{6} wlx^3 - \frac{1}{24} wx^4 - \frac{1}{3} wl^3 x - \frac{1}{12} W |l-x|^3 + \frac{1}{4} Wlx^2 - \frac{1}{2} Wl^2 x + \frac{1}{12} Wl^3$$

e $y = \dfrac{w}{24\,EI} (4lx^3 - x^4 - 8l^3 x) + \dfrac{W}{12\,EI} (3lx^2 - |\,l - x\,|^3 - 6l^2 x + l^3).$

A deflexão máxima, que ocorre no meio da viga, é:

$$-y_{\max} = \frac{5wl^4}{24\,EI} + \frac{Wl^3}{6\,EI}.$$

17) Uma viga horizontal engastada em uma extremidade e com a outra em balanço está sujeita a uma carga uniformemente distribuída de w kg por unidade de comprimento. Achar a curva elástica e a deflexão máxima.

Tomemos os eixos como na figura e seja $P(x, y)$ um ponto qualquer. Consideremos o segmento PR. A única fôrça é a carga $w(l-x)$ no meio de PR. Então:

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = -w(l-x) \cdot \tfrac{1}{2}(l-x) = -\tfrac{1}{2} w(l-x)^2.$$

Integrando uma vez, $EI \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{6} w(l-x)^3 + C_1.$

Em O: $x = 0$, $\dfrac{dy}{dx} = 0$; $C_1 = -\dfrac{1}{6} wl^3$ e $EI \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{6} w(l-x)^3 - \dfrac{1}{6} wl^3.$

Integrando outra vez: $EIy = -\dfrac{1}{24} w(l-x)^4 - \dfrac{1}{6} wl^3 x + C_2.$

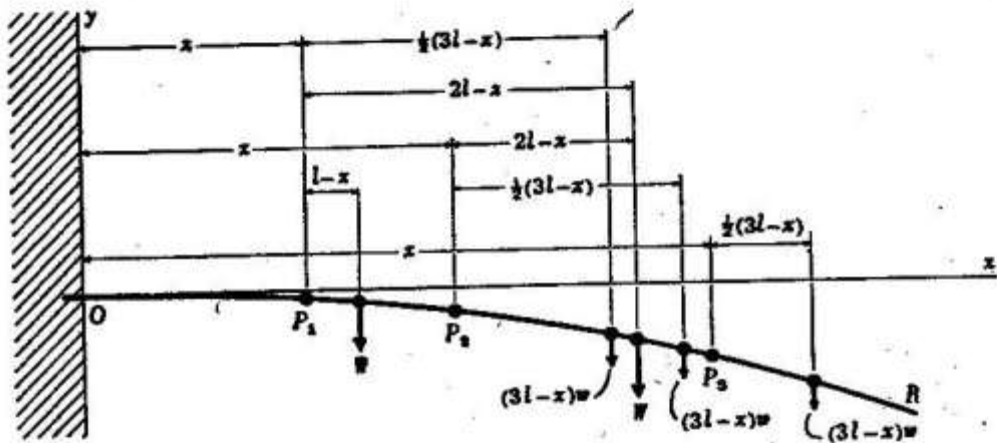
Em O: $x = y = 0$; então

$$C_2 = \frac{1}{24} wl^4, \quad EIy = -\frac{1}{24} w(l-x)^4 - \frac{1}{6} wl^3 x + \frac{1}{24} wl^4$$

e

$$y = \frac{w}{24\,EI}(4lx^3 - 6l^2x^2 - x^4).$$

A deflexão máxima, que ocorre em $R\,(x = l)$, é $-y_{\max} = \frac{1}{8}\,\frac{wl^4}{EI}$. Note que isto não é um mínimo relativo como no Problema 16, porém um mínimo absoluto, que ocorre na extremidade do intervalo $0 \leq x \leq l$.

18) Uma viga horizontal está em balanço e sujeita a uma carga uniforme de w kg por unidade de comprimento e a duas cargas, W, concentradas e atuando em pontos situados a uma distância l e $2l$ da extremidade engastada. Sabendo que a viga mede $3l$, achar a equação da elástica e a deflexão máxima.

Tomemos os eixos como na figura e seja $P\,(x, y)$ um ponto qualquer. Há 3 casos a considerar, de acôrdo com a situação de P: $0<x<l$; $l<x<2l$ ou $2l<x<3l$. No cálculo do momento fletor consideraremos sempre a parte da viga situada à direita.

Quando $0<x<l$, ($P = P_1$ na figura), 3 fôrças agem sôbre P_1R: a carga $(3l-x)\,w$, no ponto meio de P_1R; a carga W, a $(l-x)$ unidades de P_1 e a carga W, a $(2l-x)$ de P_1. O momento ao redor de P_1 é:

$$M_1 = -(3l-x)\,w \cdot \tfrac{1}{2}(3l-x) - W(l-x) - W(2l-x) =$$
$$= -\tfrac{1}{2}\,w\,(3l-x)^2 - W(l-x) - W(2l-x),$$

e

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -\tfrac{1}{2}\,w\,(3l-x)^2 - W(l-x) - W(2l-x).$$

Integrando: $EI\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{6}\,w\,(3l-x)^3 + \dfrac{1}{2}\,W(l-x)^2 + \dfrac{1}{2}\,W(2l-x)^2 + C_1.$

Em O: $x = 0$ e $dy/dx = 0$; então $C_1 = -\dfrac{9}{2}\,wl^3 - \dfrac{5}{2}\,Wl^2$,

$$EI\frac{dy}{dx} = \frac{1}{6}\,w\,(3l-x)^3 + \frac{1}{2}\,W(l-x)^2 + \frac{1}{2}\,W(2l-x)^2 - \frac{9}{2}\,wl^3 - \frac{5}{2}\,Wl^2 \quad \text{e}$$

$$EIy = -\frac{1}{24}\,w\,(3l-x)^4 - \frac{1}{6}\,W(l-x)^3 - \frac{1}{6}\,W(2l-x)^3 - \frac{9}{2}\,wl^3x - \frac{5}{2}\,Wl^2x + C_2.$$

Em O: $x = y = 0$; então $C_2 = \frac{27}{8} wl^4 + \frac{3}{2} Wl^3$ e

$$A)\quad EIy = -\frac{1}{24} w(3l-x)^4 - \frac{1}{6} W(l-x)^3 - \frac{1}{6} W(2l-x)^3 - \frac{9}{2} wl^3 x - \frac{5}{2} Wl^2 x + \frac{27}{8} wl^4 + \frac{3}{2} Wl^3.$$

Quando $l < x < 2l$, $(P = P_2$ na figura), o aumento ao redor de P_2 é

$$M_2 = -\tfrac{1}{2} w(3l-x)^2 - W(2l-x)$$

e

$$Ec\frac{d^2y}{dx^2} = -\tfrac{1}{2} w(3l-x)^2 - W(2l-x).$$

Integrando duas vêzes, temos:

$$B')\quad EIy = -\frac{1}{24} w(3l-x)^4 - \frac{1}{6} W(2l-x)^3 + C_3 x + C_4.$$

Quando $x = l$, $B')$ e $A)$ têm a mesma deflexão e inclinação $\frac{dy}{dx}$ e daí $C_3 = C_1$ e $C_4 = C_2$. Então

$$B)\quad EIy = -\frac{1}{24} w(3l-x)^4 - \frac{1}{6} W(2l-x)^3 - \frac{9}{2} wl^3 x - \frac{5}{2} Wl^2 x + \frac{27}{8} wl^4 + \frac{3}{2} Wl^3.$$

Quando $2l < x < 3l$, $(P = P_3$ na figura), o momento ao redor de P_3 é

$$M_3 = -\tfrac{1}{2} w(3l-x)^2 \quad \text{e} \quad EI\frac{d^2y}{dx^2} = -\tfrac{1}{2} w(3l-x)^2.$$

Então:

$$C)\quad EIy = -\frac{1}{24} w(3l-x)^4 + C_5 x + C_6 = -\frac{1}{24} w(3l-x)^4 - \frac{9}{2} wl^3 x - \frac{5}{2} Wl^2 x + \frac{27}{8} wl^4 + \frac{3}{2} Wl^3,$$

porque, para $x = 2l$, o resultado deve concordar com $B)$ em relação à deflexão e à inclinação.

$A)$, $B)$, $C)$ podem ser escritos do seguinte modo:

$$y = \frac{w}{24EI}(12lx^3 - 54l^2x^2 - x^4) + \frac{W}{6EI}(2x^3 - 9lx^2), \quad 0 \leq x \leq l,$$

$$y = \frac{w}{24EI}(12lx^3 - 54l^2x^2 - x^4) + \frac{W}{6EI}(x^3 - 6lx^2 - 3l^2x + l^3), \quad l \leq x \leq 2l,$$

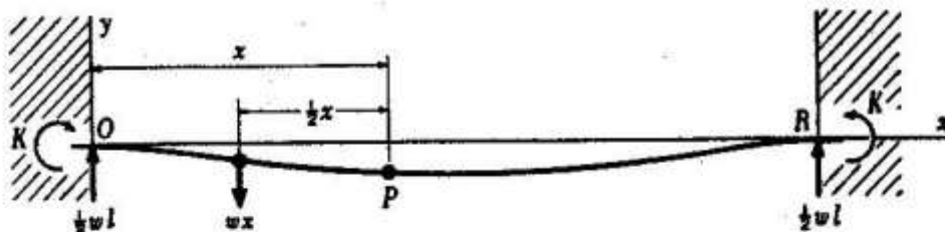
$$y = \frac{w}{24EI}(12lx^3 - 54l^2x^2 - x^4) + \frac{W}{2EI}(3l^3 - 5l^2x), \quad 2l \leq x \leq 3l.$$

A deflexão máxima, que ocorre em $R\ (x = 3l)$, é

$$-y_{max} = \frac{1}{8EI}(81wl^4 + 48Wl^3).$$

Note que a curva elástica se compõe de arcos de 3 curvas distintas, cujas inclinações nos pontos de junção têm o mesmo valor.

19) Uma viga horizontal, de comprimento l, tem as extremidades engastadas e está sujeita a uma carga uniformemente distribuída de w kg por unidade de comprimento. Achar a equação da elástica e a flecha.

Tomemos os eixos como na figura e seja $P(x, y)$ um ponto qualquer.

As fôrças externas que agem no segmento OP são: um momento k, desconhecido, decorrente do engastamento, esfôrço do apoio para manter a viga horizontal, em O; uma reação vertical $\frac{1}{2}wl$, em O, e a carga wx, orientada para baixo, e agindo no ponto meio de OP. Então:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = K + \tfrac{1}{2}wlx - \tfrac{1}{2}wx^2.$$

Integrando uma vez e sabendo que $x = 0$, $dy/dx = 0$ em O,

$$EI\frac{dy}{dx} = Kx + \frac{1}{4}wlx^2 - \frac{1}{6}wx^3.$$

Em R: $x = l$, $dy/dx = 0$ porque a viga está engastada. Então:

$$Kl + \frac{1}{4}wl^3 - \frac{1}{6}wl^3 = 0, \quad K = -\frac{1}{12}wl^2$$

e
$$EI\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{12}wl^2x + \frac{1}{4}wlx^2 - \frac{1}{6}wx^3.$$

Integrando e sabendo que $x = y = 0$ em O,

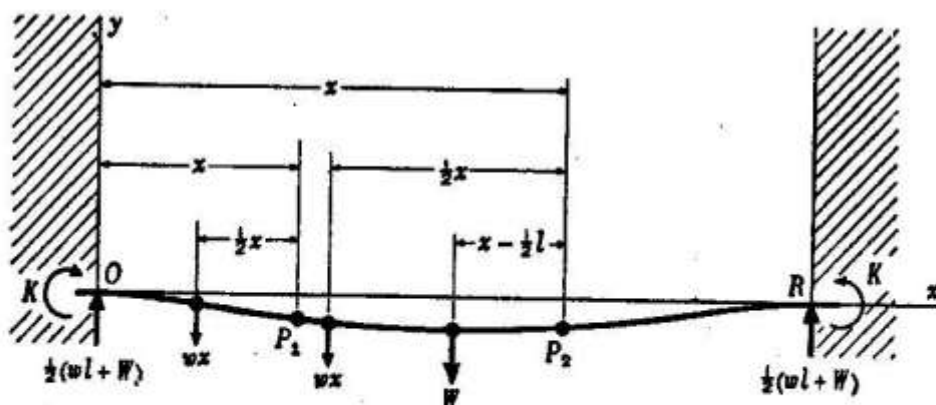
$$EIy = -\frac{1}{24}wl^2x^2 + \frac{1}{12}wlx^3 - \frac{1}{24}wx^4 \quad \text{e} \quad y = \frac{wx^2}{24EI}(2lx - l^2 - x^2).$$

A flecha, deflexão máxima, que ocorre no meio da viga $(x = \frac{1}{2}l)$, é $-y_{max} = \dfrac{wl^4}{384EI}$.

20) Resolver o Problema 19 considerando mais uma carga concentrada W, no meio da viga.

Com o sistema de eixos apresentado no Problema 19, temos dois casos a considerar: de $x = 0$ a $x = \frac{1}{2}l$ e de $x = \frac{1}{2}l$ a $x = l$.

Quando $0 < x < \frac{1}{2} l$, as fôrças externas que agem no segmento à esquerda de $P_1(x, y)$ são: um momento desconhecido K em O; a reação $\frac{1}{2}(wl + W)$ em O e a carga wx no meio de OP_1. Então:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = K + \frac{1}{2}(wl + W)x - \frac{1}{2}wx^2 = K + \frac{1}{2}wlx - \frac{1}{2}wx^2 + \frac{1}{2}Wx.$$

Integrando uma vez e sabendo que $x = 0$, $dy/dx = 0$ em O,

$$A') \qquad EI\frac{dy}{dx} = Kx + \frac{1}{4}wlx^2 - \frac{1}{6}wx^3 + \frac{1}{4}Wx^2.$$

Integrando e sabendo que $x = y = 0$ em O,

$$A) \qquad EIy = \frac{1}{2}Kx^2 + \frac{1}{12}wlx^3 - \frac{1}{24}wx^4 + \frac{1}{12}Wx^3.$$

Quando $\frac{1}{2} l < x < l$, há, em adição, a carga W, no meio da viga, a $(x - \frac{1}{2} l)$ de P_2.

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = K + \frac{1}{2}wlx - \frac{1}{2}wx^2 + \frac{1}{2}Wx - W(x - \tfrac{1}{2}l).$$

Integrando duas vêzes:

$$B') \qquad EIy = \frac{1}{2}Kx^2 + \frac{1}{12}wlx^3 - \frac{1}{24}wx^4 + \frac{1}{12}Wx^3 - $$

$$- \frac{1}{6}W(x - \tfrac{1}{2}l)^3 + C_1x + C_2.$$

Quando $x = \frac{1}{2} l$, os valores de y e dy/dx de B') devem coincidir com os dados por A). Então: $C_1 = C_2 = 0$ e

$$B) \quad EIy = \frac{1}{2}Kx^2 + \frac{1}{12}wlx^3 - \frac{1}{24}wx^4 + \frac{1}{12}Wx^3 - \frac{1}{6}W(x - \tfrac{1}{2}l)^3.$$

Para determinar K entramos com $x = \frac{1}{2}l$, $dy/dx = 0$ em A'). Daí:

$$\frac{1}{2}lK + \frac{1}{16}wl^3 - \frac{1}{48}wl^3 + \frac{1}{16}Wl^2 = 0 \quad \text{e} \quad K = -\frac{1}{12}wl^2 - \frac{1}{8}Wl.$$

Substituindo em A) e B),

$$EIy = -\frac{1}{24}wl^2x^2 + \frac{1}{12}wlx^3 - \frac{1}{24}wx^4 + \frac{1}{12}Wx^3 - \frac{1}{16}Wlx^2$$

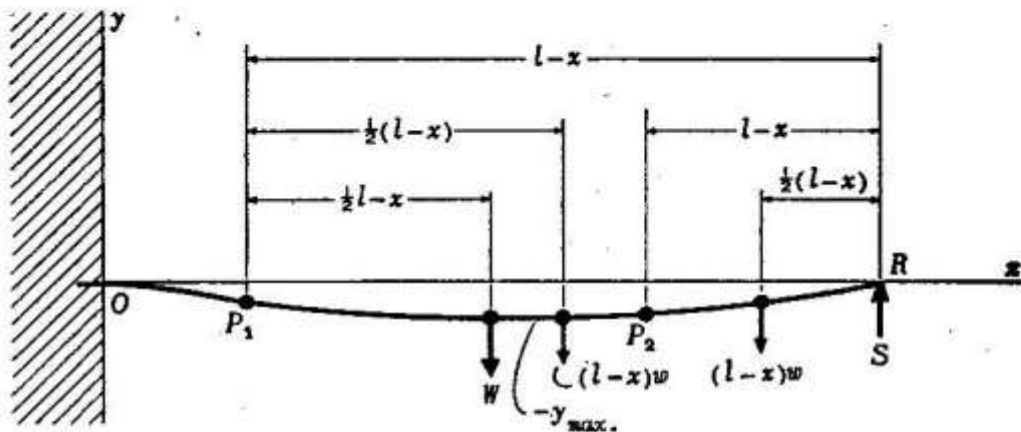
$$\text{e} \quad y = \frac{w}{24\,EI}(2lx^3 - l^2x^2 - x^4) + \frac{W}{48\,EI}(4x^3 - 3lx^2), \quad 0 \leq x \leq \tfrac{1}{2}l,$$

$$EIy = -\frac{1}{24}wl^2x^2 + \frac{1}{12}wlx^3 - \frac{1}{24}wx^4 + \frac{1}{12}Wx^3 - \frac{1}{6}W(x - \tfrac{1}{2}l)^3 - \frac{1}{16}Wlx^2$$

$$\text{e} \quad y = \frac{w}{24\,EI}(2lx^3 - l^2x^2 - x^4) + \frac{W}{48\,EI}(l^3 - 6l^2x + 9lx^2 - 4x^3), \quad \tfrac{1}{2}l \leq x \leq l.$$

A deflexão máxima, que ocorre no meio da viga, é

$$-y_{max} = \frac{1}{384\,EI}(wl^4 + 2Wl^3).$$

21) Uma viga horizontal, de comprimento l, tem uma extremidade engastada e a outra simplesmente apoiada. *a*) Achar a equação da curva elástica admitindo uma carga uniformemente distribuída, de w kg por unidade de comprimento e uma carga concentrada, W, no centro. *b*) Determinar o ponto de deflexão máxima quando $l = 10$ unidades e $W = 10\,w$.

Tomemos os eixos como na figura e seja $P(x, y)$, um ponto qualquer. Há dois casos a considerar.

Quando $0 < x < \frac{1}{2}l$, as fôrças externas que agem no segmento P_1R são: a reação S, em R, distante $(l - x)$ de P_1; a carga $w(l - x)$ no meio de P_1R, a $\frac{1}{2}(l - x)$ de P_1; e W a $\left(\frac{1}{2}l - x\right)$ de P_1.

Então:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = S(l-x) - w(l-x) \times \tfrac{1}{2}(l-x) - W\left(\tfrac{1}{2}l - x\right) =$$

$$= S(l-x) - \tfrac{1}{2}w(l-x)^2 - W\left(\tfrac{1}{2}l - x\right).$$

Integrando uma vez e sabendo que $x = 0$, $dy/dx = 0$ em O,

$$EI\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}S(l-x)^2 + \frac{1}{6}w(l-x)^3 + \frac{1}{2}W\left(\tfrac{1}{2}l - x\right)^2 +$$

$$+ \frac{1}{2}Sl^2 - \frac{1}{6}wl^3 - \frac{1}{8}Wl^2.$$

Integrando novamente e sabendo que $x = y = 0$ em O,

$$A)\quad EIy = \frac{1}{6}S(l-x)^3 - \frac{1}{24}w(l-x)^4 - \frac{1}{6}W\left(\tfrac{1}{2}l - x\right)^3 +$$

$$+ \left(\frac{1}{2}Sl^2 - \frac{1}{6}wl^3 - \frac{1}{8}Wl^2\right)x - \frac{1}{6}Sl^3 + \frac{1}{24}wl^4 + \frac{1}{48}Wl^3.$$

Quando $\frac{1}{2}l < x < l$, as fôrças que agem em P_2R são: uma reação desconhecida S em R, a $(l-x)$ unidades de P_2 e a carga $w(l-x)$, a $\frac{1}{2}(l-x)$ unidades de P_2. Então:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = S(l-x) - \frac{1}{2}w(l-x)^2$$

e

$$B')\qquad EIy = \frac{1}{6}S(l-x)^3 - \frac{1}{24}w(l-x)^4 + C_1x + C_2.$$

Quando $x = \frac{1}{2}l$, os valores de EIy e $EI\dfrac{dy}{dx}$ dados por $A)$ e $B')$ devem ser iguais. Assim, C_1 e C_2 em $B')$ têm os valores das constantes de integração correspondentes, determinados em $A)$ e $B')$ transforma-se em

$$B)\quad EIy = \frac{1}{6}S(l-x)^3 - \frac{1}{24}w(l-x)^4 +$$

$$+ \left(\frac{1}{2}Sl^2 - \frac{1}{6}wl^3 - \frac{1}{8}Wl^2\right)x - \frac{1}{6}Sl^3 + \frac{1}{24}wl^4 + \frac{1}{48}Wl^3.$$

Para determinar S, temos $x = l$, $y = 0$ em R, em $B)$; daí

$$S = \frac{3}{8}wl + \frac{5}{16}W.$$

Fazendo as substituições em $A)$ e $B)$, temos:

$$y = \frac{w}{48EI}(5lx^3 - 3l^2x^2 - 2x^4) + \frac{W}{96EI}(11x^3 - 9lx^2), \quad 0 \le x \le \tfrac{1}{2}l$$

e

$$y = \frac{w}{48EI}(5lx^3 - 3l^2x^2 - 2x^4) + \frac{W}{96EI}(2l^3 - 12l^2x + 15lx^2 - 5x^3), \quad \tfrac{1}{2}l \le x \le l.$$

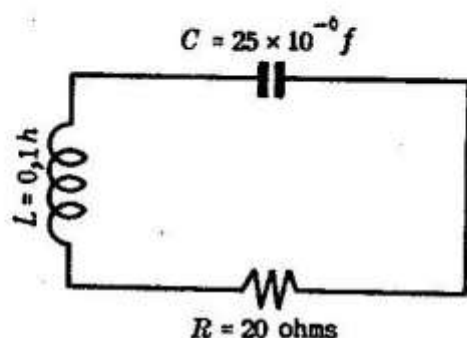
Está claro que a deflexão máxima ocorre num ponto à direita do ponto meio da viga. Para $l = 10$, $W = 10w$, a equação acima dá:

$$y = \frac{w}{48\,EI}(-2x^4 + 25x^3 + 450x^2 - 6000x + 10000).$$

Como $\dfrac{dy}{dx} = 0$ no ponto de deflexão máxima, temos:

$$8x^3 - 75x^2 - 900x + 6000 = 0$$

que resolvida dá a raiz real $x = 5,6$, aproximadamente. Assim, a deflexão máxima ocorre no ponto situado a 5,6 unidades da extremidade engastada, aproximadamente.

CIRCUITOS ELÉTRICOS

22) Num circuito elétrico temos uma indutância de 0,1 henry, uma resistência de 20 ohms e uma capacitância de 25 microfarads (1 microfarad $= 10^{-6}$ farad). Achar a carga q e a corrente i no tempo t nos seguintes casos: *a)* $q = 0,05$ coulomb e $i = dq/dt = 0$ quando $t = 0$. *b)* $q = 0,05$ coulomb e $i = -0,2$ ampères quando $t = 0$.

Para $L = 0,1$, $R = 20$, $C = 25 \times 10^{-6}$, $E(t) = 0$,

a equação
$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E(t)$$

reduz-se a
$$\frac{d^2q}{dt^2} + 200\frac{dq}{dt} + 400.000q = 0.$$

Integrando: $q = e^{-100t}(A \cos 100\sqrt{39}\,t + B \operatorname{sen} 100\sqrt{39}\,t)$.

Derivando em relação a t:

$$i = \frac{dq}{dt} = 100\,e^{-100t}\,[(\sqrt{39}\,B - A)\cos 100\sqrt{39}\,t - (\sqrt{39}\,A + B)\operatorname{sen} 100\sqrt{39}\,t]$$

a) Sabemos que $q = 0,05$ e $i = 0$ quando $t = 0$. Daí:

$$A = 0,05 \text{ e } B = \frac{0,05}{\sqrt{39}} = 0,008.$$

Assim: $q = e^{-100t}(0,05 \cos 624,5\,t + 0,008 \operatorname{sen} 624,5\,t)$

e $i = -0,32\,e^{-100t} \operatorname{sen} 624,5\,t$.

b) Sabemos que $q = 0,05$, $i = -0,2$ quando $t = 0$. Daí:

$$A = 0,05 \text{ e } B = 0,0077.$$

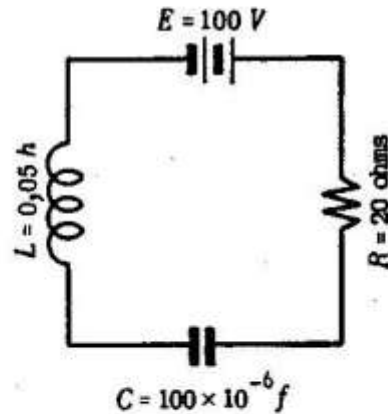
Assim: $q = e^{-100t}(0{,}05 \cos 624{,}5\,t + 0{,}0077 \operatorname{sen} 624{,}5\,t)$

e $i = e^{-100t}(-0{,}2 \cos 624{,}5\,t - 32{,}0 \operatorname{sen} 624{,}5\,t).$

Note que q e i são transitórios, tornando-se desprezíveis muito ràpidamente.

23) Num circuito temos uma indutância de 0,05 henry, uma resistência de 20 ohms, uma capacitância de 100 microfarads e uma fôrça eletromotriz (F.E.M.) $E = 100$ volts. Achar i e q sabendo que $q = 0$ e $i = 0$ quando $t = 0$.

Temos $$0{,}05 \frac{d^2q}{dt^2} + 20 \frac{dq}{dt} + \frac{q}{100 \times 10^{-6}} = 100$$

ou $$\frac{d^2q}{dt^2} + 400 \frac{dq}{dt} + 200.000q = 2000.$$

Integrando: $q = e^{-200t}(A \cos 400\,t + B \operatorname{sen} 400\,t) + 0{,}01.$

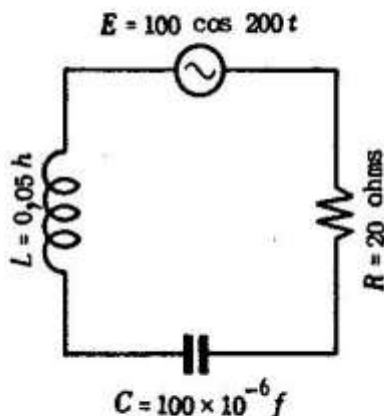
Derivando em relação a t:

$$i = \frac{dq}{dt} = 200\,e^{-200t}[(-A + 2B) \cos 400\,t + (-B - 2A) \operatorname{sen} 400\,t].$$

Das condições iniciais vem: $A = -0{,}01$, $-A + 2B = 0$ e $B = -0{,}005$.

Então $q = e^{-200t}(-0{,}01 \cos 400\,t - 0{,}005 \operatorname{sen} 400\,t) + 0{,}01$

e $i = 5e^{-200t} \operatorname{sen} 400\,t.$

Vê-se que i se torna desprezível muito cedo enquanto que q, pràticamente, tem o valor $q = 0{,}01$.

24) Resolver o Problema 23 supondo que haja a F.E.M. variável:

$$E(t) = 100 \cos 200\,t.$$

A equação diferencial é:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 400 \frac{dq}{dt} + 200.000q = 2000 \cos 200\,t.$$

Então:

$$q = e^{-200\,t}(A \cos 400\,t + B \operatorname{sen} 400\,t) + 0{,}01 \cos 200\,t + 0{,}005 \operatorname{sen} 200\,t \quad \text{e}$$

$$i = e^{-200\,t}[(-200\,A + 400\,B) \cos 400\,t + (-200\,B - 400\,A) \operatorname{sen} 400\,t] - 2 \operatorname{sen} 200\,t + \cos 200\,t.$$

Das condições iniciais, temos: $A = -0{,}01$, $-200\,A + 400\,B + 1 = 0$ e $B = -0{,}0075$.

Então:

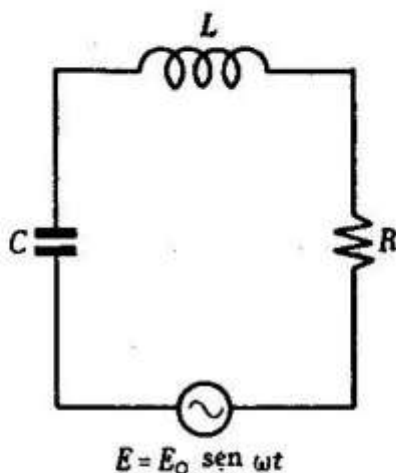
$$q = e^{-200t}(-0{,}01 \cos 400\,t - 0{,}0075 \operatorname{sen} 400\,t) + 0{,}01 \cos 200\,t + 0{,}005 \operatorname{sen} 200\,t$$

e

$$i = e^{-200t}(-\cos 400\,t + 5{,}5 \operatorname{sen} 400\,t) - 2 \operatorname{sen} 200\,t + \cos 200\,t.$$

Aqui, as partes transitórias de q e i tornam-se desprezíveis muito ràpidamente. Por esta razão, quando tais partes podem ser desprezadas, procura-se apenas a solução que dá o estado permanente:

$$q = 0{,}01 \cos 200\,t + 0{,}005 \operatorname{sen} 200\,t \quad \text{e} \quad i = \cos 200\,t - 2 \operatorname{sen} 200\,t.$$

A freqüência $200/2\pi$ ciclos/seg do estado permanente é igual à freqüência da F.E.M. aplicada. (Ver, também, o Problema 25).

25) Num circuito temos uma indutância L, uma resistência R, uma capacitância C e uma F.E.M. $E(t) = E_0 \operatorname{sen} \omega t$. Estabelecer a fórmula para a corrente do estado permanente:

$$i = \frac{E_0}{Z}\left(\frac{R}{Z} \operatorname{sen} \omega t - \frac{X}{Z} \cos \omega t\right) = \frac{E_0}{Z} \operatorname{sen} (\omega t - \theta),$$

onde $X = L\omega - \dfrac{1}{C\omega}$, $Z = \sqrt{X^2 + R^2}$ e θ é determinado de $\operatorname{sen} \theta = \dfrac{X}{Z}$ e $\cos \theta = \dfrac{R}{Z}$.

Derivando $L \dfrac{d^2 q}{dt^2} + R \dfrac{dq}{dt} + \dfrac{q}{C} = E_0 \operatorname{sen} \omega t$ e sabendo que $i = \dfrac{dq}{dt}$, temos

$$(1) \qquad L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = (LD^2 + RD + 1/C)\, i = \omega E_0 \cos \omega t.$$

A solução procurada é a integral particular de (1):

$$i = \frac{\omega E_0}{LD^2 + RD + 1/C} \cos \omega t = \frac{\omega E_0}{RD - \left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)\omega} \cos \omega t =$$

$$= \frac{\omega E_0 (RD + X\omega)}{R^2 D^2 - X^2 \omega^2} \cos \omega t = \frac{E_0}{R^2 + X^2} (R \operatorname{sen} \omega t - X \cos \omega t) =$$

$$= \frac{E_0}{Z}\left(\frac{R}{Z} \operatorname{sen} \omega t - \frac{X}{Z} \cos \omega t\right) = \frac{E_0}{Z} \operatorname{sen} (\omega t - \theta).$$

X é chamado reatância do circuito: quando $X = 0$, a amplitude de i é máxima (o circuito está em ressonância). Z, que é chamado a impedância do circuito, é a razão das amplitudes da F.E.M. e da corrente. θ é chamado o ângulo de fase.

Quando $t = \pi/2\omega,\ 3\pi/2\omega,\ \cdots\cdots$, a F.E.M. atinge a amplitude máxima, enquanto que nos tempos dados por $\omega t - \theta = \pi/2,\ 3\pi/2,\ \cdots\cdots$, isto é, quando $t = \dfrac{\pi/2+\theta}{\omega},\ \dfrac{3\pi/2+\theta}{\omega},\ \cdots\cdots$, a corrente atinge a amplitude máxima. Então a tensão está avançada em relação à corrente por um tempo θ/x ou a corrente e a tensão estão defasadas por um ângulo θ.

Note que $\theta = 0$ quando $X = 0$, isto é, $\theta = 0$ se houver ressonância.

26) O circuito que tenha uma indutância L, uma capacitância C e uma F.E.M. E, é conhecido como um circuito harmônico oscilante. Achar q e i quando $E = E_0 \cos \omega t$, sendo $q = q_0$ e $i = i_0$ no tempo inicial $t = t_0$.

Como $R = 0$, a equação diferencial é

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{q}{CL} = \frac{E_0}{L}\cos \omega t.$$

Há dois casos a considerar:

$$a)\quad \omega \neq \frac{1}{\sqrt{CL}} \quad \text{e} \quad b)\quad \omega = \frac{1}{\sqrt{CL}}.$$

a)
$$q = A\cos\frac{1}{\sqrt{CL}}t + B\,\text{sen}\,\frac{1}{\sqrt{CL}}t + \frac{E_0}{L}\,\frac{1}{D^2+1/CL}\cos\omega t =$$

$$= A\cos\frac{1}{\sqrt{CL}}t + B\,\text{sen}\,\frac{1}{\sqrt{CL}}t + \frac{E_0 C}{1-\omega^2 CL}\cos\omega t$$

e
$$i = \frac{1}{\sqrt{CL}}\left(-A\,\text{sen}\,\frac{1}{\sqrt{CL}}t + B\cos\frac{1}{\sqrt{CL}}t\right) - \frac{E_0 C\omega}{1-\omega^2 CL}\,\text{sen}\,\omega t.$$

Das condições iniciais: $A = q_0 - \dfrac{E_0 C}{1-\omega^2 CL}$ e $B = \sqrt{CL}\,i_0$. Então

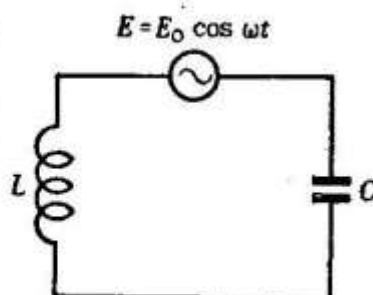
$$q = \left(q_0 - \frac{E_0 C}{1-\omega^2 CL}\right)\cos\frac{1}{\sqrt{CL}}t + \sqrt{CL}\,i_0\,\text{sen}\,\frac{1}{\sqrt{CL}}t + \frac{E_0 C}{1-\omega^2 CL}\cos\omega t$$

e

$$i = i_0\cos\frac{1}{\sqrt{CL}}t - \frac{1}{\sqrt{CL}}\left(q_0 - \frac{E_0 C}{1-\omega^2 CL}\right)\text{sen}\,\frac{1}{\sqrt{CL}}t - \frac{E_0 C\omega}{1-\omega^2 CL}\,\text{sen}\,\omega t.$$

b) Agora:
$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \omega^2 q = \frac{E_0}{L}\cos\omega t.$$

Então
$$q = A\cos\omega t + B\,\text{sen}\,\omega t + \frac{E_0}{2L\omega}t\,\text{sen}\,\omega t$$

e
$$i = \omega(-A\,\text{sen}\,\omega t + B\cos\omega t) + \frac{E_0}{2L}\left(\frac{1}{\omega}\,\text{sen}\,\omega t + t\cos\omega t\right).$$

Das condições iniciais: $A = q_0$ e $B = i_0/\omega$.

Então $q = q_0 \cos \omega t + \dfrac{i_0}{\omega} \operatorname{sen} \omega t + \dfrac{E_0}{2L\omega} t \operatorname{sen} \omega t$

e
$$i = i_0 \cos \omega t - q_0 \omega \operatorname{sen} \omega t + \frac{E_0}{2L}\left(\frac{1}{\omega} \operatorname{sen} \omega t + t \cos \omega t\right).$$

Note que em *b)* a freqüência da F.E.M. é a freqüência natural do oscilador, isto é, a freqüência quando não há F.E.M. O circuito está em ressonância porque a reatância X é igual a $L\omega - \dfrac{1}{C\omega} = 0$ quando $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{CL}}$. A presença do têrmo $\dfrac{E_0 t}{2L} \cos \omega t$, cuja amplitude aumenta com t, indica que, eventualmente, um tal circuito pode ser destruído.

PROBLEMAS PROPOSTOS

27) Determinar a equação da curva em que, em qualquer ponto, o raio de curvatura é proporcional à inclinação da tangente.

Resp.: $y = \pm\left(\sqrt{k^2 - (x + C_1)^2} + k \ln \dfrac{\sqrt{k^2 - (x + C_1)^2} - k}{x + C_1}\right) + C_2$

28) Um pêndulo de 15 cm de comprimento está prêso numa posição distante $\dfrac{1}{5}$ radiano da vertical. Pede-se a equação do movimento, quando o pêndulo é sôlto com a velocidade de $\dfrac{1}{2}$ rad/seg.

Resp.: $\theta = \dfrac{1}{5} \cos 8t - \dfrac{1}{16} \operatorname{sen} 8t$

29) Uma partícula de massa m é repelida de um ponto 0 por uma fôrça igual a k vêzes a sua distância ao ponto, sendo $k > 0$. Admitindo que a partícula tenha partido do repouso a uma distância a de 0, achar sua posição t seg mais tarde.

Resp.: $x = \dfrac{1}{2} a \left(e^{\sqrt{k/m}\, t} + e^{\sqrt{k/m}\, t}\right)$

30) No problema 29, $k = m$ e $a = 12m$. Determinar: *a)* a distância de 0 e a velocidade da partícula quando $t = 2$ seg; *b)* o instante em que a partícula se encontra a 18 m de 0 e a sua velocidade nesse momento.

Resp.: *a)* $x = 45{,}1\ m$, $v = 43{,}5\ m$/seg; *b)* $t = 0{,}96$ seg, $v = 13{,}4\ m$/seg.

31) Uma corda passa por uma roldana, ficando com 8 m de um lado e 10 m do outro. Tomando a fôrça de atrito igual ao pêso de 1 m de corda, achar o tempo que a corda leva para deslizar na roldana.

Resp.: $\dfrac{3}{\sqrt{g}} \ln (17 + 12\sqrt{2})$ seg

32) Quando, em duas esferas concêntricas e de raios r_1 e r_2, sendo $r_1 < r_2$, a interna está carregada elètricamente, a equação diferencial para o potencial V em um ponto qualquer entre as duas esferas e a uma distância r, do centro comum, é:

$$\frac{d^2 V}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dV}{dr} = 0.$$

Achar V, sabendo que $V = V_1$ quando $r = r_1$ e que $V = V_2$ quando $r = r_2$.

Resp.: $V = \dfrac{V_2 r_2 (r - r_1) - V_1 r_1 (r - r_2)}{r(r_2 - r_1)}$

33) *Uma determinada mola, sob a ação de um pêso de 9 lb, sofre uma deformação, alongando-se, de 3 pol. Retira-se o pêso inicial e prende-se na sua extremidade outro pêso de 24 lb, deixando-se o sistema entrar em repouso. Determinar a equação do movimento do pêso quando:

a) o pêso é puxado para baixo 4 pol. e, em seguida, sôlto;

b) o pêso é puxado para baixo 2 pol. e, em seguida, empurrado, para cima, com uma velocidade de 2 ft/seg;

c) o pêso é puxado para baixo 3 pol. e, em seguida, empurrado, para baixo, com uma velocidade de 4 ft/seg;

d) o pêso é levantado 3 pol. e, em seguida, sôlto;

e) o pêso é levantado 4 pol. e, em seguida, empurrado, para cima, com uma velocidade de 5 ft/seg.

Resp.: *a)* $x = \frac{1}{3}\cos 4\sqrt{3}\,t$

b) $x = \frac{1}{6}\cos 4\sqrt{3}\,t - \frac{\sqrt{3}}{6}\operatorname{sen} 4\sqrt{3}\,t$

c) $x = \frac{1}{4}\cos 4\sqrt{3}\,t + \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{sen} 4\sqrt{3}\,t$

d) $x = -\frac{1}{4}\cos 4\sqrt{3}\,t$

e) $x = -\frac{1}{3}\cos 4\sqrt{3}\,t - \frac{5\sqrt{3}}{12}\operatorname{sen} 4\sqrt{3}\,t$

34) Uma certa mola, sob a ação de um pêso de 30 lb, estica 3 pol. Retira-se o pêso inicial e prende-se na sua extremidade outro pêso de 64 lb, deixando-se o sistema entrar em repouso. Sabendo que a resistência do meio é, numèricamente, igual a $8\,\frac{dx}{dt}$ lb, achar a equação do movimento do pêso, quando:

a) o movimento é iniciado para baixo com a velocidade de 10 ft/seg;

b) o pêso é puxado, para baixo, 6 pol. e, em seguida, empurrado para cima com uma velocidade de 10 ft/seg.

Resp.: *a)* $x = \frac{5\sqrt{14}}{14} e^{-2t} \operatorname{sen} 2\sqrt{14}\,t$

b) $x = e^{-2t}\left(\frac{1}{2}\cos 2\sqrt{14}\,t - \frac{9\sqrt{14}}{28}\operatorname{sen} 2\sqrt{14}\,t\right)$

(*) Os problemas 33 a 35 estão apresentados em unidades inglêsas a fim de dar ao estudante oportunidade de praticar nesse sistema, ainda bastante empregado.

35) Uma determinada mola, tracionada por um pêso de 3 lb, estica 6 pol. Estando o sistema em repouso, o pêso é puxado para baixo 3 pol. e, em seguida, sôlto. Determinar a equação do movimento nos seguintes casos:

a) uma fôrça $\frac{3}{2}$ sen $6t$ age sôbre a mola;

b) uma fôrça $\frac{3}{2}$ sen $8t$ age sôbre a mola.

Resp.: *a*) $x = \frac{1}{4}\cos 8t - \frac{3}{7}\,\text{sen}\,8t + \frac{4}{7}\,\text{sen}\,6t$

b) $x = \frac{1}{4}(1 - 4t)\cos 8t + \frac{1}{8}\,\text{sen}\,8t$

36) Uma viga em balanço, engastada em uma extremidade, tem l metros de comprimento. Achar a equação da curva elástica e a deflexão máxima sabendo que há uma carga uniformemente distribuída de w kg/m e uma carga concentrada W kg na extremidade livre.

Resp.: $y = \frac{w}{24\,EI}(4lx^3 - 6l^2x^2 - x^4) + \frac{W}{6\,EI}(x^3 - 3lx^2)$;

$$-y_{max} = \frac{1}{24\,EI}(3wl^4 + 8Wl^3)$$

37) Uma viga, simplesmente apoiada nas extremidades, mede $2l$ metros de comprimento e suporta uma carga uniformemente distribuída de w kg/m. Tomando a origem no ponto meio (ponto mais baixo) da viga, achar a equação da curva elástica e a deflexão máxima. Comparar com o Problema 15.

Sugestão: $EIy'' = wl(l - x) - \frac{1}{2}w(l - x)^2 = \frac{1}{2}w(l^2 - x^2)$

e $y = y' = 0$ quando $x = 0$.

Resp.: $y = \frac{w}{24\,EI}(6l^2x^2 - x^4)$; $y_{max} = \frac{5wl^4}{24\,EI}$

38) Uma viga, simplesmente apoiada nas extremidades, mede $3l$ metros de comprimento e suporta uma carga uniformemente distribuída de w kg/m e cargas concentradas W kg situadas a l metros de cada extremidade. Tomando a origem como no problema 37, achar a deflexão máxima.

Sugestão: $M = \frac{w}{2}\left(\frac{9l^2}{4} - x^2\right) + W\left(\frac{3l}{2} - x\right)$; $\frac{l}{2} < x < \frac{3l}{2}$ e

$$M = \frac{w}{2}\left(\frac{9l^2}{4} - x^2\right) + Wl;\ 0 < x < \frac{l}{2}.$$

Resp.: $y_{max} = \frac{1}{384\,EI}(405wl^4 + 368Wl^3)$

39) Um circuito elétrico consiste de uma indutância de 0,05 henry, uma resistência de 5 ohms e uma capacitância de $4(10)^{-4}$ farad. Sabendo que $q = i = 0$ quando $t = 0$, achar q e i em função de t quando:

a) existe uma F.E.M. constante = 110 volts;

b) existe uma F.E.M. alternada = 200 cos $100t$.

Achar, no caso *b*), as soluções relativas ao estado permanente.

Resp.: *a*) $q = e^{-50\,t}\left(-\dfrac{11}{250}\cos 50\sqrt{19}\,t - \dfrac{11\sqrt{19}}{4750}\,\mathrm{sen}\,50\sqrt{19}\,t\right) + \dfrac{11}{250},$

$$i = \frac{44\sqrt{19}}{19}\,e^{-50\,t}\,\mathrm{sen}\,50\sqrt{19}\,t$$

b) $q = e^{-50\,t}\left(-\dfrac{16}{170}\cos 50\sqrt{19}\,t - \dfrac{12\sqrt{19}}{1615}\,\mathrm{sen}\,50\sqrt{19}\,t\right) + \dfrac{4}{170}\left(4\cos 100\,t + \mathrm{sen}\,100\,t\right),$

$$i = e^{-50\,t}\left(-\frac{40}{17}\cos 50\sqrt{19}\,t + \frac{1640\sqrt{19}}{323}\,\mathrm{sen}\,50\sqrt{19}\,t\right) + \frac{40}{17}\left(\cos 100\,t - 4\,\mathrm{sen}\,100\,t\right)$$

40) Resolver o Problema 39 depois de substituir a resistência de 5 ohms por uma de 50 ohms.

Resp.: *a*) $q = -0{,}047\,e^{-53\,t} + 0{,}0026\,e^{-947\,t} + 0{,}044,\; i = 2{,}46\,(e^{-53\,t} - e^{-947\,t})$

b) $q = -0{,}018\,e^{-53\,t} + 0{,}005\,e^{-947\,t} + 0{,}034\,\mathrm{sen}\,100\,t + 0{,}014\cos 100\,t,$

$i = 0{,}98\,e^{-53\,t} - 4{,}43\,e^{-947\,t} + 3{,}45\cos 100\,t - 1{,}38\,\mathrm{sen}\,100\,t$

Capítulo XXI

SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

Nos capítulos anteriores tratamos apenas de equações diferenciais de duas variáveis. Nos capítulos seguintes consideraremos as equações que envolvem mais de duas variáveis. Se sòmente uma das variáveis fôr independente, as equações são equações diferenciais ordinárias; em caso contrário, são chamadas equações diferenciais parciais. Neste capítulo trataremos dos sistemas de equações diferenciais ordinárias lineares, com coeficientes *constantes*, tais como:

$$A)\begin{cases} 2\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{dy}{dt}-4x-y=e^t \\ \dfrac{dx}{d} \qquad +3x+y=0 \end{cases} \qquad \text{ou } A')\begin{cases} 2(D-2)x+(D-1)y=e^t \\ (D+3)x+\ y\ =0, \text{ onde } D=\dfrac{d}{dt} \end{cases}$$

e

$$B)\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}+\dfrac{dy}{dt}+y=1 \\ \dfrac{dx}{dt}-\dfrac{dz}{dt}+2x+z=1 \\ \dfrac{dy}{dt}+\dfrac{dz}{dt}+y+2z=0 \end{cases} \qquad \text{ou } B')\begin{cases} Dx \quad +(D+1)y=1 \\ (D+2)x-(D-1)z=1 \\ (D+1)y+(D+2)z=0 \end{cases}$$

em que o número de equações do sistema é igual ao número de variáveis subordinadas.

O processo básico para resolver um sistema de equações diferenciais ordinárias, com n variáveis subordinadas, consiste em se determinar, por derivação das equações dadas, outro conjunto em que tôdas as variáveis, exceto uma, digamos x, possam ser eliminadas. A equação resultante da eliminação, uma vez resolvida, fornece o valor da variável não eliminada, x no caso. As outras variáveis são obtidas de modo semelhante.

EXEMPLO. Seja o sistema $A)$:

$$(1)\qquad 2\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - 4x - y = e^t, \qquad\qquad (2)\qquad \frac{dx}{dt} + 3x + y = 0.$$

Solução 1.

Notemos primeiro que a solução geral $x = x(t)$, $y = y(t)$ dêste sistema satisfará também à equação

$$(3)\qquad \frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = 0$$

obtida por derivação de (2). Além disso, multiplicando (1) por -1, (2) por -1, (3) por 1 e adicionando, obtemos

$$(4)\qquad \frac{d^2x}{dt^2} + x = -e^t$$

que também é satisfeita por $x = x(t)$, $y = y(t)$. Esta última equação diferencial, sendo independente de y e de suas derivadas, pode ser fàcilmente resolvida. Então:

$$x = C_1 \cos t + C_2 \operatorname{sen} t - \frac{1}{D^2 + 1}\, e^t = C_1 \cos t + C_2 \operatorname{sen} t - \tfrac{1}{2} e^t.$$

Para achar y, por processo anàlogo, derivamos (1) e obtemos

$$(5)\qquad 2\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} = e^t$$

e entre esta e as equações (1), (2), (3) eliminamos x e suas derivadas. Entretanto, aqui é mais simples proceder como se segue. De (2), temos

$$y = -\frac{dx}{dt} - 3x = -(-C_1 \operatorname{sen} t + C_2 \cos t - \tfrac{1}{2}e^t) - 3(C_1 \cos t + C_2 \operatorname{sen} t - \tfrac{1}{2}e^t) =$$
$$= (C_1 - 3C_2)\operatorname{sen} t - (3C_1 + C_2)\cos t + 2e^t.$$

Assim,

$$x = C_1 \cos t + C_2 \operatorname{sen} t - \tfrac{1}{2}e^t, \quad y = (C_1 - 3C_2)\operatorname{sen} t - (3C_1 + C_2)\cos t + 2e^t$$

é a solução geral.

Adotando-se a notação D, verifica-se que há uma semelhança muito forte entre o processo aqui usado e o método para resolver um sistema de n equações a n incógnitas. Deve-se isto ao fato, notado nos capítulos anteriores, de ser o operador D, em alguns casos, tratado como uma variável (símbolo).

Solução 2.

Seja o sistema $A')$:
$$(1)\qquad 2(D-2)x + (D-1)y = e^t$$
$$(2)\qquad (D+3)x + y = 0.$$

Procedendo como no caso de duas equações a duas variáveis, x e y, multiplicamos (2) por $D-1$. Realmente, operamos em (2) com $D - 1 = \left(\frac{d}{dt} - 1\right)$, para obter

$$(D-1)(D+3)x + (D-1)y = 0$$

e subtraindo (1) da equação obtida, temos:

$$[(D-1)(D+3) - 2(D-2)]\,x = -e^t \quad \text{ou} \quad (D^2+1)\,x = -e^t,$$

que é a equação (4) acima. Isto podia ter sido antecipado porque, operar em (2) com $D-1$, é equivalente a derivar (2) e adicionar (2) multiplicado por -1, como na solução anterior. A solução geral é obtida como se viu na Solução 1.

Solução 3.

Podemos, também, empregar determinantes. Do sistema A') obtemos:

$$\begin{vmatrix} 2(D-2) & D-1 \\ D+3 & 1 \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} e^t & D-1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{vmatrix} 2(D-2) & D-1 \\ D+3 & 1 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} 2(D-2) & e^t \\ D+3 & 0 \end{vmatrix}$$

ou
$$(D^2+1)\,x = -e^t \quad \text{e} \quad (D^2+1)\,y = 4e^t.$$

A primeira destas equações é a equação (4), acima, e a segunda seria obtida pelo processo rejeitado na Solução 1. Veremos, agora, porque êle foi rejeitado. Da solução das duas equações, temos:

$$(6) \quad x = C_1 \cos t + C_2 \operatorname{sen} t - \tfrac{1}{2}e^t \quad \text{e} \quad (7) \quad y = C_3 \cos t + C_4 \operatorname{sen} t + 2e^t.$$

Sabemos da Solução 1 que (6) e (7) encerram soluções estranhas. Para eliminá-las (isto é, para reduzir o número de constantes arbitrárias), substituímos em (2) e vemos que

$$(C_2 + 3\,C_1 + C_3)\cos t + (3\,C_2 - C_1 + C_4)\operatorname{sen} t = 0$$

para qualquer valor de t. Então:

$$C_3 = -(3\,C_1 + C_2) \quad \text{e} \quad C_4 = C_1 - 3\,C_2\,.$$

Entrando com êsses valores em (6) e (7), temos a solução geral encontrada acima.

O número de constantes arbitrárias independentes na solução geral do sistema

$$f_1(D)x + g_1(D)y = h_1(t)$$
$$f_2(D)x + g_2(D)y = h_2(t)$$

é igual ao grau de D do determinante $\Delta = \begin{vmatrix} f_1(D) & g_1(D) \\ f_2(D) & g_2(D) \end{vmatrix}$,

desde que Δ não seja idênticamente nulo. Se $\Delta \equiv 0$, o sistema é dependente. Tais sistemas não são considerados aqui.

Para o sistema A'), $\Delta = \begin{vmatrix} 2(D-2) & D-1 \\ D+3 & 1 \end{vmatrix} = -(D^2+1).$

O grau 2 de D é igual ao número de constantes arbitrárias que aparecem na solução geral.

O teorema pode ser fàcilmente estendido ao caso de n equações a n incógnitas.

PROBLEMAS RESOLVIDOS

1) Resolver o sistema: (1) $(D-1)x + Dy = 2t + 1$

(2) $(2D+1)x + 2Dy = t.$

Subtraindo duas vêzes (1) de (2), temos $3x = -3t - 2$. Entrando com $x = -t - 2/3$ em (1), temos:

$$Dy = 2t + 1 - (D-1)x = t + \frac{4}{3} \quad \text{e} \quad y = \frac{1}{2}t^2 + \frac{4}{3}t + C_1.$$

A solução geral é $x = -t - \dfrac{2}{3}$, $y = \dfrac{1}{2}t^2 + \dfrac{4}{3}t + C_1$.

Note que $\begin{vmatrix} D-1 & D \\ 2D+1 & 2D \end{vmatrix}$ é do grau 1 em D e sòmente existe uma constante arbitrária.

2) Resolver o sistema: (1) $(D+2)x + 3y = 0$

(2) $3x + (D+2)y = 2e^{2t}.$

Multiplicando (1) por $D+2$, e (2) por -3, e somando:

$$(D^2 + 4D - 5)x = -6e^{2t}.$$

Então $$x = C_1 e^t + C_2 e^{-5t} - \frac{6}{7}e^{2t}.$$

De (1), $y = -\dfrac{1}{3}(D+2)x = -C_1 e^t + C_2 e^{-5t} + \dfrac{8}{7}e^{2t}.$

3) Resolver o sistema: (1) $(D-3)x + 2(D+2)y = 2 \operatorname{sen} t$

(2) $2(D+1)x + (D-1)y = \cos t.$

Multiplicando (1) por $D-1$ e (2) por $2(D+2)$, temos

(3) $(D-1)(D-3)x + 2(D-1)(D+2)y = (D-1)[2 \operatorname{sen} t] = 2\cos t - 2 \operatorname{sen} t$

(4) $4(D+2)(D+1)x + 2(D+2)(D-1)y = 2(D+2)\cos t = 4\cos t - 2 \operatorname{sen} t.$

Subtraindo (3) de (4) e notando-se que $(D-1)(D+2) = (D+2)(D-1)$, porque os operadores têm coeficientes constantes.

$$[4(D^2 + 3D + 2) - (D^2 - 4D + 3)]x = (3D^2 + 16D + 5)x = 2\cos t$$

e

$$x = C_1e^{-5t} + C_2e^{-t/3} + \frac{2}{3D^2+16D+5}\cos t = C_1e^{-5t} + C_2{}^{-t/3} + \frac{1}{8D+1}\cos t =$$

$$= C_1e^{-5t} + C_2e^{-t/3} + (8 \operatorname{sen} t + \cos t)/65.$$

De (2), $(D-1)y = \cos t - 2(D+1)x =$

$$= \cos t + 8C_1 e^{-5t} - \frac{4}{3} C_2 e^{-t/3} - (18 \cos t + 14 \operatorname{sen} t)/65 =$$

$$= 8C_1 e^{-5t} - \frac{4}{3} C_2 e^{-t/3} (47 \cos t - 14 \operatorname{sen} t)/65.$$

Então $$ye^{-t} = \int (8C_1 e^{-6t} - \frac{4}{3} C_2 e^{-4t/3} + \frac{47 \cos t - 14 \operatorname{sen} t}{65} e^{-t})\, dt =$$

$$= -\frac{4}{3} C_1 e^{-6t} + C_2 e^{-4t/3} + \frac{61 \operatorname{sen} t - 33 \cos t}{130} e^{-t} + C_3 =$$

e $$y = -\frac{4}{3} C_1 e^{-5t} + C_2 e^{-t/3} + \frac{61 \operatorname{sen} t - 33 \cos t}{130} + C_3 e^{t}.$$

Como o grau de Δ é 2, a solução geral tem duas constantes arbitrárias Assim, substituindo x e y por estas expressões em (1) encontra-se $C_3 = 0$.

Então: $$x = C_1 e^{-5t} + C_2 e^{-t/3} + \frac{8 \operatorname{sen} t + \cos t}{65},$$

$$y = -\frac{4}{3} C_1 e^{-5t} + C_2 e^{-t/3} + \frac{61 \operatorname{sen} t - 33 \cos t}{130}$$

é a solução geral.

4) Resolver o sistema: (1) $(D^2 - 2)x - 3y = e^{2t}$

(2) $(D^2 + 2)y + x = 0.$

Achar a solução particular satisfazendo as condições $x = y = 1$, $Dx = Dy = 0$ quando $t = 0$.

Operando em (1) com D^2, temos: $D^4x - 2D^2x - 3D^2y = 4e^{2t}$. Como $D^2x = 2x + 3y + e^{2t}$, de (1), e $D^2y = -x - y$, de (2), temos: $(D^4 - 1)x = 6e^{2t}$.

Então:

$x = C_1 e^{t} + C_2 e^{-t} + C_3 \cos t + C_4 \operatorname{sen} t + \frac{2}{5} e^{2t}$ e, usando (1),

$$y = \frac{1}{3}[(D^2 - 2)x - e^{2t}] = -\frac{1}{3}(C_1 e^{t} + C_2 e^{-t}) - (C_3 \cos t + C_4 \operatorname{sen} t) - \frac{1}{15} e^{2t}.$$

Note que x poderia ser obtido também pelo uso de determinantes. Assim:

$$\begin{vmatrix} D^2 - 2 & -3 \\ 1 & D^2 + 2 \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} e^{2t} & 3 \\ 0 & D^2 + 2 \end{vmatrix}$$ ou $(D^4 - 1)x = 6e^{2t}$, etc.

Para $t = 0$,

$$x = C_1 + C_2 + C_3 + \frac{2}{5} = 1 \quad \text{e} \quad Dx = C_1 - C_2 + C_4 + \frac{4}{5} = 0,$$

$$y = -\frac{1}{3}(C_1 + C_2) - C_3 - \frac{1}{15} = 1 \quad \text{e} \quad Dy = -\frac{1}{3}(C_1 - C_2) - C_4 - \frac{2}{15} = 0.$$

Então $C_1 = 3/4$, $C_2 = 7/4$, $C_3 = 19/10$, $C_4 = 1/5$ e a solução particular procurada é:

$$x = \frac{1}{4}(3e^t + 7e^{-t}) - \frac{1}{10}(19 \cos t - 2 \operatorname{sen} t) + \frac{2}{5} e^{2t},$$

$$y = -\frac{1}{12}(3e^t + 7e^{-t}) + \frac{1}{10}(19 \cos t - 2 \operatorname{sen} t) - \frac{1}{15} e^{2t}.$$

5) Resolver o sistema:

(1) $(D+1)x + (D-1)y = e^t$. (2) $(D^2 + D + 1)x + (D^2 - D + 1)y = t^2$.

Operando em (1) com D^2+D+1 e em (2) com $D+1$, e subtraindo, temos:

$$2y = t^2 + 2t - 3e^t \quad \text{e} \quad y = \frac{1}{2}t^2 + t - \frac{3}{2}e^t.$$

Operando em (1) com $D^2 - D+1$ e em (2) com $D-1$, e subtraindo, temos

$$2x = t^2 - 2t + e^t \quad \text{e} \quad x = \frac{1}{2}t^2 - t + \frac{1}{2}e^t.$$

Note que $\begin{vmatrix} D+1 & D-1 \\ D^2+D+1 & D^2-D+1 \end{vmatrix} = 2$ é de grau 0 em D; assim, não há constantes arbitrárias na solução.

6) Resolver o sistema:

(1) $D^2x - m^2y = 0$, (2) $D^2y + m^2x = 0$.

Operando em (1) com D^2 e substituindo $D^2y = -m^2x$, de (2), temos:

$$D^4x - m^2(-m^2x) = D^4x + m^4x = (D^4 + m^4)x = 0.$$

Então:

$$D = \pm \frac{m}{\sqrt{2}}(1 \pm i) \text{ e } x = e^{mt/\sqrt{2}}(C_1 \cos mt/\sqrt{2} + C_2 \operatorname{sen} mt/\sqrt{2}) + $$
$$+ e^{-mt/\sqrt{2}}(C_3 \cos mt/\sqrt{2} + C_4 \operatorname{sen} mt/\sqrt{2}).$$

Com êsse valor de x em (1), temos:

$$y = \frac{1}{m^2} D^2x = e^{mt/\sqrt{2}}(C_2 \cos mt/\sqrt{2} - C_1 \operatorname{sen} mt/\sqrt{2}) +$$
$$+ e^{-mt/\sqrt{2}}(C_3 \operatorname{sen} mt/\sqrt{2} - C_4 \cos mt/\sqrt{2}).$$

7) Resolver o sistema:

(1) $(D^2 + 4)x - 3Dy = 0$, (2) $3Dx + (D^2 + 4)y = 0$.

Operando em (1) com D^2+4 e em (2) com $3D$, e somando, temos:

$$[(D^2 + 4)^2 + 9D^2]x = (D^2 + 16)(D^2 + 1)x = 0$$

e $$x = C_1 \cos 4t + C_2 \operatorname{sen} 4t + C_3 \cos t + C_4 \operatorname{sen} t.$$

Operando em (1) com $3D$ e em (2) com D^2+4, e somando, temos:

$(D^2+16)(D^2+1)y = 0$ e $y = K_1 \cos 4t + K_2 \operatorname{sen} 4t + K_3 \cos t + K_4 \operatorname{sen} t.$

Para eliminar as soluções estranhas, entramos com êsses valores de x e y em (1). Temos:

$$-12C_1 \cos 4t - 12C_2 \operatorname{sen} 4t + 3C_3 \cos t + 3C_4 \operatorname{sen} t + 12K_1 \operatorname{sen} 4t - \\ - 12K_2 \cos 4t + 3K_3 \operatorname{sen} t - 3K_4 \cos t = 0$$

para todos os valores de t; então:

$$K_1 = C_2, \quad K_2 = -C_1, \quad K_3 = -C_4, \quad K_4 = C_3.$$

A solução geral é: $x = C_1 \cos 4t + C_2 \operatorname{sen} 4t + C_3 \cos t + C_4 \operatorname{sen} t,$

$y = C_2 \cos 4t - C_1 \operatorname{sen} 4t - C_4 \cos t + C_3 \operatorname{sen} t.$

8) Resolver o sistema: (1) $Dx + (D+1)y = 1$

(2) $(D+2)x - (D-1)z = 1$

(3) $(D+1)y + (D+2)z = 0.$

Subtraindo (3) de (1), temos (4) $Dx - (D+2)z = 1$ que é independente de y.

Operando em (2) com D e em (4) com D + 2, e subtraindo, temos: $(5D+4)z = -2$; então $z = -\frac{1}{2} + C_1 e^{-4t/5}$. Com êsse valor de z em (3), temos: $(D+1)y = -(D+2)z = 1 - \frac{6}{5} C_1 e^{-4t/5}$; então:

$$y = e^{-t} \int (e^t - \frac{6}{5} C_1 e^{t/5})\,dt = e^{-t}(e^t - 6C_1 e^{t/5} + C_2) = 1 - 6C_1 e^{-4t/5} + C_2 e^{-t}.$$

Entrando com êsse valor de y em (1), temos:

$Dx = 1 - (D+1)y = \frac{6}{5} C_1 e^{-4t/5}$; então $x = -\frac{3}{2} C_1 e^{-4t/5} + C_3.$

Como $\begin{vmatrix} D & D+1 & 0 \\ D+2 & 0 & -(D-1) \\ 0 & D+1 & D+2 \end{vmatrix} = -(5D^2+9D+4)$ é do grau 2 em D, há duas constantes arbitrárias na solução geral. Entrando com os valores de x e z em (2), temos:

$\left(\frac{6}{5} C_1 e^{-4t/5} - 3C_1 e^{-4t/5} + 2C_3\right) - (-\frac{4}{5} C_1 e^{-4t/5} + \frac{1}{2} - C_1 e^{-4t/5}) = 1$ e, assim, $C_3 = \frac{3}{4}$. Então,

$$x = \frac{3}{4} - \frac{3}{2} C_1 e^{-4t/5}, \quad y = 1 - 6C_1 e^{-4t/5} + C_2 e^{-t}, \quad z = -\frac{1}{2} + C_1 e^{-4t/5}$$

é a solução geral.

9) Resolver o sistema:

$$\begin{array}{ll} (1) & (D+1)^2 x + 2Dy + 3Dz = 1 \\ (2) & Dx \qquad\qquad\quad + \; z = 0 \\ (3) & x \quad - Dy - Dz = 0. \end{array}$$

Achar a solução particular para a qual $x = z = 1$, $y = 0$ quando $t = 0$.

Primeiro, operando em (2) com D temos (4) $D^2x + Dz = 0$.

Em seguida, somando (3) a (1) duas vêzes e subtraindo (4) temos $(2D+3)\,x = 1$; então:

$$xe^{3t/2} = \frac{1}{2}\int e^{3t/2}\,dt = \frac{1}{3}e^{3t/2} + C_1 \quad \text{e} \quad x = \frac{1}{3} + C_1\,e^{-3t/2}.$$

De (2),
$$z = -Dx = \frac{3}{2}\,C_1\,e^{-3t/2}.$$

De (3), $Dy = x - Dz = \dfrac{1}{3} + C_1\,e^{-3t/2} + \dfrac{9}{4}C_1\,e^{-3t/2} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{13}{4}C_1\,e^{-3t/2}$;

então:
$$y = \frac{1}{3}\,t - \frac{13}{6}\,C_1\,e^{-3t/2} + C_2.$$

Como $\begin{vmatrix} (D+1)^2 & 2D & 3D \\ D & 0 & 1 \\ 1 & -D & -D \end{vmatrix} = 2D^2 = 3D$ é do grau 2 em D, há duas constantes arbitrárias e a solução geral é:

$$x = \frac{1}{3} + C_1\,e^{-3t/2}, \quad y = \frac{1}{3}\,t - \frac{13}{6}\,C_1\,e^{-3t/2} + C_2, \quad z = \frac{3}{2}\,C_1\,e^{-3t/2}.$$

Para $t = 0$: $x = \dfrac{1}{3} + C_1 = 1$ e $C_1 = \dfrac{2}{3}$; $y = \left(-\dfrac{13}{6}\right)\left(\dfrac{2}{3}\right) + C_2 = 0$ e $C_2 = \dfrac{13}{9}$. Então, a solução particular procurada é:

$$x = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}e^{-3t/2}, \quad y = \frac{1}{3}\,t - \frac{13}{9}e^{-3t/2} + \frac{13}{9}, \quad z = e^{-3t/2}.$$

Note que uma solução particular satisfazendo um conjunto de condições iniciais nem sempre pode ser obtida. Por exemplo, não há solução que satisfaça às condições $x = 1$, $y = z = 0$, para $t = 0$, porque $x = 1$, $y = 0$ contradiz $x = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2z}{3}$. Anàlogamente, $y = 0$, $z = 1$, $\dfrac{dx}{dt} = 1$, para $t = 0$, contradiz $\dfrac{dx}{dt} = -z$.

PROBLEMAS PROPOSTOS

Resolver os seguintes sistemas:

10) $Dx - (D+1)y = -e^t$

$x + (D-1)y = e^{2t}$

Resp.: $x = (C_1 - C_2)\cos t + (C_1 + C_2)\operatorname{sen} t + 3e^{2t}/5$

$y = C_1 \cos t + C_2 \operatorname{sen} t + 2e^{2t}/5 + e^t/2$

11) $(D+2)x + (D+1)y = t$

$5x + (D+3)y = t^2$

Resp.: $x = \dfrac{C_1 - 3C_2}{5}\operatorname{sen} t - \dfrac{3C_1 + C_2}{5}\cos t - t^2 + t + 3$

$y = C_1 \cos t + C_2 \operatorname{sen} t + 2t^2 - 3t - 4$

12) $(D+1)x + (2D+7)y = e^t + 2$

$-2x + (D+3)y = e^t - 1$

Resp.: $x = \dfrac{1}{2} C_1 e^{-4t}[\cos(t + C_2) - \operatorname{sen}(t + C_2)] - \dfrac{5e^t}{26} + \dfrac{13}{17}$

$y = C_1 e^{-4t} \operatorname{sen}(t + C_2) + \dfrac{2e^t}{13} + \dfrac{3}{17}$

13) $(D-1)x + (D+3)y = e^{-t} - 1$

$(D+2)x + (D+1)y = e^{2t} + t$

Resp.: $x = 2C_1 e^{-7t/5} + \dfrac{5}{17}e^{2t} + \dfrac{3}{7}t - \dfrac{1}{49}$

$y = 3C_1 e^{-7t/5} - \dfrac{1}{17}e^{2t} + \dfrac{1}{2}e^{-t} + \dfrac{1}{7}t - \dfrac{26}{49}$

14) $(D^2 + 16)x - 6Dy = 0$

$6Dx + (D^2 + 16)y = 0$

Resp.: $x = C_1 \cos 2t - C_2 \operatorname{sen} 2t + C_3 \cos 8t + C_4 \operatorname{sen} 8t$

$y = C_2 \cos 2t + C_1 \operatorname{sen} 2t + C_4 \cos 8t - C_3 \operatorname{sen} 8t$

15) $(D^2 + 4)x + y = \operatorname{sen}^2 z$

$(D^2 + 1)y - 2x = \cos^2 z$

Resp.: $x = C_1 \cos(\sqrt{2}\,z + C_2) + C_3 \cos(\sqrt{3}\,z + C_4) + \frac{1}{2}\cos 2z$

$y = -2C_1 \cos(\sqrt{2}\,z + C_2) - C_3 \cos(\sqrt{3}\,z + C_4) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2z$

16) $(D^2 + D + 1)x + (D^2 + 1)y = e^t$

$(D^2 + D)x + D^2 y = e^{-t}$

Resp.: $x = -e^t - 2e^{-t} - C_1$

$y = 2e^t + e^{-t} + C_1$

17) $(D-1)x + (D+2)y = 1 + e^t$

$(D+2)y + (D+1)z = 2 + e^t$

$(D-1)x + (D+1)z = 3 + e^t$

Resp.: $x = -1 + te^t/2 + C_2 e^t$

$y = e^t/6 + C_1 e^{-2t}$

$z = 2 + e^t/4 + C_3 e^{-t}$

Capítulo XXII

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS TOTAIS

As equações diferenciais

$$A)\qquad (3x^2y^2 - e^x z)\,dx + (2x^3y + \operatorname{sen} z)\,dy + (y\cos z - e^x)\,dz = 0,$$

$$B)\qquad (3xz + 2y)\,dx + x\,dy + x^2\,dz = 0,$$

$$C)\qquad y\,dx + dy + dz = 0,$$

sendo da forma geral

$$P(x, y, z, \cdots, t)\,dx + Q(x, y, z, \cdots, t)\,dy + \cdots\cdots + S(x, y, z, \cdots, t)\,dt = 0,$$

são chamadas equações diferenciais totais.

Pode ser fàcilmente verificado que $A)$ é a diferencial exata de

$$f(x, y, z) = x^3y^2 - e^x z + y \operatorname{sen} z = C,$$

sendo C uma constante arbitrária. Tais equações são chamadas equações diferenciais exatas.

A equação $B)$ não é uma equação diferencial exata, porém com um fator de integração igual a x, tem-se

$$(3x^2z + 2xy)dx + x^2\,dy + x^3\,dz = 0$$

que é a diferencial exata de $x^3z + x^2y = C$. As equações $A)$ e $B)$ são denominadas *integráveis.*

A equação $C)$ não é integrável, isto é, nenhuma primitiva

$$(1)\qquad f(x, y, z) = C$$

pode ser encontrada para ela. Verificar-se-á mais tarde (Problema 32) que para tais equações pode-se determinar uma solução (1) de acôrdo com uma relação $g(x, y, z) = 0$ preestabelecida entre as variáveis.

A condição de integrabilidade da equação diferencial total

(2) $$P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz = 0$$

é

(3) $$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + R\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) \equiv 0.$$

(Ver Problema 1).

Exemplo 1. Para a equação *B*),

$$P = 3xz + 2y,\ \frac{\partial P}{\partial y} = 2,\ \frac{\partial P}{\partial z} = 3x;\quad Q = x,\ \frac{\partial Q}{\partial x} = 1,\ \frac{\partial Q}{\partial y} = 0;$$

$$R = x^2,\ \frac{\partial R}{\partial x} = 2x,\ \frac{\partial R}{\partial y} = 0,$$

e (3) torna-se

$$(3xz + 2y)(0 - 0) + x(2x - 3x) + x^2(2 - 1) = 0 - x^2 + x^2 = 0.$$

A equação é integrável.

Exemplo 2. Para a equação *C*),

$$P = y,\ \frac{\partial P}{\partial y} = 1,\ \frac{\partial P}{\partial z} = 0;\quad Q = 1,\ \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial z} = 0;$$

$$R = 1,\ \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial R}{\partial y} = 0,$$

e (3) torna-se

$$y(0 - 0) + 1(0 - 0) + 1(1 - 0) \neq 0.$$

A equação não é integrável.

As condições para que (2) seja uma equação diferencial exata, são:

(4) $$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},\quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y},\quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Exemplo 3. Para a equação *A*),

$$P = 3x^2y^2 - e^x z,\qquad \frac{\partial P}{\partial y} = 6x^2y,\qquad \frac{\partial P}{\partial z} = -e^x;$$

$$Q = 2x^3y + \operatorname{sen} z,\qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 6x^2y,\qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = \cos z;$$

$$R = y\cos z - e^x,\qquad \frac{\partial R}{\partial x} = -e^x,\qquad \frac{\partial R}{\partial y} = \cos z,$$

e as condições (4) são satisfeitas. A equação é uma equação diferencial exata.

EXEMPLO 4. Do exemplo 1 vê-se prontamente que (4) não é satisfeita; assim, a equação *B*) não é uma equação diferencial exata.

Resolução de uma equação diferencial total integrável a três variáveis:

a) Se (2) é equação diferencial exata, a solução é evidente, na maioria das vêzes, depois de um reagrupamento de têrmos. (Ver Problema 3).

b) Se (2) não é equação diferencial exata, é possível achar um fator de integração. (Ver Problemas 4-6).

c) Se (2) é homogênea, uma variável, digamos z, pode ser separada das outras pela transformação $x = uz$, $y = vz$. (Ver Problemas 7-10).

d) Se não se achar nenhum fator de integração, considera-se uma das variáveis, digamos z, como constante. Integra-se a equação resultante, representando-se a constante de integração por $\phi(z)$. Determina-se a diferencial total da integral que se acabou de obter e comparam-se os coeficientes de suas diferenciais com os da equação diferencial dada, o que permite achar $\phi(z)$. Êste processo está ilustrado no Problema 13. (Ver também os Problemas 14-16).

Sistema de duas equações diferenciais totais a três variáveis. A solução do sistema

$$P_1\,dx + Q_1\,dy + R_1\,dz = 0 \tag{5}$$

$$P_2\,dx + Q_2\,dy + R_2\,dz = 0 \tag{6}$$

consiste em um par de relações

$$f(x, y, z) = C_1 \tag{7}$$

$$g(x, y, z) = C_2. \tag{8}$$

Para resolver um sistema dado:

e) Se (5) e (6) forem integráveis, cada uma delas pode ser resolvida por um ou mais dos processos *a*) - *d*). Assim, (7), digamos, é a solução geral (primitiva) de (5), e (8) é a solução geral de (6). (Ver Problema 18).

f) Se (5) é integrável, porém (6) não o é, então (7), digamos, é a solução completa de (5). Para obter (8), eliminamos uma variável e suas diferenciais por meio de (5), (6) e (7), e integramos a equação resultante. (Ver Problema 19).

g) Se nenhuma das equações é integrável, podemos usar o método do Capítulo XXI, tratando duas das variáveis, digamos x e y, como funções da terceira, z.

Em alguns casos poderá ser mais simples proceder do seguinte modo: eliminar primeiro dy e depois dz (ou qualquer outro par) entre (5) e (6), obtendo:

$$\begin{vmatrix} P_1 & Q_1 \\ P_2 & Q_2 \end{vmatrix} dx - \begin{vmatrix} Q_1 & R_1 \\ Q_2 & R_2 \end{vmatrix} dz = 0, \quad \begin{vmatrix} R_1 & P_1 \\ R_2 & P_2 \end{vmatrix} dx - \begin{vmatrix} Q_1 & R_1 \\ Q_2 & R_2 \end{vmatrix} dy = 0;$$

dar a essas equações a forma simétrica

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}, \tag{9}$$

onde

$$X = \lambda \begin{vmatrix} Q_1 & R_1 \\ Q_2 & R_2 \end{vmatrix}, \quad Y = \lambda \begin{vmatrix} R_1 & P_1 \\ R_2 & P_2 \end{vmatrix}, \quad Z = \lambda \begin{vmatrix} P_1 & Q_1 \\ P_2 & Q_2 \end{vmatrix}, \quad \lambda \neq 0.$$

(Note que êste é o processo de se obter as equações, sob a forma simétrica, de uma reta quando se conhecem as de dois planos projetantes da reta).

Das três equações

$$Y\,dx = X\,dy, \qquad X\,dz = Z\,dx, \qquad Z\,dy = Y\,dz \tag{9'}$$

dadas por (9), qualquer uma pode ser obtida das outras duas. Assim, para obter (9) mudamos, simplesmente, o par de equações diferenciais originais por um par equivalente, isto é, por duas quaisquer de (9').

Se duas de (9') são integráveis, procedemos como em *e*). (Ver Problema 20).

Se apenas uma de (9') é integrável, procedemos como em *f*). (Ver Problema 21).

Se nenhuma de (9') é integrável, aumentamos o número de equações. Por um princípio bem conhecido, temos:

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z} = \frac{l_1\,dx + m_1\,dy + n_1\,dz}{l_1\,X + m_1\,Y + n_1\,Z} = \frac{l_2\,dx + m_2\,dy + n_2\,dz}{l_2\,X + m_2\,Y + n_2\,Z}$$

onde os l, m, n são funções arbitrárias das variáveis, tais como:

$$lX + mY + nZ \neq 0.$$

Pela escolha apropriada dos fatôres, é possível obter uma equação integrável, digamos:

$$\frac{dy}{Y} = \frac{l\,dx + m\,dy + n\,dz}{lX + mY + nZ}$$

ou

$$\frac{a\,dx + b\,dy + c\,dz}{aX + bY + cZ} = \frac{p\,dx + q\,dy + r\,dz}{pX + qY + rZ}.$$

Se isso fôr conseguido, procederemos como em *f*). (Ver Problema 22).

Na prática, é mais simples, algumas vêzes, achar uma segunda equação integrável, por meio de fatôres, do que seguir o que se viu em *f*). (Ver Problemas 23-24).

Se $lX + mY + nZ = 0$, então $l\,dx + m\,dy + n\,dz = 0$, também.

Se a última expressão é integrável, integramos e temos uma das relações procuradas. (Ver Problemas 25-29).

PROBLEMAS RESOLVIDOS

1) Obter a condição de integrabilidade de $P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0$.

Suponhamos que a equação dada tenha sido obtida por derivação de

$$f(x, y, z) = C \tag{1}$$

e talvez, excluindo um fator comum $\mu(x, y, z)$. Como, de (1),

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = 0,$$

segue-se que: $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \mu P, \quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = \mu Q \quad$ e $\quad \dfrac{\partial f}{\partial z} = \mu R.$

Supondo que as condições de existência e continuidade estejam satisfeitas:

$$A)\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \mu\frac{\partial P}{\partial y} + P\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\frac{\partial Q}{\partial x} + Q\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$$

$$B)\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial y} = \mu\frac{\partial Q}{\partial z} + Q\frac{\partial \mu}{\partial z} = \mu\frac{\partial R}{\partial y} + R\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}$$

$$C)\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z} = \mu\frac{\partial R}{\partial x} + R\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu\frac{\partial P}{\partial z} + P\frac{\partial \mu}{\partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial x}.$$

Multiplicando estas relações por R, P, Q, respectivamente, e somando, temos:

$$\mu\left(R\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial z} + Q\frac{\partial R}{\partial x}\right) = \mu\left(R\frac{\partial Q}{\partial x} + P\frac{\partial R}{\partial y} + Q\frac{\partial P}{\partial z}\right).$$

A condição procurada é:

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + R\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0.$$

2) Se $\mu(x, y, z) = 1$ no Problema 1, a equação é uma equação diferencial exata. Mostrar que isto acarreta:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Estas relações resultam de *A*), *B*), *C*) do Problema 1. Por exemplo, se $\mu = 1$, *A*) dá $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

3) Resolver $(x - y)\,dx - x\,dy + z\,dz = 0$.

Como $\dfrac{\partial P}{\partial y} = -1 = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial z} = 0 = \dfrac{\partial R}{\partial y}$, $\dfrac{\partial R}{\partial x} = 0 = \dfrac{\partial P}{\partial z}$, a equação é uma equação diferencial exata.

Reagrupando vem: $x\,dx - (x\,dy + y\,dx) + z\,dz = 0$. Integrando, temos:

$$\tfrac{1}{2}x^2 - xy + \tfrac{1}{2}z^2 = K \quad \text{ou} \quad x^2 - 2xy + z^2 = C.$$

4) Resolver $y^2\,dx - z\,dy + y\,dz = 0$.

Temos $P = y^2$, $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 2y$, $\dfrac{\partial P}{\partial z} = 0$; $Q = -z$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial Q}{\partial z} = -1$; $R = y$, $\dfrac{\partial R}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial R}{\partial y} = 1$; então $P\left(\dfrac{\partial Q}{\partial z} - \dfrac{\partial R}{\partial y}\right) + Q\left(\dfrac{\partial R}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial z}\right) + R\left(\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}\right) = y^2((-1-1) - z(0-0) + y(2y-0) = 0$ e a equação é integrável. O fator de integração $1/y^2$ reduz a equação a $dx + \dfrac{y\,dz - z\,dy}{y^2} = 0$ cuja solução é $x + z/y = C$.

5) Resolver $(2x^3 y + 1)\,dx + x^4\,dy + x^2 \operatorname{tg} z\,dz = 0$.

A condição de integrabilidade está satisfeita porque:

$$(2x^3 y + 1)(0 - 0) + x^4(2x \operatorname{tg} z - 0) + x^2 \operatorname{tg} z\,(2x^3 - 4x^3) = 0.$$

O fator de integração $1/x^2$ reduz a equação a

$\left(2xy + \dfrac{1}{x^2}\right) dx + x^2\,dy + \operatorname{tg} z\,dz = 0$ ou $(2xy\,dx + x^2\,dy) + \dfrac{1}{x^2}\,dx + \operatorname{tg} z\,dz = 0$ cuja solução é $x^2 y - \dfrac{1}{x} + \ln \sec z = C$.

6) Resolver $(2x^3 - z)z\,dx + 2x^2 yz\,dy + x(z + x)\,dz = 0$.

O processo normal aqui seria mostrar que a equação é integrável e, em seguida, procurar um fator de integração. Examinando os problemas precedentes, vê-se que, depois de usar o fator de integração, apenas uma variável aparece numa diferencial exata. A variável z, por exemplo, em $\operatorname{tg} z\,dz$, no Problema 5.

Ora, a equação dêste problema, dividida por $x^2 z$, apresenta a variável y no têrmo $2y\,dy$, que é diferencial exata. Assim, usaremos $1/x^2 z$ como um possível fator de integração. Temos: $2x\,dx + 2y\,dy + \dfrac{1}{z}\,dz + \dfrac{x\,dz - z\,dx}{x^2} = 0$ cuja solução é $x^2 + y^2 + \ln z + \dfrac{z}{x} = C$.

É claro que a separação das variáveis aqui não indica que a equação seja integrável; por exemplo, $x\,dx + z\,dy + dz = 0$ não é integrável, não obstante x aparecer sòmente numa diferencial exata.

7) Mostrar que sendo $P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0$ homogênea (*i. e.*, P, Q, R são homogêneos e do mesmo grau) a substituição $x = uz$, $y = vz$ separará a variável z das variáveis u e v.

Admitamos que P, Q, R sejam do grau n nas variáveis.

Fazendo $x = uz$, $y = vz$, a equação se transforma em:

$$P(uz, vz, z)[u\,dz + z\,du] + Q(uz, vz, z)[v\,dz + z\,dv] + R(uz, vz, z)\,dz = 0.$$

Pondo o fator comum z^n em evidência, simplificando e reagrupando, temos:

$$z[P(u,v,1)\,du + Q(u,v,1)\,dv] + [uP(u,v,1) + vQ(u,v,1) + R(u,v,1)]\,dz = 0$$

ou

$$z(P_1\,du + Q_1\,dv) + (uP_1 + vQ_1 + R_1)\,dz = 0, \quad \text{onde} \quad P_1 = P(u,v,1), \quad \text{etc.}$$

Esta expressão pode ser escrita

$$A) \qquad \frac{P_1}{uP_1 + vQ_1 + R_1}\,du + \frac{Q_1}{uP_1 + vQ_1 + R_1}\,dv + \frac{1}{z}\,dz = 0$$

aparecendo a variável z sòmente no último têrmo.

A condição de integrabilidade para A),

$$\frac{1}{z}\left(\frac{\partial}{\partial u}\,\frac{Q_1}{uP_1 + vQ_1 + R_1} - \frac{\partial}{\partial v}\,\frac{P_1}{uP_1 + vQ_1 + R_1}\right) = 0,$$

estará satisfeita desde que a equação original seja integrável e, quando isto acontece, a soma dos dois primeiros têrmos de A) é uma diferencial exata. Além disso, como o terceiro têrmo é uma diferencial exata, A) é uma equação diferencial exata desde que $P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0$ seja integrável.

8) Resolver a equação homogênea $2(y+z)\,dx - (x+z)\,dy + (2y - x + z)\,dz = 0$.

A equação é integrável porque

$$2(y+z)(-1-2) - (x+z)(-1-2) + (2y-x+z)(2+1) = 0.$$

A transformação $x = uz$, $y = vz$ reduz a equação dada a:

$$2z(v+1)(u\,dz + z\,du) - z(u+1)(v\,dz + z\,dv) + z(2v - u + 1)\,dz = 0.$$

Dividindo por z e reagrupando, temos:

$$2z(v+1)\,du - z(u+1)\,dv + (uv + u + v + 1)\,dz = 0$$

ou, dividindo por $z(uv + u + v + 1) = z(u+1)(v+1)$,

$$\frac{2\,du}{u+1} - \frac{dv}{v+1} + \frac{dz}{z} = 0.$$

Então: $2\ln(u+1) - \ln(v+1) + \ln z = \ln K$, $z(u+1)^2 = K(v+1)$,

$$(x+z)^2 = K(y+z) \quad \text{ou} \quad y + z = C(x+z)^2.$$

9) Resolver a equação homogênea $yz\,dx - z^2\,dy - xy\,dz = 0$.

A equação é integrável porque $yz(-2z + x) - z^2(-y-y) - xy(z-0) = 0$.

Fazendo $x = uz$, $y = vz$, temos:

$$vz^2(u\,dz + z\,du) - z^2(v\,dz + z\,dv) - uvz^2\,dz = 0.$$

Dividindo por z^2 e reagrupando,

$$vz\,du - z\,dv - v\,dz = 0 \quad \text{ou} \quad du - \frac{dv}{v} - \frac{dz}{z} = 0.$$

Então: $u - \ln v - \ln z = \ln K$, $vz = Ce^u$ ou $y = Ce^{x/z}$.

10) Resolver $(2y - z)\,dx + 2(x - z)\,dy - (x + 2y)\,dz = 0$.

A equação é homogênea e, por inspeção, vê-se que é uma equação diferencial exata porque pode ser posta na forma:

$$2(y\,dx + x\,dy) - (z\,dx + x\,dz) - 2(z\,dy + y\,dz) = 0.$$

A solução é $2xy - xz - 2yz = C$.

11) Mostrar que $xP + yQ + zR = C$ é a solução de $P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0$ quando a equação fôr uma equação diferencial exata e homogênea, de grau $n \neq -1$.

Primeiro, verificamos o teorema empregando a equação do Problema 10. Aqui:

$$xP + yQ + zR = x(2y - z) + 2y(x - z) - z(x + 2y) = 2(2xy - xz - 2yz)$$

e obtemos a solução acima.

De $xP + yQ + zR = C$, temos, por diferenciação:

$$A)\quad \left(P + x\frac{\partial P}{\partial x} + y\frac{\partial Q}{\partial x} + z\frac{\partial R}{\partial x}\right)dx + \left(Q + x\frac{\partial P}{\partial y} + y\frac{\partial Q}{\partial y} + z\frac{\partial R}{\partial y}\right)dy + \\ + \left(R + x\frac{\partial P}{\partial z} + y\frac{\partial Q}{\partial z} + z\frac{\partial R}{\partial z}\right)dz = 0.$$

Como a equação dada é uma equação diferencial exata:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}.$$

Entrando com essas expressões em A), temos:

$$B)\quad \left(P + x\frac{\partial P}{\partial x} + y\frac{\partial P}{\partial y} + z\frac{\partial P}{\partial z}\right)dx + \left(Q + x\frac{\partial Q}{\partial x} + y\frac{\partial Q}{\partial y} + z\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy + \\ + \left(R + x\frac{\partial R}{\partial x} + y\frac{\partial R}{\partial y} + z\frac{\partial R}{\partial z}\right)dz = 0.$$

Como a equação dada é homogênea: $x\dfrac{\partial P}{\partial x} + y\dfrac{\partial P}{\partial y} + z\dfrac{\partial P}{\partial z} = nP$, etc., de acôrdo com a Fórmula de Euler para as funções homogêneas.

Fazendo as substituições em B), temos:

$$(n + 1)P\,dx + (n + 1)Q\,dy + (n + 1)R\,dz = 0$$

ou, como $n \neq -1$, $\qquad P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0.$

12) Resolver

$$(y^2+z^2+2xy+2xz)\,dx+(x^2+z^2+2xy+2yz)\,dy+(x^2+y^2+2xz+2yz)\,dz=0.$$

A equação é homogênea, de grau 2, e é também uma equação diferencial exata porque

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2(y+x)=\frac{\partial Q}{\partial x},\quad \frac{\partial Q}{\partial z}=2(z+y)=\frac{\partial R}{\partial y},\quad \frac{\partial R}{\partial x}=2(x+z)=\frac{\partial P}{\partial z}.$$

A solução é

$$x(y^2+z^2+2xy+2xz)+y(x^2+z^2+2xy+2yz)+z(x^2+y^2+2xz+2yz)=K$$

ou $$x(y^2+z^2)+y(x^2+z^2)+z(x^2+y^2)=C.$$

13) Resolver a equação diferencial $P\,dx+Q\,dy+R\,dz=0$ sabendo que sòmente a condição de integrabilidade está satisfeita.

Consideremos uma das variáveis, digamos z, como constante, no momento, e façamos a solução da equação resultante

(1) $$P\,dx+Q\,dy=0$$

igual a

(2) $$u(x,y,z)=\phi(z).$$

Diferenciando (2) em relação a tôdas as variáveis:

(3) $$\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz=\phi'(z)\,dz=d\phi.$$

Agora $\frac{\partial u}{\partial x}=\mu P$ e $\frac{\partial u}{\partial y}=\mu Q$, onde $\mu=\mu(x,y,z)$ é um fator de integração de (1). Substituindo em (3), temos:

$$\mu P\,dx+\mu Q\,dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz=d\phi.$$

Porém, da equação dada $\mu P\,dx+\mu Q\,dy+\mu R\,dz=0$ de modo que

$$d\phi=\frac{\partial u}{\partial z}dz-\mu R\,dz=\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\mu R\right)dz.$$

Esta relação é independente de dx e dy e, usando (2) se necessário, pode ser escrita como uma equação diferencial em z e ϕ. Resolvendo a integral para ϕ e substituindo em (2), temos a solução procurada.

14) Resolver $2(y+z)\,dx-(x+z)\,dy+(2y-x+z)\,dz=0$. (Ver Problema 8).

Tratamos z como constante e resolvemos

$$2(y+z)\,dx-(x+z)\,dy=0 \quad\text{ou}\quad \frac{dy}{dx}-\frac{2}{x+z}y=\frac{2z}{x+z},$$

usando o fator de integração $e^{-2\int dx/(x+z)}=\frac{1}{(x+z)^2}$, para obter

A) $$\frac{y}{(x+z)^2}=\int\frac{2z}{(x+z)^3}dx=-\frac{z}{(x+z)^2}+\phi(z).$$

Diferenciando A) em relação a tôdas as variáveis:

$$\frac{dy}{(x+z)^2} - \frac{2y}{(x+z)^3}(dx+dz) = -\frac{dz}{(x+z)^2} + \frac{2z}{(x+z)^3}(dx+dz) + d\phi$$

ou $$2(y+z)\,dx - (x+z)\,dy + (2y-x+z)\,dz + (x+z)^3\,d\phi = 0.$$

Comparando esta com a equação dada, vê-se que $(x+z)^3\,d\phi = 0$ e $\phi = C$.

Como, de A), $y + z = \phi(x+z)^2$, a solução é $y + z = C(x+z)^2$.

15) Resolver $(e^x y + e^z)\,dx + (e^y z + e^x)\,dy + (e^y - e^x y - e^y z)\,dz = 0$.

A equação é integrável porque:

$$(e^x y + e^z)(e^y - e^y + e^z + e^y z) + (e^y z + e^x)(-e^x y - e^z) + (e^y - e^x y - e^y z)(e^x - e^x) = 0.$$

Considerando z como constante e resolvendo a equação resultante

$$(e^x y\,dx + e^x\,dy) + e^y z\,dy + e^z\,dx = 0,$$

temos $$e^x y + e^y z + e^z x = \phi(z).$$

Diferenciando em relação às variáveis:

$$(e^x y + e^z)\,dx + (e^y z + e^x)\,dy + (e^y + e^z x)\,dz = d\phi.$$

Da equação dada temos:

$$(e^x y + e^z)\,dx + (e^y z + e^x)\,dy + (e^y + e^z x)\,dz = (e^x y + e^y z + e^z x)\,dz.$$

Então: $d\phi = (e^x y + e^y z + e^z x)\,dz = \phi dz$ e $\phi = Ce^z$.

A solução procurada é

$$e^x y + e^y z + e^z x = Ce^z.$$

16) Resolver $yz\,dx + (xz - yz^3)\,dy - 2xy\,dz = 0$.

A equação é integrável porque

$$yz(x - 3yz^2 + 2x) + (xz - yz^3)(-2y - y) - 2xy(z - z) = 0.$$

Considerando y como constante e resolvendo a equação resultante

$$yz\,dx - 2xy\,dz = 0 \quad \text{ou} \quad z\,dx - 2x\,dz = 0,$$

temos $$\ln x - 2\ln z = \ln\phi(y) \quad \text{ou} \quad x = \phi z^2.$$

Diferenciando e fazendo a substituição $\phi = x/z^2$, temos:

$$dx - 2\phi z\,dz - z^2\,d\phi = 0,\ dx - 2\frac{x}{z}\,dz - z^2\,d\phi = 0, \text{ ou } yz\,dx - 2xy\,dz - yz^3\,d\phi = 0.$$

Comparando esta equação com a que foi dada, temos:

$$(xz - yz^3)\,dy + yz^3\,d\phi = (\phi z^3 - yz^3)\,dy + yz^3\,d\phi = 0 \text{ ou } \phi\,dy + y\,d\phi - y\,dy = 0.$$

Então $\phi y - \frac{1}{2}y^2 = K$ ou $\phi = \frac{1}{2}y + K/y$ de modo que a solução é

$$x = \phi z^2 = z^2\left(\tfrac{1}{2}y + K/y\right) \quad \text{ou} \quad 2xy = y^2z^2 + Cz^2.$$

17) Discutir geomètricamente a solução da equação diferencial total integrável:

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0.$$

Seja (x_0, y_0, z_0) um ponto qualquer no espaço, para o qual $P_0 = P(x_0, y_0, z_0)$, $Q_0 = Q(x_0, y_0, z_0)$, $R_0 = R(x_0, y_0, z_0)$ não são todos nulos.

Supondo que P, Q, R são unívocas, os valores (P_0, Q_0, R_0) podem ser considerados como parâmetros diretores de uma única reta que passa pelo ponto. Assim, a equação diferencial dada pode ser encarada como definindo em cada ponto (x_0, y_0, z_0)

uma reta
$$\frac{x - x_0}{P_0} = \frac{y - y_0}{Q_0} = \frac{z - z_0}{R_0}$$

e um plano $\quad P_0(x - x_0) + Q_0(y - y_0) + R_0(z - z_0) = 0 \quad$ normal à reta.

A solução $f(x, y, z) = C$, de uma equação diferencial dada, representa uma família de superfícies tais que por um ponto qualquer do espaço (x_0, y_0, z_0) passe apenas uma superfície S_0, da família. A equação do plano tangente π_0 a esta superfície, no ponto considerado é:

$$(x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x_0} + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y_0} + (z - z_0)\frac{\partial f}{\partial z_0} = 0$$

e as equações da reta normal L_0 são: $\dfrac{x - x_0}{\dfrac{\partial f}{\partial x_0}} = \dfrac{y - y_0}{\dfrac{\partial f}{\partial y_0}} = \dfrac{z - z_0}{\dfrac{\partial f}{\partial z_0}}.$

Do Problema 1, temos: $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \lambda P$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \lambda Q$, $\dfrac{\partial f}{\partial z} = \lambda R$. Assim, a solução de uma equação diferencial total integrável, a três variáveis, é uma família de superfícies em que o plano tangente e a reta normal, em cada ponto, são, respectivamente, o plano e a reta associados com o ponto pela equação diferencial considerada.

SISTEMAS DE DUAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS TOTAIS A TRÊS VARIÁVEIS

18) Resolver o sistema: $(y + z)\,dx + (z + x)\,dy + (x + y)\,dz = 0$

$$(x + z)\,dx + y\,dy + x\,dz = 0.$$

As equações são integráveis. A primeira pode ser escrita do seguinte modo:

$$(y\,dx + x\,dy) + (z\,dy + y\,dz) + (x\,dz + z\,dx) = 0$$

e a solução é $\qquad xy + yz + zx = C_1$.

Da segunda temos: $x\,dx + y\,dy + (z\,dx + x\,dz) = 0$ e a solução é

$$x^2 + y^2 + 2xz = C^2.$$

Então $xy + yz + zx = C_1$, $x^2 + y^2 + 2xz = C_2$ é a solução geral do sistema.

Em um ponto qualquer do espaço, passa uma superfície de cada uma das famílias das relações achadas na solução. Como as duas superfícies têm, num ponto, uma curva comum, a solução do sistema é uma família de curvas. Esta família pode ser dada pelas equações de duas famílias quaisquer de superfícies que passem pela família de curvas. Por exemplo:

$$xy + yz + zx = C_1, \quad x^2 + y^2 + 2(C_1 - xy - yz) = C_2$$

constituem, também, a solução geral.

19) Resolver o sistema: (1) $\quad yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz = 0$

(2) $\quad z^2(dx + dy) + (xz + yz - xy)\,dz = 0.$

A primeira equação é integrável, com solução (3) $xyz = C_1$, porém a segunda não o é.

Multiplicando (1) por z, (2) por y, e subtraindo, temos:

$$z^2(y - x)\,dy + y^2(z - x)\,dz = 0.$$

Multiplicando a última por yz e substituindo $xyz = C_1$, de (3), o resultado é:

$$z^2(y^2z - C_1)\,dy + y^2(yz^2 - C_1)\,dz = 0 \quad \text{ou} \quad z\,dy + y\,dz - C_1\left(\frac{dy}{y^2} + \frac{dz}{z^2}\right) = 0$$

cuja solução é (4) $yz + C_1\left(\dfrac{y+z}{yz}\right) = C_2$.

As equações (3) e (4) formam uma solução geral. Entretanto, (4) pode ser substituída pela forma mais simples: (4') $xy + yz + xz = C_2$, obtida de (4) pela substituição de C_1.

20) Resolver o sistema: $\quad dx + 2dy - (x + 2y)\,dz = 0$

$$2dx + dy + (x - y)\,dz = 0.$$

Aqui: $\quad X = \lambda \begin{vmatrix} 2 & -(x+2y) \\ 1 & x - y \end{vmatrix} = 3\lambda x,$

$$Y = \lambda \begin{vmatrix} -(x+2y) & 1 \\ x - y & 2 \end{vmatrix} = -3\lambda(x + y), \quad Z = \lambda \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3\lambda.$$

Fazendo $\lambda = -1/3$, temos: $X = -x$, $Y = x + y$, $Z = 1$, e escrevemos o sistema na forma simétrica:

$$\frac{dx}{-x} = \frac{dy}{x+y} = \frac{dz}{1}.$$

Da equação integrável $\dfrac{dx}{-x} = \dfrac{dz}{1}$, temos: $z + \ln x = C_1$.

Da equação integrável $\dfrac{dx}{-x} = \dfrac{dy}{x+y}$, temos: $x^2 + 2xy = C_2$.

Então $z + \ln x = C_1$, $x^2 + 2xy = C_2$ formam a solução geral.

21) Resolver o sistema $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{x+z} = \frac{dz}{-z}$. Achar as equações das curvas integrais que passam pelos pontos *a*) (1, 1, 1) e *b*) (2, 1, 1).

Consideremos as equações $\frac{dx}{x} = \frac{dz}{-z}$ e $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{x+z}$. A primeira é integrável e dá $xz = C_1$.

A segunda não é integrável, porém reduz-se a $dy = (1 + C_1/x^2)\,dx$ pela substituição $z = C_1/x$. Integrando, temos $y = x - C_1/x + C_2$ ou, substituindo $C_1 = xz$, $y - x + z = C_2$. Então, $xz = C_1$, $y - x + z = C_2$ constituem a solução geral.

A curva integral que passa pelo ponto (1, 1, 1) é a interseção da superfície cilíndrica hiperbólica $xz = 1$ com o plano $y - x + z = 1$. A que passa por (2, 1, 1) é a interseção da superfície cilíndrica $xz = 2$ com o plano $y - x + z = 0$.

22) Resolver $\frac{dx}{y-z} = \frac{dy}{z-x} = \frac{dz}{y-x}$.

Nenhuma equação é integrável. Por meio dos multiplicadores $l = m = 1$, $n = 0$, temos:

$\frac{dz}{y-x} = \frac{l\,dx + m\,dy + n\,dz}{l(y-z) + m(z-x) + n(y-x)} = \frac{dx+dy}{y-x}$ ou $dx + dy - dz = 0$. Então:

A) $$x + y - z = C_1.$$

Usando *A*) para eliminar *z* em $\frac{dx}{y-z} = \frac{dy}{z-x}$, temos $\frac{dx}{C_1 - x} = \frac{dy}{y - C_1}$.

Então: $\ln(x - C_1) + \ln(y - C_1) = \ln C_2$, ou $(x - C_1)(y - C_1) = C_2$, ou, eliminando C_1 por meio de *A*),

B) $$(z - y)(z - x) = C_2.$$

A) e *B*) formam a solução geral.

23) Resolver $\frac{x^2\,dx}{y^3} = \frac{y^2\,dy}{x^3} = \frac{dz}{z}$.

Da equação integrável $\frac{x^2\,dx}{y^3} = \frac{y^2\,dy}{x^3}$ ou $x^5\,dx - y^5\,dy = 0$, temos:

A) $$x^6 - y^6 = C_1.$$

Podemos usar *A*) para eliminar *x* na equação não integrável $\frac{dz}{z} = \frac{y^2\,dy}{x^3}$.

Entretanto, é mais simples usar os multiplicadores $l = m = 1$, $n = 0$ para obter $\frac{dz}{z} = \frac{x^2\,dx + y^2\,dy}{x^3 + y^3}$. Então: $x^3 + y^3 = C_2 z^3$.

24) Resolver o sistema $\dfrac{dx}{x^2+y^2} = \dfrac{dy}{2xy} = \dfrac{dz}{(x+y)^3 z}$.

Usando $l = m = 1$, $n = 0$, temos:

$$\frac{dz}{(x+y)^3 z} = \frac{dx+dy}{(x+y)^2} \quad \text{ou} \quad \frac{dz}{z} = (x+y)(dx+dy).$$

Então: $$(x+y)^2 - 2\ln z = C_1 .$$

Usando $l_1 = m_1 = 1$, $n_1 = 0$ e $l_2 = 1$, $m_2 = -1$, $n_2 = 0$, temos $\dfrac{dx+dy}{(x+y)^2} = \dfrac{dx-dy}{(x-y)^2}$. Então

$$\frac{1}{x+y} = \frac{1}{x-y} + K \quad \text{ou} \quad y = C_2(x^2-y^2).$$

25) Resolver o sistema $\dfrac{dx}{y} = \dfrac{dy}{-x} = \dfrac{dz}{2x-3y}$.

A equação $\dfrac{dx}{y} = \dfrac{dy}{-x}$ ou $x\,dx + y\,dy = 0$ é integrável, dando $x^2+y^2 = C_1$.

Usando $l = 3$, $m = 2$, $n = 1$, temos $3(y) + 2(-x) + (2x-3y) = \vec{0}$. Assim, $3\,dx + 2\,dy + dz = 0$ e $3x + 2y + z = C_2$.

26) Resolver o sistema $\dfrac{dx}{4y-3z} = \dfrac{dy}{4x-2z} = \dfrac{dz}{2y-3x}$.

Procuramos multiplicadores l, m, n tais que

A) $$l(4y-3z) + m(4x-2z) + n(2y-3x) = 0.$$

Reagrupando A) na forma $(4m-3n)x + (4l+2n)y + (-3l-2m)z = 0$, vemos que A) estará satisfeita quando $4m-3n=0$, $4l+2n=0$, $-3l-2m=0$ ou $l:m:n = 2:-3:-4$. Então:

$$2\,dx - 3\,dy - 4\,dz = 0 \quad \text{e} \quad 2x - 3y - 4z = C_1 .$$

Escrevendo $4(ly+mx) + 3(-lz-nx) + 2(ny-mz) = 0$ e fazendo $ly+mx=0$, $-lz-nx=0$, $ny-mz=0$, temos $l:m:n = x:-y:-z$. Então:

$$x\,dx - y\,dy - z\,dz = 0 \quad \text{e} \quad x^2 - y^2 - z^2 = C_2 .$$

27) Resolver o sistema $\dfrac{p\,dx}{(q-r)yz} = \dfrac{q\,dy}{(r-p)xz} = \dfrac{r\,dz}{(p-q)xy}$.

Consideremos $l(q-r)yz + m(r-p)xz + n(p-q)xy = 0$.

De $q(lyz-nxy) + r(mxz-lyz) + p(nxy-mxz) = 0$ temos $l:m:n = x:y:z$. Então:

$$px\,dx + qy\,dy + rz\,dz = 0 \quad \text{e} \quad px^2 + qy^2 + rz^2 = C_1 .$$

De $z(lqy-mpx) + y(npx-lrz) + x(mrz-nqy) = 0$ temos $l:m:n = px:qy:rz$. Então:

$$p^2x\,dx + q^2y\,dy + r^2z\,dz = 0 \quad \text{e} \quad p^2x^2 + q^2y^2 + r^2z^2 = C_2 .$$

28) Resolver o sistema $\dfrac{dx}{x^2 + y^2 - yz} = \dfrac{dy}{-x^2 - y^2 + xz} = \dfrac{dz}{(x - y)\,z}$.

Usando $l = m = 1,\ n = -1$, temos:

$$(x^2 + y^2 - yz) + (-x^2 - y^2 + xz) - (x - y)\,z = 0.$$

Então:

$$dx + dy - dz = 0 \quad \text{e} \quad x + y - z = C_1 .$$

Usando $l = xz,\ m = yz,\ n = -(x^2 + y^2)$, achamos

$$xz\,(x^2 + y^2 - yz) + yz\,(-x^2 - y^2 + xz) - (x^2 + y^2)\,(x - y)\,z = 0.$$

Então $xz\,dx + yz\,dy - (x^2 + y^2)\,dz = 0$ ou $\dfrac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2} - \dfrac{dz}{z} = 0$

e $$\ln(x^2 + y^2) - 2\ln z = \ln C_2$$

ou $$x^2 = y^2 = C_2\,z^2.$$

29) Resolver o sistema $\dfrac{dx}{2x} = \dfrac{dy}{-y} = \dfrac{dz}{4xy^2 - 2z}$.

De $\dfrac{dx}{2x} = \dfrac{dy}{-y}$ temos $xy^2 = C_1$. Por inspeção:

$2y^4\,(2x) + 2yz\,(-y) - y^2\,(4xy^2 - 2z) = 0$; então $2y^4\,dx + 2yz\,dy - y^2\,dz = 0$

ou $$2\,dx - \frac{y^2\,dz - 2yz\,dy}{y^4} = 0 \quad \text{e} \quad 2x - \frac{z}{y^2} = C_2 .$$

30) Discutir geomètricamente a solução geral de $\dfrac{dx}{P} = \dfrac{dy}{Q} = \dfrac{dz}{R}$.

Suponhamos, por conveniência, que ao resolver o sistema obtivemos o seguinte par de equações integráveis:

$$P_1\,dx + Q_1\,dy + R_1\,dz = 0 \quad \text{e} \quad P_2\,dx + Q_2\,dy + R_2\,dz = 0$$

cujas integrais são, respectivamente:

$$g\,(x, y, z) = C_1 \quad \text{e} \quad h\,(x, y, z) = C_2 .$$

Por um ponto (x_0, y_0, z_0) qualquer do espaço, passam duas superfícies (correspondentes às duas famílias acima) cuja curva de interseção C_0 é a curva integral do sistema dado, no ponto considerado. Os planos tangentes às duas superfícies em (x_0, y_0, z_0) são normais às direções (P_1, Q_1, R_1) e (P_2, Q_2, R_2), determinadas no ponto, e a reta de interseção L_0 dêstes planos é normal às duas direções. Seja (X, Y, Z) um ponto diretor para L_0. Temos:

$$X = \lambda \begin{vmatrix} Q_1 & R_1 \\ Q_2 & R_2 \end{vmatrix}, \qquad Y = \lambda \begin{vmatrix} R_1 & P_1 \\ R_2 & P_2 \end{vmatrix}, \qquad Z = \lambda \begin{vmatrix} P_1 & Q_1 \\ P_2 & Q_2 \end{vmatrix}$$

proporcionais a P, Q, R (todos considerados no ponto).

L_0 é a tangente a C_0 em (x_0, y_0, z_0), porque a tangente a uma curva no espaço está contida no plano tangente, no ponto considerado, a uma superfície qualquer que contenha a curva. Assim, as curvas integrais do

sistema $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$ consistem de uma dupla infinidade de sistemas de curvas caracterizadas pelo fato de, num ponto qualquer, (x_0, y_0, z_0), a tangente à curva ter (P_0, Q_0, R_0) como parâmetros diretores.

31) Mostrar que a família de superfícies integrais de

(1) $$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0$$

e a família de curvas integrais de

(2) $$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$$

são ortogonais.

Isto é uma conseqüência de se ter, em um ponto, (x_0, y_0, z_0), qualquer, a direção (P_0, Q_0, R_0):

a) normal à superfície integral de (1) no ponto; (ver Problema 17) e

b) igual à direção da curva integral de (2) no ponto; (ver Problema 30).

32) Resolver (1) $y\,dx + x\,dy - (x + y + 2z)\,dz = 0$ de acôrdo com *a)* $z = a$, *b)* $x + y + 2z = 0$, *c)* $x + y = 0$. *d)* $xy = a$.

A equação (1) não é integrável. De cada superfície dada, podemos obter uma equação diferencial total integrável. Nosso problema é, então, resolver esta equação diferencial simultâneamente com (1), usando a solução particular da primeira, em vez da solução geral, como em *f)*, na introdução dêste capítulo.

a) Aqui $z = a$, $dz = 0$. Substituindo em (1) temos: $y\,dx + x\,dy = 0$. Daí: $xy = C$.

As equações $z = a$, $xy = C$, constituem uma solução de (1).

b) Substituindo $x + y + 2z = 0$ em (1), temos $y\,dx + x\,dy = 0$ e $xy = C$. A solução é: $xy = C$, $x + y + 2z = 0$.

c) Aqui $y = -x$, $dy = -dx$. Substituindo em (1), temos $x\,dx + z\,dz = 0$ e $x^2 + z^2 = C$.

A solução é: $x^2 + z^2 = C$, $x + y = 0$.

d) Aqui $xy = a$, $x\,dy + y\,dx = 0$. A equação (1) reduz-se a $(x+y+2z)\,dz = 0$.

Então: $x + 2y + 2z = 0$ ou $dz = 0$ e $z = C$.

$xy = a$, $x + y + 2z = 0$ e $z = C$, $xy = a$. Ambas constituem a solução.

33) Discutir geomètricamente o problema da solução de $P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0$ de acôrdo com a relação dada $g(x, y, z) = 0$.

Da relação $g(x, y, z) = 0$, temos $\frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial y}dy + \frac{\partial g}{\partial z}dz = 0$.

Resolvemos o sistema

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial y}dy + \frac{\partial g}{\partial z}dz = 0$$

usando a solução particular $g(x, y, z) = 0$ da última. Seja

$$f(x, y, z) = C, \quad g(x, y, z) = 0$$

a solução. As curvas integrais são as determinadas na superfície $g(x, y, z) = 0$ pelo sistema de superfícies $f(x, y, z) = C$. Assim, o Problema 32c pode ser enunciado como: Achar as curvas situadas na superfície (plano) $x + y = 0$ que satisfaçam à equação diferencial

$$y\,dx + x\,dy - (x + y + 2z)\,dz = 0.$$

Em um ponto qualquer (x_0, y_0, z_0) da superfície $g(x, y, z) = 0$, a reta de interseção L_0 dos planos tangentes a $g(x, y, z) = 0$ e à superfície do sistema $f(x, y, z) = C$, passando pelo ponto considerado, é tangente à curva de interseção das duas superfícies. Então, encontramos a família de curvas da superfície dada $g(x, y, z) = 0$, cuja tangente, em um ponto qualquer, está contida no plano que passa no ponto considerado, determinado pela equação diferencial. (Ver Problema 17).

Por exemplo, consideremos o Problema 32c. Na superfície $x + y = 0$, escolhamos um ponto qualquer $(a, -a, b)$. Neste ponto, o plano tangente a $x + y = 0$ (aqui, o próprio plano) é normal à direção $(1, 1, 0)$ e o plano tangente à superfície (da família) $x^2 + z^2 = a^2 + b^2$ é normal à direção $(a, 0, b)$. Os parâmetros diretores da reta de interseção L dêstes planos [a tangente à curva passando por $(a, -a, b)$], são $(-g, b, a)$.

O plano que passa por $(a, -a, b)$ determinado pela equação diferencial é normal à direção $[y, x, -(x + y + 2z)]_{(a, -a, b)} = (-a, a, -2b)$. Como $(-b, b, a)$ e $(-a, a, -2b)$ são direções normais, a reta L está contida no plano determinado pela equação diferencial.

34) Resolver (1) $2z\,dx + dy + y\,dz = 0$ de acôrdo com (2) $x + y + z = 0$.

De (2), $y = -x - z$ e $dy = -dx - dz$. Substituindo em (1), temos:

$$(3) \qquad (2z - 1)\,dx - (x + z + 1)\,dz = 0.$$

A transformação $z = z_1 + 1/2 \cdot x = x_1 - 3/2$ reduz (3) a

$$(4) \qquad 2z_1\,dx_1 - (x_1 + z_1)\,dz_1 = 0,$$

que é uma equação homogênea.

A transformação $x_1 = uz_1$ reduz (4) a

$$(u - 1)\,dz_1 + 2z_1\,du = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{dz_1}{z_1} + \frac{2\,du}{u - 1} = 0.$$

Então
$$\ln z_1 + 2\ln(u - 1) = \ln K$$

ou
$$z_1(u - 1)^2 = K.$$

Substituindo u por x^1/z^1, x_1 por $x + 3/2$ e z_1 por $z - 1/2$, temos:

$$(x - z + 2)^2 = C(2z - 1).$$

PROBLEMAS PROPOSTOS

Verificar a integrabilidade e resolver quando possível.

35) $(y + 3z)\,dx + (x + 2z)\,dy + (3x + 2y)\,dz = 0$ *Resp.:* $xy + 2yz + 3xz = C$

36) $(\cos x + e^x y)\,dx + (e^x + e^y z)\,dy + e^y\,dz = 0$ *Resp.:* $e^x y + e^y z + \operatorname{sen} x = C$

37) $dx + (x + z)\,dy + dz = 0$ *Resp.:* $y + \ln(x + z) = C$

38) $z^3\,dx + z\,dy - 2y\,dz = 0$ *Resp.:* $xz^2 + y = Cz^2$

39) $x^2\,dx - z^2\,dy - xy\,dz = 0$ *Resp.:* Não é integrável

40) $(x + z)^2\,dy + y^2\,(dx + dz) = 0$ *Resp.:* $y\,(x + z) = C\,(x + y + z)$

41) $2x\,(y + z)\,dx + (2yz - x^2 + y^2 - z^2)\,dy + (2yz - x^2 - y^2 + z^2)\,dz = 0$
Resp.: $x^2 + y^2 + z^2 = C\,(y + z)$

42) $yz\,dx - 2xz\,dy + xy\,dz = 0$ *Resp.:* $y^2 = Cxz$

43) $x\,dx + y\,dy + (x^2 + y^2 + z^2 + 1)\,z\,dz = 0$ *Resp.:* $(x^2 + y^2 + z^2)\,e^{z^2} = C$

44) $z\,(x^2 - yz - z^2)\,dx + xz\,(x + z)\,dy + x\,(z^2 - x^2 - xy)\,dz = 0$
Resp.: $(x + y)/z + (y + z)/x = C$

Resolver os seguintes sistemas:

45) $dx + dy + (x + y)\,dz = 0$
$z\,(dx + dy) + (x + y)\,dz = 0$ *Resp.:* $x + y = C_1\,e^{-z},\ x + y = C_2/z$

46) $2yz\,dx + x\,(z\,dy + y\,dz) = 0$
$y\,dx - x^2 z\,dy + y\,dz = 00$ *Resp.:* $x^2yz = C_1,\ x^2 z + x + z = C_2$

47) $\dfrac{x\,dx}{y^3 z} = \dfrac{dy}{x^2 z} = \dfrac{dz}{y^3}$ *Resp.:* $x^4 - y^4 = C_1,\ x^2 - z^2 = C_2$

48) $\dfrac{3\,dx}{yz} = \dfrac{dy}{xz} = \dfrac{dz}{xy}$ *Resp.:* $3x^2 - y^2 = C_1,\ y^2 - z^2 = C_2$

49) $\dfrac{dx}{1} = \dfrac{dy}{1} = \dfrac{dz}{(x + y)(1 + 2xy + 3x^2y^2)}$
Resp.: $x - y = C_1,\ z = xy + x^2y^2 + x^3y^3 + C_2$

50) $\dfrac{dx}{x^2 - y^2 - z^2} = \dfrac{dy}{2xy} = \dfrac{dz}{2xz}$ *Resp.:* $y = C_1 z,\ x^2 + y^2 + z^2 = C_2 z$

51) $\dfrac{dx}{3y - 2z} = \dfrac{dy}{z - 3x} = \dfrac{dz}{2x - y}$ *Resp.:* $x + 2y + 3z = C_1,\ x^2 + y^2 + z^2 = C_2$

52) $\dfrac{dx}{x\,(2y^4 - z^4)} = \dfrac{dy}{y\,(z^4 - 2x^4)} = \dfrac{dz}{z\,(x^4 - y^4)}$ *Resp.:* $xyz^2 = C_1,\ x^4 + y^4 + z^4 = C_2$

53) $\dfrac{dx}{x\,(z^2 - y^2)} = \dfrac{dy}{y\,(x^2 - z^2)} = \dfrac{dz}{z\,(y^2 - x^2)}$ *Resp.:* $xyz = C_1,\ x^2 + y^2 + z^2 = C_2$

Capítulo XXIII

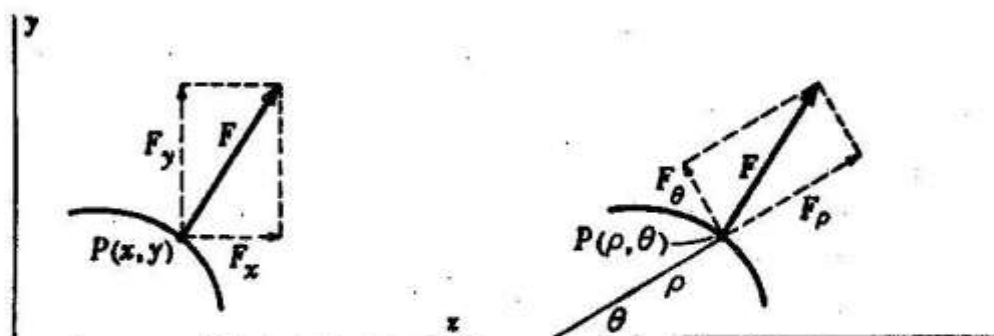
APLICAÇÕES DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS TOTAIS E DOS SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Quando a massa *m* se move num plano, sujeita a uma fôrça F, a Segunda Lei de Newton, relativa ao movimento, dá: massa $\times$ $\times$ aceleração = fôrça.

Para obter as equações do movimento, empregando coordenadas retangulares, consideremos as componentes dos vetores fôrça e aceleração, ao longo dos eixos. As componentes da aceleração a_x e a_y são dadas por:

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2}, \qquad a_y = \frac{d^2y}{dt^2}$$

Chamando as componentes da fôrça por F_x e F_y, as equações do movimento são:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x, \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y.$$

Componentes de *F* em Coordenadas Retangulares e Polares.

Em coordenadas polares, as equações correspondentes são:

$$m\left\{\frac{d^2p}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right\} = F_\rho, \quad m\left(2\,\frac{d\rho}{dt}\,\frac{d\theta}{dt} + \rho\,\frac{d^2\theta}{dt^2}\right) = F_\theta,$$

onde F_ρ e F_θ são as componentes radial e transversal da fôrça, isto é, as componentes segundo o raio vetor, em P, e segundo uma perpendicular a êle, respectivamente.

PROBLEMAS RESOLVIDOS

1) Achar a família de curvas ortogonais às superfícies $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = C$.

Como $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = C$ é a primitiva da equação diferencial total

$$x\,dx + 2y\,dy + 4z\,dz = 0,$$

a equação diferencial da família de curvas ortogonais é

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{2y} = \frac{dz}{4z}. \quad \text{(Ver Cap. XXII, Problema 31)}$$

Resolvendo $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{2y}$, temos $y = Ax^2$.

Resolvendo $\dfrac{dy}{2y} = \dfrac{dz}{4z}$, temos $z = By^2$.

A família de curvas procurada tem as equações: $y = Ax^2$, $z = By^2$.

2) Mostrar que não há família de superfícies ortogonais ao sistema de curvas

$$x^2 - y^2 = ay, \quad x + y = bz.$$

Diferenciando as equações dadas e eliminando as constantes, temos:

$$2x\,dx - 2y\,dy - \frac{x^2 - y^2}{y}dy, \qquad dx + dy = \frac{x+y}{z}\,dz.$$

A primeira dá: $\dfrac{dx}{x^2 + y^2} = \dfrac{dy}{2xy}$. Daí: $dx = \dfrac{x^2 + y^2}{2xy}dy$ e, substituindo na segunda, temos: $\left(\dfrac{x^2 + y^2}{2xy} + 1\right) dy = \dfrac{x + y}{z}\,dz$ ou $\dfrac{dy}{2xy} = \dfrac{dz}{(x + y)\,z}$.

Assim, as equações diferenciais, na forma simétrica, da família de curvas dada, são:

$$\frac{dx}{x^2 + y^2} = \frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{(x + y)\,z}.$$

Como a equação $(x^2 + y^2)\,dx + 2xy\,dy + (x + y)\,z\,dz = 0$ não satisfaz à condição de integrabilidade, não há família de superfícies cortando as curvas ortogonalmente.

3) A componente x da aceleração de uma partícula de massa unitária, movendo-se num plano, é igual à sua ordenada e a componente y é igual ao dôbro da abscissa. Achar a equação da sua trajetória, dadas as condições iniciais:

$x = y = 0$, $dx/dt = 2$, $dy/dt = 4$ quando $t = 0$.

As equações do movimento são: $\frac{d^2x}{dt^2} = y$, $\frac{d^2y}{dt^2} = 2x$.

Diferenciando a primeira duas vêzes e comparando com a segunda temos: $\frac{d^4x}{dt^4} = \frac{d^2y}{dt^2} = 2x$. Daí:

$$x = C_1 e^{at} + C_2 e^{-at} + C_3 \cos at + C_4 \operatorname{sen} at, \text{ onde } a^4 = 2.$$

Então, $y = \frac{d^2x}{dt^2} = a^2 (C_1 e^{at} + C_2 e^{-at} - C_3 \cos at - C_4 \operatorname{sen} at)$,

$$\frac{dx}{dt} = a (C_1 e^{at} - C_2 e^{-at} - C_3 \operatorname{sen} at + C_4 \cos at),$$

e

$$\frac{dy}{dt} = a^3 (C_1 e^{at} - C_2 e^{-at} + C_3 \operatorname{sen} at - C_4 \cos at).$$

Das condições iniciais, temos:

$C_1 + C_2 + C_3 = 0$, $C_1 + C_2 - C_3 = 0$, $C_1 - C_2 + C_4 = \frac{2}{a}$, $C_1 - C_2 - C_4 = \frac{4}{a^3}$.

Então: $C_1 = -C_2 = \frac{a^2 + 2}{2a^3}$, $C_3 = 0$ e $C_4 = \frac{a^2 - 2}{a^3}$.

As equações paramétricas da trajetória são:

$$x = \tfrac{1}{4} (2 + \sqrt{2}) \sqrt[4]{2} (e^{\sqrt[4]{2}t} - e^{-\sqrt[4]{2}t}) - \tfrac{1}{2}(2 - \sqrt{2}) \sqrt[4]{2} \operatorname{sen} \sqrt[4]{2}t,$$

$$y = \tfrac{1}{4}(2 + \sqrt{2})\sqrt[4]{8} (e^{\sqrt[4]{2}t} - e^{-\sqrt[4]{2}t}) + \tfrac{1}{2}(2 - \sqrt{2}) \sqrt[4]{8} \operatorname{sen} \sqrt[4]{2}t.$$

4) Uma partícula de massa m afasta-se da origem, O, repelida por uma fôrça que é inversamente proporcional ao cubo da distância ρ à origem. Achar a equação da trajetória, sabendo que a partícula inicia o movimento em $\rho = a$, $\theta = 0$, com velocidade v_0, perpendicular à linha original.

As componentes radial e transversal da fôrça de repulsão são:

$$F_\rho = \frac{K}{\rho^3} = \frac{mk^2}{\rho^3}, \quad F_\theta = 0.$$

Assim, $m\left[\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] = \frac{mk^2}{\rho^3}$, $\quad m\left(2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\theta}{dt} + \rho\frac{d^2\theta}{dt^2}\right) = 0$

ou

$$(1) \quad \frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{k^2}{\rho^3}, \qquad (2) \quad \rho\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\theta}{dt} = 0.$$

Integrando (2), $\rho^2 \frac{d\theta}{dt} = C_1$. Para $t = 0$, $\rho = a$ e $\rho\frac{d\theta}{dt} = v_0$; então $C_1 = av_0$ e $\frac{d\theta}{dt} = \frac{av_0}{\rho^2}$.

Substituindo $\frac{d\theta}{dt}$ em (1), $\frac{d^2\rho}{dt^2} = \frac{a^2 v_0^2}{\rho^3} + \frac{k^2}{\rho^3}$. Multiplicando por $2\frac{d\rho}{dt}$,

$$2\frac{d\rho}{dt}\frac{d^2\rho}{dt^2} = 2\frac{a^2 v_0^2 + k^2}{\rho^3}\frac{d\rho}{dt} \quad \text{e} \quad \left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 = -\frac{a^2 v_0^2 + k^2}{\rho^2} + C_2.$$

Para $t = 0$, $\rho = a$ e $\frac{d\rho}{dt} = 0$; então $C_2 = \frac{a^2 v^2 + k^2}{a^2}$ e

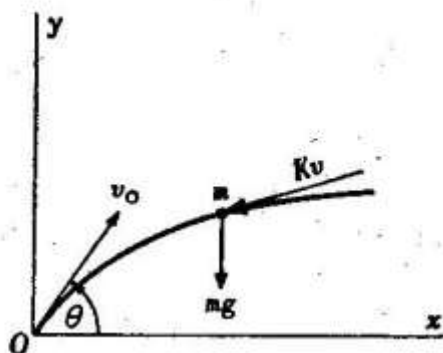
$$\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 = (a^2 v_0^2 + k^2)\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{\rho^2}\right) = (a^2 v_0^2 + k^2)\frac{\rho^2 - a^2}{a^2 \rho^2}.$$

Dividindo por $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{a^2 v_0^2}{\rho^4}$, $\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 = \frac{(a^2 v_0^2 + k^2)\,\rho^2\,(\rho^2 - a^2)}{a^4 v_0^2}$ e

$$\frac{d\rho}{\rho\sqrt{\rho^2 - a^2}} = \frac{\sqrt{a^2 v_0^2 + k^2}}{a^2 v_0}\,d\theta.$$

Integrando: $\frac{1}{a}\operatorname{arc\,sec}\frac{\rho}{a} = \frac{\sqrt{a^2 v_0^2 + k^2}}{a^2 v_0}\,\theta + C_3$.

Para $t = 0$, $\rho = a$ e $\theta = 0$; então $C_3 = 0$ e $\rho = a \sec\frac{\sqrt{a^2 v_0^2 + k^2}}{a v_0}\,\theta$.

5) Um projétil de massa m é disparado no ar com velocidade inicial v_0 e num ângulo θ com a horizontal. Considerando apenas a resistência do ar e a gravidade, supondo a resistência do ar proporcional à velocidade, achar a posição do projétil no tempo t.

No seu movimento horizontal, o projétil é afetado sòmente pela componente x da resistência do ar. Assim,

$$(1) \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} = -K\frac{dx}{dt} = -mk\frac{dx}{dt}$$

ou

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k\frac{dx}{dt}.$$

No movimento vertical, o projétil é influenciado pela gravidade e pela componente y da resistência do ar. Assim,

$$(2) \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg - mk\frac{dy}{dt} \quad \text{ou} \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g - k\frac{dy}{dt}.$$

Integrando (1),

$$\frac{dx}{dt} = -kx + C_1 \qquad \text{e} \quad x = \frac{1}{k}C_1 + C_2 e^{-kt}.$$

Integrando (2),

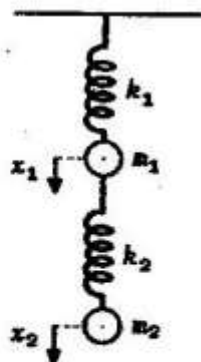
$$\frac{dy}{dt} = -gt - ky + K_1 \quad \text{e} \quad y = \frac{1}{k}K_1 + K_2 e^{-kt} - g\left(\frac{1}{k}t - \frac{1}{k^2}\right).$$

Usando as condições iniciais $x = y = 0$, $\frac{dx}{dt} = v_0 \cos\theta$, $\frac{dy}{dt} = v_0 \operatorname{sen}\theta$ quando $t = 0$:

$$C_1 = v_0 \cos\theta,\ C_2 = -\frac{1}{k} v_0 \cos\theta;\ K_1 = v_0 \operatorname{sen}\theta,\ K_2 = -\frac{1}{k} v_0 \operatorname{sen}\theta - \frac{1}{k^2} g.$$

Então

$$x = \frac{1}{k}(v_0 \cos\theta)(1 - e^{-kt}),\ \ y = \frac{1}{k}\left\{\left(\frac{g}{k} + v_0 \operatorname{sen}\theta\right)(1 - e^{-kt}) - gt\right\}.$$

6) Duas massas, m_1 e m_2, estão separadas por determinada mola em que $k = k_2$, estando m_1 prêsa a um suporte por outra mola em que $k = k_1$ (ver figura). Estando o sistema em repouso, as massas são deslocadas, para baixo, de um comprimento "a" e, em seguida, sôltas. Discutir o movimento.

Admitamos o sentido positivo para baixo e chamemos x_1 e x_2 os deslocamentos das massas no tempo t, em relação às suas respectivas posições de repouso. A deformação da mola superior é x_1 e a da inferior é $x_2 - x_1$. As fôrças que agem nas molas têm os valores:

$$-k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1) \quad \text{em } m_1$$

e

$$-k_2(x_2 - x_1) \quad \text{em } m_2$$

As equações do movimento são

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1) \quad \text{e} \quad m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -k_2(x_2 - x_1)$$

ou

$$(1) \quad [m_1 D^2 + (k_1 + k_2)] x_1 - k_2 x_2 = 0 \quad \text{e} \quad (2) \quad (m_2 D^2 + k_2) x_2 - k_2 x_1 = 0.$$

Operando em (1) com $(m_2 D^2 + k_2)$ e combinando com (2),

$$(m_2 D^2 + k_2)(m_1 D^2 + k_1 + k_2) x_1 - k_2(m_2 D^2 + k_2) x_2 =$$
$$= (m_2 D^2 + k_2)(m_1 D^2 + k_1 + k_2) x_1 - k_2^2 x_1 = 0$$

ou

$$\left[D^4 + \left(\frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2}\right) D^2 + \frac{k_1 k_2}{m_1 m^2}\right] x_1 = 0.$$

Chamando as raízes da equação característica de $\pm i\alpha$, $\pm i\beta$, onde

$$\alpha^2,\ \beta^2 = \frac{1}{2}\left|-\left(\frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m^2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m^2}\right)^2 - 4\frac{k_1 k_2}{m_1 m^2}}\right|,$$

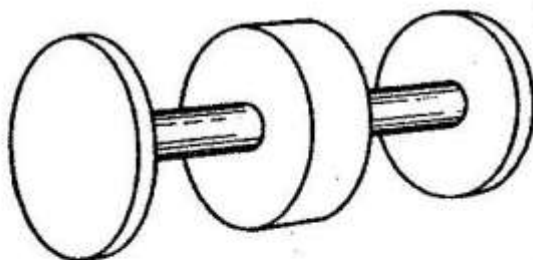
$$x_1 = C_1 e^{i\alpha t} + C_2 e^{-i\alpha t} + C_3 e^{i\beta t} + C_4 e^{-i\beta t} \quad \text{e}$$

$$x_2 = \frac{1}{k^2}(m_1 D^2 + k_1 + k_2) x_1 = \frac{k_1 + k_2 - m_1 \alpha^2}{k^2}(C_1 e^{i\alpha t} + C_2 e^{-i\beta t}) +$$
$$+ \frac{k_1 + k_2 - m_1 \beta^2}{k_2}(C_3 e^{i\beta t} + C_4 e^{-i\beta t}) =$$
$$= \mu(C_1 e^{i\alpha t} + C^2 e^{-i\alpha t}) + \nu(C_3 e^{i\beta t} + C_4 e^{-i\beta t}).$$

Usando as condições iniciais $x_1 = x_2 = a \quad \frac{dx^3}{dt} = \frac{dx_2}{dt} =$ quando $t = 0$,

$$C_1 = C_2 = \frac{a}{2}\left(\frac{\nu - 1}{\nu - \mu}\right) = \frac{a}{2m_1}\left(\frac{k_1 - m_1\beta^2}{\alpha^2 - \beta^2}\right)$$

e

$$C_3 = C_4 = -\frac{a}{2m_1}\left(\frac{k_1 - m_1\alpha^2}{\alpha^2 - \beta^2}\right).$$

7) Um eixo suporta três discos, como se vê na figura. O momento de inércia polar dos discos das extremidades é I, para cada disco, e o do disco central é 4I. O conjugado necessário para produzir uma deformação angular de 1 radiano entre discos sucessivos é k. Achar as equações do movimento dos discos, sabendo que um conjugado $2\,T_0$ sen ωt é aplicado no disco central e que, para $t = 0$, os discos estão em repouso e não há torção no eixo.

Chamemos de θ, o deslocamento angular do disco de uma extremidade qualquer e θ_2 o do disco central, no tempo t. Da esquerda para a direita, temos as diferenças $\theta_2 - \theta_1$ e $\theta_1 - \theta_2$ entre as deformações angulares dos discos das extremidades e o disco central. Temos, então, os seguintes conjugados agindo nos discos:

$$k(\theta_2 - \theta_1);\;\; k(\theta_1 - \theta_2) - k(\theta_2 - \theta_1) \;\text{ e }\; -k(\theta_1 - \theta_2)$$

Por outro lado, o conjugado que age sôbre a massa que gira é igual ao produto do momento de inércia polar da massa, ao redor do eixo de rotação, pela aceleração angular. Assim, a equação do movimento do disco central é:

(1) $$4I\,\frac{d^2\theta_2}{dt^2} = k(\theta_1 - \theta_2) - k(\theta_2 - \theta_1) + 2T_0 \,\text{sen}\,\omega t$$

ou

$$(2I\,D^2 + k)\,\theta_2 = k\theta_1 + T_0\,\text{sen}\,\omega t$$

e a do disco de uma extremidade qualquer

(2) $$I\,\frac{d^2\theta_1}{dt^2} = k(\theta_2 - \theta_1) \quad\text{ou}\quad (I\,D^2 + k)\,\theta_1 = k\theta_2\,.$$

Operando em (2) com $(2I\,D^2 + k)$ e comparando com (1);

$$(2\,ID^2 + k)(I\,D^2 + k)\,\theta_1 = k\,(2I\,D^2 + k)\,\theta_2 = k^2\,\theta_1 + T_0\,k\,\text{sen}\,\omega t,$$

ou

(3) $$D^2\,(2I^2\,D^2 + 3kI)\,\theta_1 = T_0\,k\,\text{sen}\,\omega t.$$

As raízes características são: 0, 0, αi, $-\alpha i$, onde $\alpha^2 = 3k/2I$ e

(4) $$\theta_1 = C_1 + C_2\,t + C_3\cos\alpha\,t + C_4\,\text{sen}\,\alpha\,t + \frac{T_0\,k\,\text{sen}\,\omega t}{I\omega^2\,(2I\omega^2 - 3k)} =$$

$$= C_1 + C_2\,t + C_3\,\mathrm{ccs}\,\alpha t + C_4\,\text{sen}\,\alpha t + \frac{T_0\,k}{2I^2\omega^2\,(\omega^2 - \alpha^2)}\,\text{sen}\,\omega t.$$

De (2), $\theta_2 = \left(\frac{I}{k} D^2 + 1\right) \theta_1$ e

$$(5) \quad \theta_2 = C_1 + C_2 t + C_3 (1 - \frac{I}{k} \alpha^2) \cos \alpha t + C_4 (1 - \frac{I}{k} \alpha^2) \operatorname{sen} \alpha t + \frac{T_0 k - T_0 \omega^2 I}{2I^2 \omega^2 (\omega^2 - \alpha^2)} \operatorname{sen} \omega t.$$

De (4) e (5), obtemos, por diferenciação,

$$(4') \quad \frac{d\theta_1}{dt} = C_2 - C_3 \alpha \operatorname{sen} \alpha t + C_4 \alpha \cos \alpha t + \frac{T_0 k}{2I^2 \omega (\omega^2 - \alpha^2)} \cos \omega t \quad \text{e}$$

$$(5') \quad \frac{d\theta_2}{dt} = C_2 - C_3 \alpha (1 - \frac{I}{k} \alpha^2) \operatorname{sen} \alpha t + C_4 \alpha (1 - \frac{I}{k} \alpha^2) \cos \alpha t + \frac{T_0 k - T_0 \omega^2 I}{2I^2 \omega (\omega^2 - \alpha^2)} \cos \omega t.$$

Usando as condições iniciais $\theta_1 = \theta_2 = 0$, $\frac{d\theta_1}{dt} = \frac{d\theta_2}{dt} = 0$ quando $t = 0$, temos $C_1 + C_3 = 0$,

$$C_1 + C_3 (1 - \frac{I}{k} \alpha^2) = 0, \quad C_2 + C_4 \alpha + \frac{T_0 k}{2I^2 \omega (\omega^2 - \alpha^2)} = 0$$

e

$$C_2 + C_4 \alpha (1 - \frac{I}{k} \alpha^2) + \frac{T_0 k - T_0 \omega^2 I}{2I^2 \omega (\omega^2 - \alpha^2)} = 0.$$

Então $C_1 = C_3 = 0$, $C_4 = -\frac{T_0 \omega}{3I\alpha (\omega^2 - \alpha^2)}$, $C_2 = \frac{T_0}{3I\omega}$.

$$\theta_1 = \frac{T_0}{3I} \left(\frac{t}{\omega} + \frac{\alpha^2 \operatorname{sen} \omega t}{\omega^2 (\omega^2 - \alpha^2)} - \frac{\omega \operatorname{sen} \alpha t}{\alpha (\omega^2 - \alpha^2)} \right) = \frac{T_0}{3I} \left(\frac{t}{\omega} + \frac{\alpha^3 \operatorname{sen} \omega t - \omega^3 \operatorname{sen} \alpha t}{\alpha \omega^2 (\omega^2 - \alpha^2)} \right),$$

e

$$\theta^2 = \theta_1 - \frac{T_0 (\alpha \operatorname{sen} \omega t - \omega \operatorname{sen} \alpha t)}{2I\alpha (\omega^2 - \alpha^2)}.$$

8) As equações fundamentais de um transformador são:

$$(1) \quad M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 = 0, \qquad (2) \quad M \frac{di_2}{dt} + L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 = E(t),$$

onde $i_1(t)$ e $i_2(t)$ denotam correntes, enquanto que M, L_1, L_2, R_1, R_2 são constantes.

Supondo $M^2 < L_1 L_2$, mostrar que

$$A) \quad (L_1 L_2 - M^2) \frac{d^2 i_1}{dt^2} + (R_1 L_2 + R_2 L_1) \frac{di_1}{dt} + R_1 R_2 i_1 = R_2 E(t) + L_2 E'(t),$$

$$B) \quad (L_1 L_2 - M^2) \frac{d^2 i_2}{dt_2} + (R_1 L_2 + R_2 L_1) \frac{di_2}{dt} + R_1 R_2 i_1 = -ME'(t).$$

Resolver o sistema quando $E(t) = E_0$, constante.

Diferenciando (1) e (2) em relação a t,

$$(3) \qquad M\frac{d^2 i_1}{dt^2} + L_2\frac{d^2 i_2}{dt^2} + R_2\frac{di_2}{dt} = 0,$$

$$(4) \qquad M\frac{d^2 i_2}{dt^2} + L_1\frac{d^2 i_1}{dt^2} + R_1\frac{di_1}{dt} = E'(t).$$

Multiplicando (3) por M e (4) por L_2 e subtraindo (3) de (4):

$$(L_1L_2 - M^2)\frac{d^2 i_1}{dt^2} + R_1L_2\frac{di_1}{dt} - MR_2\frac{di_2}{dt} = L_2E'(t).$$

Substituindo $\dfrac{di_2}{dt}$, de (2), obtemos A).

Multiplicando (3) por L_1 e (4) por M e subtraindo (4) de (3)

$$(L_1L_2 - M^2)\frac{d^2 i_2}{dt^2} + R_2L_1\frac{di_2}{dt} - R_1M\frac{di_1}{dt} = -ME'(t).$$

Substituindo $\dfrac{di_1}{dt}$, de (1), obtemos B).

Quando $E(t) = E_0$, a equação A) é

$$(L_1L_2 - M^2)\frac{d^2 i_1}{dt^2} + (R_1L_2 + R_2L_1)\frac{di_1}{dt} + R_1R_2\, i_1 = R_2E_0.$$

Sejam $\alpha,\ \beta = \frac{1}{2}\,\dfrac{-(R_1L_2 + R_2L_1) \pm \sqrt{(R_1L_2 - R_2L_1)^2 + 4M^2R_1R_2}}{L_1L_2 - M^2}$ as raízes características.

Então $$i_1 = C_1e^{\alpha t} + C_2e^{\beta t} + \frac{E_0}{R_1}.$$

Para achar i_2, multiplicar (1) por M e (2) por L_2 e subtrair, o que dá:

$$MR_2\, i_2 = (L_1L_2 - M^2)\frac{di_1}{dt} + L_2R_1\, i_1 - L_2E_0.$$

Então:

$$i_2 = \frac{1}{MR_2}\left[(L_1L_2 - M^2)(\alpha C_1e^{\alpha t} + \beta C_2e^{\beta t}) + L_2R_1(C_1e^{\alpha t} + C_2e^{\beta t})\right].$$

Note que, como $M^2 < L_1L_2$, α e β são negativas. Assim, depois de certo tempo, a corrente primária torna-se aproximadamente constante $= E_0R_1$ e a corrente secundária i_2 torna-se desprezível.

9) Uma partícula de massa m é atraída, para um ponto fixo O, por uma fôrça central que é inversamente proporcional ao quadrado da distância da partícula ao ponto. Mostrar que a equação da trajetória é uma cônica tendo o foco no ponto fixo.

Em coordenadas polares, com pólo em O, as equações do movimento são:

$$(1) \quad m\left[\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] = -\frac{K}{\rho^2} = -\frac{mk^2}{\rho^2} \quad \text{ou} \quad \frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -\frac{k^2}{\rho^2},$$

$$(2) \quad m\left[2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\theta}{dt} + \rho\frac{d^2\theta}{dt^2}\right] = 0 \qquad \text{ou} \qquad 2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\theta}{dt} + \rho\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0.$$

De (2), $\frac{d}{dt}\left(\rho^2\frac{d\theta}{dt}\right) = 0$ e $\rho^2\frac{d\theta}{dt} = C_1$.

Façamos $\sigma = \frac{1}{\rho}\cdot$ Então

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{C_1}{\rho^2} = C_1\,\sigma^2, \quad \frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho}{d\sigma}\frac{d\sigma}{dt} = -\frac{1}{\sigma^2}\frac{d\sigma}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -C_1\frac{d\sigma}{d\theta}$$

e

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(-C_1\frac{d\sigma}{d\theta}\right) = -C_1\frac{d^2\sigma}{d\theta^2}\frac{d\theta}{dt} = -C_1^2\,\sigma^2\frac{d^2\sigma}{d\theta^2}.$$

Substituindo em (1) e simplificando, temos:

$$(1') \qquad \frac{d^2\sigma}{d\theta^2} + \sigma = \frac{k^2}{C_1^2},$$

uma equação diferencial linear com coeficientes constantes. Resolvendo:

$$\sigma = C_2\cos(\theta + C_3) + \frac{k^2}{C_1^2}$$

ou

$$\rho = \frac{1}{\dfrac{k_2}{C_1^2} + C_2\cos(\theta + C_3)} = \frac{C_1^2/k^2}{1 + \dfrac{C_2\,C_1^2}{k_2}\cos(\theta + C_3)}.$$

Fazendo $C_1^2/k^2 = l$, $\left|C_2C_1^2/k^2\right| = e$, $C_3 = \alpha$, temos $\rho = \dfrac{l}{1 \pm e\cos(\theta + \alpha)}$, equação de uma cônica tendo O como foco.

PROBLEMAS PROPOSTOS

10) Achar a família de curvas ortogonais à família de superfícies $x^2+y^2+2^2z=C$
Resp.: $y = Ax$, $z = By^2$

11) Achar a família de superfícies ortogonais à família de curvas

$$y = C_1x, \quad x^2 + y^2 + 2z^2 = C_2.$$

Resp.: $z = C(x^2 + y^2)$

12) Uma partícula de massa m é atraída, para a origem O, por uma fôrça diretamente proporcional à sua distância de O. Admitindo que inicie o movimento em $(a, 0)$, com velocidade v_0 e mesma direção que faz um ângulo θ com a horizontal, achar a posição da partícula no tempo t.

Resp.: $x = a \cos kt + \frac{v_0 \cos \theta}{k} \operatorname{sen} kt, \ y = \frac{v_0 \operatorname{sen} \theta}{k} \operatorname{sen} kt$

13) As correntes $i_1, i_2, i = i_1 + i_2$, em uma certa rêde, satisfazem às equações

$$20i + 0{,}1 \frac{di_2}{dt} = 5, \qquad 4i + i_1 + 1000q_1 = 1.$$

Determine as correntes sujeitas às condições iniciais $i = i_1 = i_2 = 0$ quando $t = 0$.

Sugestão:. Use $i_1 = \frac{dq_1}{dt}$ para obter $\frac{d^2 q_1}{dt^2} + 240 \frac{dq_1}{dt} + 40{,}000 q_1 = 0.$

Resp.: $i_1 = -\frac{1}{4} e^{-120t} \operatorname{sen} 160t, \ i_2 = \frac{1}{4}(1 - e^{-120t} \cos 160t) + \frac{1}{8} e^{-120t} \operatorname{sen} 160t$

14) Um tanque I contém, inicialmente, 100 l de uma solução de 20 kg de sal em água e um outro tanque II contém 50 l de água pura. A mistura do tanque I passa para o tanque II na razão de 3 l/min e dêste para aquêle na razão de 2 l/min. Admitindo que a mistura é mantida homogênea em ambos os tanques, por agitação, determinar a quantidade de sal existente no tanque I depois de 50 minutos.

Sugestão: $q_1 + q_2 = 20, \ \frac{dq_1}{dt} = \frac{2q_2}{50 + t} - \frac{3q_1}{100 - t}.$

Resp.: 68,75 lb.

Capítulo XXIV

SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Valores Aproximados

Em muitas aplicações, procura-se o valor $\bar{y}$ de y, correspondente a $x = x_0 + h$, da solução particular de uma dada equação diferencial:

$$(1) \qquad y' = f(x, y)$$

satisfazendo às condições iniciais $y = y_0$ quando $x = x_0$. Tais problemas têm sido resolvidos determinando-se primeiro a primitiva

$$(2) \qquad y = F(x) + C$$

de (1), em seguida selecionando a solução particular

$$(3) \qquad y = g(x)$$

por meio de (x_0, y_0), para, finalmente, calcular o valor desejado $\bar{y} = g(x_0 + h)$.

Quando não se dispõe de um método para determinar a primitiva, é necessário recorrer a algum processo que dê um valor aproximado daquele que se deseja. Integrando (1) entre $x = x_0$, $y = y_0$ e $x = x$, $y = y$, tem-se

$$(4) \qquad y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y)\, dx.$$

O valor de y quando $x = x_0 + h$ é então

$$(5) \qquad \bar{y} = y_0 + \int_{x_0}^{x_0+h} f(x, y)\, dx.$$

Neste capítulo veremos métodos para o cálculo aproximado de (4) ou (5).

Método de Picard. Para valores de x próximos de $x = x_0$, os valores correspondentes de $y = g(x)$ são próximos de $y_0 = g(x_0)$.

Assim, uma primeira aproximação y_1 de $y = g(x)$ é obtida substituindo-se y por y_0 no segundo membro de (4), isto é:

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0)\, dx.$$

Uma segunda aproximação, y_2, é obtida substituindo y por y_1 no segundo membro de (4), isto é,

$$y_2 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_1)\, dx.$$

Continuando com êste processo, obtém-se uma sucessão de funções de x

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ \cdots\cdots$$

onde cada função é um valor mais aproximado, do valor procurado, do que a função anterior. (Ver Problemas 1-2).

O método de Picard é de considerável valor teórico. Em geral, não é um meio prático de se obter uma aproximação, dadas as dificuldades que surgem no cálculo das integrais.

Série de Taylor. O desenvolvimento de Taylor de $y=g(x)$ próximo de (x_0, y_0) é

$$(6) \qquad y = g(x_0) + (x - x_0)\, g'(x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^2\, g''(x_0) + \\ + \frac{1}{6}(x - x_0)^3\, g'''(x_0) + \cdots\cdots$$

De (1), $y' = g'(x) = f(x, y)$; assim, por derivação sucessiva,

$$y'' = g''(x) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + f\frac{\partial f}{\partial y},$$

$$(7) \quad y''' = g'''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + f\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x} + f\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x} + f\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \\ = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} + 2f\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} + f\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + f^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

etc.

Por conveniência, façamos

$$p = \frac{\partial f}{\partial x},\quad q = \frac{\partial f}{\partial y},\quad r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y},\quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

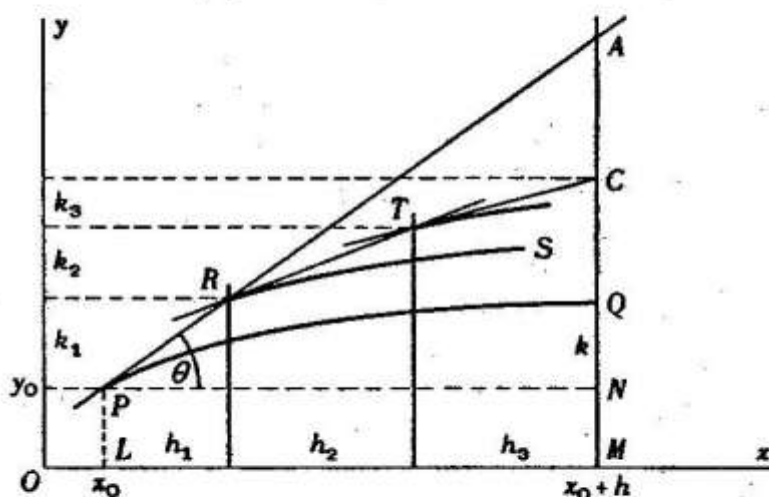
e sejam $f_0, p_0, q_0, \cdots$ os valores de $f, p, q, \cdots$ em (x_0, y_0).

Substituindo em (6) o resultado de (7) e calculando para $x = x_0 + h$, temos:

$$(8) \quad \bar{y} = y_0 + h \cdot f_0 + \frac{1}{2} h^2 (p_0 + f_0 \cdot q_0) +$$
$$+ \frac{1}{6} h^3 (r_0 + p_0 \cdot q_0 + 2 f_0 \cdot s_0 + f_0 \cdot q_0^2 + f_0^2 \cdot t_0) + \cdots\cdots\cdots$$

Esta série pode ser usada para calcular $\bar{y}$; é evidente, entretanto, que têrmos adicionais serão cada vez mais complexos.

(Ver Problemas 3-4).

Método da Primeira Derivada. Segue-se um processo que considera apenas derivadas de primeira ordem, isto é, que usa sòmente os dois primeiros têrmos da série de Taylor.

Como primeira aproximação de $\bar{y}$, tomemos os dois primeiros têrmos de (8)

$$\bar{y} \approx y_0 + h f(x_0, y_0).$$

Para interpretar esta aproximação geomètricamente, sejam PQ a curva integral de (1), passando por $P(x_0, y_0)$ e Q o ponto da curva correspondente a $x = x_0 + h$. Então: $\bar{y} = MQ = y_0 + k$. Sendo θ o ângulo de inclinação da tangente em P, de (1) temos: $\operatorname{tg} \theta = f(x_0, y_0)$ e a aproximação

$$y_0 + h f(x_0, y_0) = LP + h \operatorname{tg} \theta = MN + NA = MA$$

Para uma aproximação melhor, dividamos o intervalo LM, de amplitude h, em n subintervalos de larguras $h_1, h_2, \cdots, h_n$. (Na figura $n = 3$). A reta $x = x_0 + h$ encontra PA em $R(x_0 + h_1, y_0 + k_1) = (x_1, y_1)$. Então:

$$y_1 = y_0 + k_1 = y_0 + h_1 f(x_0, y_0).$$

Seja a curva integral de (1) passando em R, e sôbre sua tangente em R tomemos T de coordenadas $(x_1 + h_2, y_1 + k_2) = (x_2, y_2)$. Então:

$$y_2 = y_1 + k_2 = y_1 + h_2 f(x_1, y_1) = y_1 + h_2 f(x_0 + h_1, y_0 + h_1 f_0).$$

Repetindo um certo número de vêzes, chegamos finalmente a uma aproximação MC de MQ. Vê-se claramente na figura que a precisão aumenta quando se aumenta o número de subintervalos, de modo que as larguras, h, diminuam. (Ver Problemas 5-6).

Método de Runge. De (5) e (8) obtemos:

$$(9) \quad k = \bar{y} - y_0 = \int_{x_0}^{x_0+h} f(x, y)\, dx =$$

$$= h f_0 + \frac{1}{2} h^2 (p_0 + f_0 q_0) +$$

$$+ \frac{1}{6} h^3 (r_0 + p_0 q_0 + 2 f_0 s_0 + f_0 q_0^2 + f_0^2 t_0) + \cdots\cdots$$

Suponhamos conhecidos os valores y_0, y_1, y_2 de $y = g(x)$ correspondentes a x_0, $x_1 = x_0 + \frac{1}{2} h$, $x_2 = x_0 + h$. Pela Regra de Simpson:

$$(10) \quad k = \int_{x_0}^{x_0+h} f(x, y)\, dx \approx \frac{h}{6} [f(x_0, y_0) +$$

$$+ 4 f(x_0 + \tfrac{1}{2} h,\ y_1) + f(x_0 + h,\ y_2)].$$

Realmente, sòmente y_0 é conhecido. O Método de Runge baseia-se em certas aproximações de y_1 e y_2,

$$y_1 \approx y_0 + \tfrac{1}{2} h f(x_0,\ y_0) = y_0 + \tfrac{1}{2} h f_0,$$

$$y_2 \approx y_0 + h f(x_0 + h,\ y_0 + h f_0),$$

escolhidas de modo que quando k, determinado por (10), fôr desenvolvido em série de potências de h, os três primeiros têrmos coincidam com os do segundo membro de (9). Então (10) transforma-se em:

$$(11) \quad k \approx \frac{h}{6} \Big\{ f_0 + 4 f(x_0 + \tfrac{1}{2} h,\ y_0 + \tfrac{1}{2} h f_0) +$$

$$+ f[x_0 + h,\ y_0 + h f(x_0 + h,\ y_0 + h f_0)] \Big\}.$$

Por simplicidade, os cálculos devem ser feitos como se segue:

$$k_1 = hf_0, \quad k_2 = hf(x_0 + h,\ y_0 + k_1), \quad k_3 = hf(x_0 + h,\ y_0 + k_2),$$

$$k_4 = hf(x_0 + \tfrac{1}{2}h,\ y_0 + \tfrac{1}{2}k_1), \qquad k \approx \frac{1}{6}(k_1 + 4k_4 + k_3).$$

NOTA. Como a aproximação de k, aqui obtida, difere do valor dado por (8) nos têrmos que contêm potências de h maiores do que 3, a aproximação pode ser fraca se $f_0 > 1$. (Ver Problemas 7-11).

Método Kutta-Simpson. Várias modificações no Método de Runge foram feitas por Kutta. Uma dessas, conhecida como Regra de Kutta-Simpson, opera do seguinte modo:

$$k_1 = hf_0, \ k_2 = hf(x_0 + \tfrac{1}{2}h,\ y_0 + \tfrac{1}{2}k_1), \ k_3 = hf(x_0 + \tfrac{1}{2}h,\ y_0 + \tfrac{1}{2}k_2),$$

$$k_4 = hf(x_0 + h,\ y_0 + k_3), \quad k \approx \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).$$

(Ver Problema 12).

Sistemas de Equações Diferenciais de Primeira Ordem. A solução aproximada do sistema

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, z), \qquad \frac{dz}{dx} = g(x, y, z)$$

onde $y = y_0$ e $z = z_0$, quando $x = x_0$, pode ser obtida pelo Método de Picard, Série de Taylor, Método de Runge ou Método de Kutta-Simpson. As modificações necessárias, nas fórmulas, foram feitas nas soluções dos Problemas 13-14. Fàcilmente pode-se fazer extensão das fórmulas para três ou mais equações diferenciais de primeira ordem.

Equações Diferenciais de Ordem *n*. A equação diferencial

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', y'', \cdots\cdots, y^{n-1})$$

onde $y' = \dfrac{dy}{dx}$, $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$, $\cdots$, pode ser reduzida a um sistema de equações de primeira ordem:

$$\frac{dy}{dx} = y_1, \quad \frac{dy_1}{dx} = y_2, \ \cdots\cdots\cdots, \ \frac{dy_{n-2}}{dx} = y_{n-1},$$

$$\frac{dy_{n-1}}{dx} = f(x, y, y_1, y_2, \cdots\cdots, y_{n-1}).$$

Conhecendo-se as condições iniciais $x = x_0$, $y = y_0$, $y' = (y_1)_0$, $y'' = (y_2)^0$, ..., $y^{n-1} = (y_{n-1})_0$ os métodos do parágrafo precedente se aplicam.

EXEMPLO. A equação diferencial de segunda ordem $\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} - 4y = 0$ é equivalente ao sistema de equações diferenciais de primeira ordem

$$\frac{dy}{dx} = z, \quad \frac{dz}{dx} = 4y - 2xz. \qquad \text{(Ver Problemas 15-16).}$$

PROBLEMAS RESOLVIDOS

1) Pelo Método de Picard, calcular y quando $x = 0{,}2$, sabendo que $y = 1$ quando $x = 0$ e $dy/dx = x - y$.

Temos: $f(x, y) = x - y$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$. Então:

$$y_1 = y_0 + \int_0^x f(x, y_0)\, dx = 1 + \int_0^x (x-1)\, dx = \frac{1}{2}x^2 - x + 1,$$

$$y_2 = y_0 + \int_0^x f(x, y_1)\, dx = 1 + \int_0^x \left(-\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1\right) dx = -\frac{1}{6}x^3 + x^2 - x + 1,$$

$$y_3 = y_0 + \int_0^x f(x, y_2)\, dx = 1 + \int_0^x \left(\frac{1}{6}x^3 - x^2 + 2x - 1\right) dx = \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + x^2 - x + 1,$$

$$y_4 = y_0 + \int_0^x f(x, y_3)\, dx = 1 + \int_0^x \left(-\frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x - 1\right) dx = -\frac{x^5}{120} + \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{3} + x^2 - x + 1.$$

$$y_5 = \frac{1}{720}x^6 - \frac{1}{60}x^5 + \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + x^2 - x + 1, \quad \cdots\cdots\cdots$$

Quando

$x = 0{,}2$, $y_0 = 1$, $y_1 = 0{,}82$, $y_2 = 0{,}83867$, $y_3 = 0{,}83740$, $y_4 = 0{,}83746$, $y_5 = 0{,}83746$.

Assim, com cinco decimais: $\bar{y} = 0{,}83746$.

NOTA. A primitiva da equação diferencial dada é $y = x - 1 + Ce^{-x}$. A solução particular que satisfaz às condições iniciais $x = 0$, $y = 1$ é $y = x - 1 + 2e^{-x}$. Substituindo e^{-x} por sua série de MacLaurin, temos: $y = 1 - x + x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{60}x^5 + \frac{1}{360}x^6 + \cdots\cdots\cdots\cdots$. Comparando esta expressão com as aproximações sucessivas obtidas acima, verifica-se que é razoável admitir-se que a seqüência dada pelo Método de Picard tende para a solução exata, como limite.

2) Pelo Método de Picard calcular y quando $x = 0,1$, sabendo que $y = 1$ quando $x = 0$ e $dy/dx = 3x + y^2$.

Temos: $f(x, y) = 3x + y^2$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$. Então:

$$y_1 = y_0 + \int_0^x (3x + y_0^2)\,dx = 1 + \int_0^x (3x+1)\,dx = \frac{3}{2}x^2 + x + 1,$$

$$y_2 = y_0 + \int_0^x (3x + y_1^2)\,dx = 1 + \int_0^x \left(\frac{9}{4}x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 5x + 1\right) dx =$$
$$= \frac{9}{20}x^5 + \frac{3}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + x + 1,$$

$$y_3 = 1 + \int_0^x \left(\frac{81}{400}x^{10} + \frac{27}{40}x^9 + \frac{141}{80}x^8 + \frac{17}{4}x^7 + \frac{1157}{180}x^6 + \frac{136}{15}x^5 + \right.$$
$$\left. + \frac{125}{12}x^4 + \frac{23}{3}x^3 + 6x^2 + 5x + 1\right) dx =$$

$$= \frac{81}{4400}x^{11} + \frac{27}{400}x^{10} + \frac{47}{240}x^9 + \frac{17}{32}x^8 + \frac{1157}{1260}x^7 + \frac{68}{45}x^6 + \frac{25}{12}x^5 +$$
$$+ \frac{23}{12}x^4 + 2x^3 + \frac{5}{2}x^2 + x + 1.$$

Quando $x = 0,1$, $y_0 = 1$, $y_1 = 1,115$. $y_2 = 1,1264$, $y_3 = 1,12721$.

3) $\dfrac{dy}{dx} = x - y$. Pela Série de Taylor, calcular y quando:

a) $x = 0,2$, sabendo que $y = 1$, quando $x = 0$.

b) $x = 1,6$, sabendo que $y = 0,4$, quando $x = 1$.

a) Temos:

$y = g(x)$. $\quad g(x_0) = 1$, $\quad y''' = g'''(x) = -y''$, $\quad g'''(x_0) = -2$,

$y' = g'(x) = x - y$, $\quad g'(x_0) = -1$, $\quad y^{\text{iv}} = g^{\text{iv}}(x) = -y'''$, $\quad g^{\text{iv}}(x_0) = 2$,

$y'' = g''(x) = 1 - y'$, $\quad g''(x_0) = 2$, $\quad y^{\text{v}} = g^{\text{v}}(x) = -y^{\text{iv}}$, $\quad g^{\text{v}}(x_0) = -2$, etc.,

e a equação (6) dá: $y = 1 - x + x^2 - \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{12}x^4 - \dfrac{1}{60}x^5 + \cdots\cdots$.

Então:

$$\bar{y} = 1 - 0,2 + 0,04 - \frac{1}{3}(0,008) + \frac{1}{12}(0,0016) - \frac{1}{60}(0,00032) + \cdots \approx 0,83746.$$

(Ver Problema 1).

b) Temos:

$g(x_0) = 0,4$, $g'(x_0) = 0,6$, $g''(x_0) = 0,4$, $g'''(x_0) = -0,4$, $g^{\text{iv}}(x_0) = 0,4$, etc., e a equação (6) dá:

$$y = 0,4 + 0,6h + 0,4\frac{h^2}{2} - 0,4\frac{h^3}{6} + 0,4\frac{h^4}{24} - 0,4\frac{h^5}{120} + 0,4\frac{h^6}{720} + \cdots\cdots,$$

onde $h = x - x_0$.

Quando $x = 1{,}6$, $h = 0{,}6$ e

$$\bar{y} = 0{,}4 + 0{,}6\,(0{,}6) + 0{,}4\,(0{,}18) - 0{,}4\,(0{,}036) + 0{,}4\,(0{,}0054) - 0{,}4\,(0{,}000648) + \\ + 0{,}4\,(0{,}0000648) + \cdots\cdots\cdots \approx 0{,}81953.$$

4) $\dfrac{dy}{dx} = 3x + y^2$. Pelo Método da Série de Taylor calcular y quando:

a) $x = 0{,}1$, sabendo que $y = 1$ quando $x = 0$.

b) $x = 1{,}1$, sabendo que $y = 1{,}2$ quando $x = 1$.

a) Temos: $(x_0, y_0) = (0, 1)$, $b\,(x_0) = 1$,

$$\begin{aligned}
y' &= g'(x) = 3x + y^2, & g'(x_0) &= 1,\\
y'' &= g''(x) = 3 + 2yy', & g''(x_0) &= 5,\\
y''' &= g'''(x) = 2\,(y')^2 + 2yy'', & g'''(x_0) &= 12,\\
y^{\text{iv}} &= g^{\text{iv}}(x) = 6y'y'' + 2yy''', & g^{\text{iv}}(x_0) &= 54,\\
y^{\text{v}} &= g^{\text{v}}(x) = 6\,(y'')^2 + 8y'y''' + 2yy^{\text{iv}}, & g^{\text{v}}(x_0) &= 354, \text{ e (6) dá:}
\end{aligned}$$

$$y = 1 + x + \frac{5}{2}x^2 + 2x^3 + \frac{9}{4}x^4 + \frac{177}{60}x^5 + \cdots\cdots\cdots\cdots.$$

Quando $x = 0{,}1$,

$$\bar{y} = 1 + 0{,}1 + 0{,}025 + 0{,}002 + 0{,}00022 + 0{,}00003 + \cdots\cdots \approx 1{,}12725.$$

(Ver Problema 2).

b) Temos $(x_0, y_0) = (1;\ 1{,}2)$, $g\,(x_0) = 1{,}2$, $g'(x_0) = 4{,}44$, $g''(x_0) = 13{,}656$, $g'''(x_0) = 72{,}202$, $g^{\text{IV}}(x_0) = 537{,}078$, $g^{\text{V}}(x_0) = 4973$, $\cdots\cdots\cdots$, e (6) dá:

$$y = 1{,}2 + 4{,}44h + 13{,}656\frac{h^2}{2} + 72{,}202\frac{h^3}{6} + 537{,}078\frac{h^4}{24} + 4973\frac{h^5}{120} + \\ + \cdots\cdots\cdots\cdots,$$

onde $h = x - x_0$. Quando $x = 1{,}1$, $h = 0{,}1$ e

$$\bar{y} = 1{,}2 + 0{,}1\,(4{,}44) + 0{,}01\,(6{,}828) + 0{,}001\,(12{,}03) + 0{,}0001\,(22{,}4) + \\ + 0{,}00001\,(41) + \cdots \approx 1{,}7270.$$

5) Pelo Método da Primeira Derivada, com $n = 4$, calcular y quando $x = 1{,}1$, sabendo que $y = 1{,}2$ quando $x = 1$ e $dy/dx = 3x + y^2$.

(Ver Problema 4b).

Temos $h = 0{,}1$ e fazemos $h_1 = h_2 = h_3 = h_4 = 0{,}025$.

Queremos $y_0 + k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = y_3 + k_4$.

a) $(x_0, y_0) = (1;\ 1{,}2)$, $h_1 = 0{,}025$, $f\,(x_0, y_0) = 4{,}44$,

$$k_1 = h_1 f\,(x_0, y_0) = 0{,}111;\ y_1 = y_0 + k_1 = 1{,}311.$$

b) $(x_1, y_1) = (1{,}025;\ 1{,}311)$, $h_2 = 0{,}025$, $f\,(x_1, y_1) = 4{,}7937$,

$$k_2 = h_2 f\,(x_1, y_1) = 0{,}1198;\ y_2 = y_1 + k_2 = 1{,}4308.$$

c) $(x_2, y_2) = (1{,}05;\ 1{,}4308)$, $h_3 = 0{,}025$, $f(x_2, y_2) = 5{,}1972$,

$$k_3 = h_3 f(x_2, y_2) = 0{,}1299;\quad y_3 = y_2 + k_3 = 1{,}5607.$$

d) $(x_3, y_3) + (1{,}075;\ 1{,}5607)$, $h_4 = 0{,}025$, $f(x_3, y_3) = 5{,}6608$,

$$k_4 = h_4 f(x_3, y_3) = 0{,}1415;\quad \bar{y} \approx y_3 + k_4 = 1{,}7022.$$

6) Pelo Método da Primeira Derivada, com $n = 4$, calcular y quando $x = 1{,}4$, sabendo que $y = 0{,}2$ quando $x = 1$ e $\dfrac{dy}{dx} = (x^2 + 2y)^{1/2}$.

Temos $h = 0{,}4$ e fazemos $h_1 = h_2 = h_3 = h_4 = 0{,}1$.

a) $(x_0, y_0) = (1;\ 0{,}2)$, $h_1 = 0{,}1$, $f(x_0, y_0) = \sqrt{1{,}4} = 1{,}183$,

$$k_1 = h_1 f(x_0, y_0) = 0{,}1183;\quad y_1 = y_0 + k_1 = 0{,}3183.$$

b) $(x_1, y_1) = (1{,}1;\ 0{,}3183)$, $h_2 = 0{,}1$, $f(x_1, y_1) = 1{,}359$,

$$k_2 = h_2 f(x_1, y_1) = 0{,}1359;\quad y_2 = y_1 + k_2 = 0{,}4542.$$

c) $(x_2, y_2) = (1{,}2;\ 0{,}4542)$, $h_3 = 0{,}1$, $f(x_2, y_2) = 1{,}532$,

$$k_3 = h_3 f(x_2, y_2) = 0{,}1532;\quad y_3 = y_2 + k_3 = 0{,}6074.$$

d) $(x_3, y_3) = (1{,}3;\ 0{,}6074)$, $h_4 = 0{,}1$, $f(x_3, y_3) = 1{,}704$,

$$k_4 = h_4 f(x_3, y_3) = 0{,}1704;\quad \bar{y} \approx y_3 + k_4 = 0{,}7778.$$

7) Pelo Método de Runge, calcular y quando $x = 1{,}6$, sabendo que $y = 0{,}4$ quando $x = 1$ e $dy/dx = x - y$. (Ver Problema 3*b*).

Temos $(x_0, y_0) = (1;\ 0{,}4)$, $h = 0{,}6$, $f_0 = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$. Então:

$$k_1 = h f_0 = 0{,}36,$$

$$k_2 = h f(x_0 + h,\ y_0 + k_1) = 0{,}6\,[(1 + 0{,}6) - (0{,}4 + 0{,}36)] = 0{,}504,$$

$$k_3 = h f(x_0 + h,\ y_0 + k_2) = 0{,}6\,[(1 + 0{,}6) - (0{,}4 + 0{,}504)] = 0{,}4176,$$

$$k_4 = h f(x_0 + \tfrac{1}{2}h,\ y_0 + \tfrac{1}{2}k_1) = 0{,}6\,[(1 + 0{,}3) - (0{,}4 + 0{,}18)] = 0{,}432,$$

$$k \approx \frac{1}{6}(k_1 + 4k_4 + k_3) = \frac{1}{6}[0{,}36 + 4\,(0{,}432) + 0{,}4176] = 0{,}4176 \text{ e}$$

$$\bar{y} = y_0 + k \approx 0{,}8176.$$

A diferença entre êste valor e o achado no Problema 3*b* aparece pelo fato de ser $h = 0{,}6$. Para achar o valor de y quando $x = 1{,}1$, (isto é, $h = 0{,}1$), a série de Taylor dá:

$$\bar{y} = 0{,}4 + 0{,}6\,(0{,}1) + 0{,}4\,(0{,}005) - 0{,}4\,(0{,}00017) + 0{,}4\,(0{,}000004) - \cdots \approx 0{,}46193,$$

enquanto que pelo Método de Runge:

$k_1 = 0,1\,(0,6) = 0,06,\;\; k_2 = 0,1\,(1,1 - 0,46) = 0,064,\;\; k_3 = 0,1\,(1,1 - 0,464 = = 0,0636,$

$k_4 = 0,1\,(1,05 - 0,43) = 0,062,\;\; k \approx \frac{1}{6}(k_1 + 4k_4 + k_3) = 0,06193$ e $\bar{y} \approx 0,46193.$

8) Pelo Método de Runge, calcular y quando $x = 0,1$, sabendo que $y = 1$ quando $x = 0$ e $dy/dx = 3x + y^2$.

Temos $(x_0, y_0) = (0,1)$, $h = 0,1$, $f_0 = 1$. Então:

$k_1 = hf_0 = 0,1,$

$k_2 = hf(x_0 + h,\; y_0 + k_1) \quad = 0,1\,[3\,(0 + 0,1) + (1 + 0,1)^2] \quad = 0,151,$

$k_3 = hf(x_0 + h,\; y_0 + k_2) \quad = 0,1\,[3\,(0 + 0,1) + (1 + 0,151)^2] = 0,16248,$

$k_4 = hf(x_0 + \frac{1}{2}h,\; y_0 + \frac{1}{2}k_1) = 0,1\,[3\,(0 + 0,05) + (1 + 0,05)^2] \quad = 0,12525,$

$k \approx \frac{1}{6}(k_1 + 4k_4 + k_3) = \frac{1}{6}[0,1 + 4\,(0,12525) + 0,16248] = 0,12725$ e $\bar{y} = y_0 + k \approx 1,12725.$

(Ver Problemas 2 e $4a$).

9) Pelo Método de Runge, calcular y quando $x = 1,1$, sabendo que $y = 1,2$ quando $x = 1$ e $dy/dx = 3x + y^2$.

Temos: $(x_0, y_0) = (1;\; 1,2)$, $h = 0,1$, $f_0 = 4,44$. Então:

$k_1 = hf_0 = 0,444,$

$k_2 = hf(x_0 + h,\; y_0 + k_1) \quad = 0,1[3(1 + 0,1) + (1,2 + 0,444)^2] = 0,600274,$

$k_3 = hf(x_0 + h,\; y_0 + k_2) \quad = 0,1[3(1+0,1) + (1,2 + 0,60027)^2] = 0,654097.$

$k_4 = hf(x_0 + \frac{1}{2}h,\; y_0 + \frac{1}{2}k_1) = 0,1[3(1 + 0,05) + (1,2 + 0,222)^2] \quad = 0,517208,$

$k \approx \frac{1}{6}(k_1 + 4k_4 + k_3) = \frac{1}{6}[0,444 + 4\,(0,517208) + 0,654097] = 0,527822$ e $\bar{y} = y_0 + k \approx 1,727822.$

Comparando êste resultado com o do Problema $4b$, nota-se que a aproximação é melhor do que a que se espera, tendo em vista o valor $f_0 = 4,44$.

10) Pelo Método de Runge, calcular y quando $x = 0,8$ na solução particular de $dy/dx = \sqrt{x + y}$ satisfazendo $y = 0,41$ quando $x = 0,4$.

Temos: $(x_0, y_0) = (0,4;\; 0,41)$, $h = 0,4$, $f_0 = \sqrt{0,81} = 0,9$. Então:

$k_1 = hf_0 = 0,36,$

$k_2 = hf(x_0 + h,\; y_0 + k_1) \quad = 0,4\sqrt{1,57} \quad = 0,50120,$

$$k_3 = hf(x_0 + h,\ y_0 + k_2) \qquad = 0{,}4\sqrt{1{,}7112} = 0{,}52325,$$

$$k_4 = hf(x_0 + \tfrac{1}{2}h,\ \ y_0 + \tfrac{1}{2}k_1) = 0{,}4\sqrt{1{,}19} \quad = 0{,}43635,$$

$$k \approx \frac{1}{6}(k_1 + 4k_4 + k_3) = 0{,}43811 \quad \text{e} \quad \bar{y} = y_0 + k \approx 0{,}84811.$$

11) **Resolver o Problema 10, calculando primeiro y quando $x = 0{,}6$ e, em seguida, usando o par de valores como (x_0, y_0), calcular o valor procurado de y.**

Primeiro: $(x_0, y_0) = (0{,}4;\ 0{,}41)$, $h = 0{,}2$, $f_0\ \sqrt{0{,}81} = 0{,}9$. **Então:**

$$k_1 = hf_0 = 0{,}18,$$

$$k_2 = hf(x_0 + h,\ y_0 + k_1) \qquad = 0{,}2\sqrt{1{,}19} \quad = 0{,}21817,$$

$$k_3 = hf(x_0 + h,\ y_0 + k_2) \qquad = 0{,}2\sqrt{1{,}22817} = 0{,}22165,$$

$$k_4 = hf(x_0 + \tfrac{1}{2}h,\ \ y_0 + \tfrac{1}{2}k_1) = 0{,}2,$$

$$k \approx \frac{1}{6}(k_1 + 4k_4 + k_3) = 0{,}20028 \quad \text{e} \quad \bar{y} = y_0 + k \approx 0{,}61028.$$

Agora: $(x_0, y_0) = (0{,}6;\ 0{,}61028)$, $h = 0{,}2$. Então $f_0 = \sqrt{1{,}21028} = 1{,}1001$,

$$k_1 = hf_0 = 0{,}22002,$$

$$k_2 = hf(x_0 + h,\ y_0 + k_1) \qquad = 0{,}2\sqrt{1{,}63030} = 0{,}25537,$$

$$k_3 = hf(x_0 + h,\ y_0 + k_2) \qquad = 0{,}2\sqrt{1{,}66565} = 0{,}25812,$$

$$k_4 = hf(x_0 + \tfrac{1}{2}h,\ \ y_0 + \tfrac{1}{2}k_1) = 0{,}2\sqrt{1{,}42029} = 0{,}23836,$$

$$k \approx \frac{1}{6}(k_1 + 4k_4 + k_3) = 0{,}23860 \quad \text{e} \quad \bar{y} = y_0 + k \approx 0{,}84888.$$

12) Resolver o Problema 10, pelo Método de Kutta-Simpson.

Temos: $(x_0, y_0) = (0{,}4;\ 0{,}41)$, $h = 0{,}4$, $f_0 = \sqrt{0{,}81} = 0{,}9$. **Então:**

$$k_1 = hf_0 = 0{,}36.$$

$$k_2 = hf(x_0 + \tfrac{1}{2}h,\ \ y_0 + \tfrac{1}{2}k_1) = 0{,}4\sqrt{1{,}19} \quad = 0{,}43635,$$

$$k_3 = hf(x_0 + \tfrac{1}{2}h,\ \ y_0 + \tfrac{1}{2}k_2) = 0{,}4\sqrt{1{,}22817} = 0{,}44329,$$

$$k_4 = hf(x_0 + h,\ y_0 + k_3) \qquad = 0{,}4\sqrt{1{,}65329} = 0{,}51432,$$

$$k \approx \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 0{,}43893 \quad \text{e} \quad \bar{y} = y_0 + k \approx 0{,}84893.$$

13) Pelo Método de Picard, calcular y e z correspondentes a $x = 0{,}1$ na solução particular de

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, z) = x + z, \quad \frac{dz}{dx} = g(x, y, z) = x - y^2$$

satisfazendo $y = 2$, $z = 1$ quando $x = 0$.

Para a primeira aproximação:

$$y_1 = y_0 + \int_0^x f(x, y_0, z_0)\,dx =$$

$$= 2 + \int_0^x (1 + x)\,dx = 2 + x + \tfrac{1}{2}x^2,$$

$$z_1 = z_0 + \int_0^x g(x, y_0, z_0)\,dx =$$

$$= 1 + \int_0^x (-4 + x)\,dx = 1 - 4x + \tfrac{1}{2}x^2.$$

Para a segunda aproximação:

$$y^2 = y_0 + \int_0^x f(x, y_1, z_1)\,dx =$$

$$= 2 + \int_0^x (1 - 3x + \tfrac{1}{2}x^2)\,dx = 2 + x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3,$$

$$z_2 = z_0 + \int_0^x g(x, y_1, z_1)\,dx =$$

$$= 1 + \int_0^x (-4 - 3x - 3x^2 - x^3 - \tfrac{1}{4}x^4)\,dx =$$

$$= 1 - 4x - \frac{3}{2}x^2 - x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{20}x^5.$$

Para a terceira aproximação:

$$y^3 = y_0 + \int_0^x f(x, y_2, z_2)\,dx =$$

$$= 2 + \int_0^x (1 - 3x - \frac{3}{2}x^2 - x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{20}x^5)\,dx =$$

$$= 2 + x - \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{20}x^5 - \frac{1}{120}x^6,$$

$$z_3 = z_0 + \int_0^x g(x, y_2, z_2)\,dx =$$

$$= 1 + \int_0^x (-4 - 3x + 5x^2 + \frac{7}{3}x^3 - \frac{31}{12}x^4 + \frac{1}{2}x^5 - \frac{1}{36}x^6)\,dx =$$

$$= 1 - 4x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{3}x^3 + \frac{7}{12}x^4 - \frac{31}{60}x^5 + \frac{1}{12}x^6 - \frac{1}{252}x^7,$$

e assim por diante.

Quando $x = 0{,}1$: $y_1 = 2{,}105$ $z_1 = 0{,}605$

$y_2 = 2{,}08517$ $z_2 = 0{,}58397$

$y_3 = 2{,}08447$ $z_3 = 0{,}58672$.

14) Pelo Método de Runge, calcular y e z quando $x = 0{,}3$ para a solução particular do sistema $\frac{dy}{dx} = x + \sqrt{z} = f(x, y, z)$, $\frac{dz}{dx} = y - \sqrt{z} = g(x, y, z)$ satisfazendo $y = 0{,}5$, $z = 0$ quando $x = 0{,}2$.

Temos $(x_0, y_0, z_0) = (0{,}2;\ 0{,}5;\ 0)$, $h = 0{,}1$, $f_0 = 0{,}2$, $g_0 = 0{,}5$. Então:

$k_1 = hf_0 = 0{,}02,$

$l_1 = hg_0 = 0{,}05,$

$k_2 = hf(x_0 + h,\ y_0 + k_1,\ z_0 + l_1) = 0{,}1(0{,}3 + \sqrt{0{,}05}) = 0{,}05236,$

$l_2 = hg(x_0 + h,\ y_0 + k_1,\ z_0 + l_1) = 0{,}1(0{,}52 - \sqrt{0{,}05}) = 0{,}02964,$

$k_3 = hf(x_0 + h,\ y_0 + k_2,\ z_0 + l_2) = 0{,}1(0{,}3 + \sqrt{0{,}02964}) = 0{,}047216,$

$l_3 = hg(x_0 + h,\ y_0 + k_2,\ z_0 + l_2) = 0{,}1(0{,}52 - \sqrt{0{,}02964}) = 0{,}034784,$

$k_4 = hf(x_0 + \frac{1}{2}h,\ y_0 + \frac{1}{2}k_1,\ z_0 + \frac{1}{2}l_1) = 0{,}1(0{,}25 + \sqrt{0{,}025}) = 0{,}040811,$

$l_4 = hg(x_0 + \frac{1}{2}h,\ y_0 + \frac{1}{2}k_1,\ z_0 + \frac{1}{2}l_1) = 0{,}1(0{,}51 - \sqrt{0{,}025}) = 0{,}035189,$

$$k \approx \frac{1}{6}(k_1 + 4k_4 + k_3) = 0{,}03841, \quad l \approx \frac{1}{6}(l_1 + 4l_4 + l_3) = 0{,}03759,$$

e $\bar{y} = y_0 + k \approx 0{,}53841,$ $\bar{z} = z_0 + l \approx 0{,}03759.$

15) Pelo Método da Série de Taylor, calcular o valor de θ correspondente a $t = 0{,}05$ para a solução particular de $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -8 \operatorname{sen} \theta$ satisfazendo $\theta = \pi/4$, $\frac{d\theta}{dt} = 1$ quando $t = 0$.

A equação diferencial dada é equivalente ao sistema:

$$\frac{d\theta}{dt} = \phi = f(t, \theta, \phi), \quad \frac{d\phi}{dt} = -8 \operatorname{sen} \theta = g(t, \theta, \phi)$$

com as condições iniciais $t = 0$, $\theta = \pi/4$, $\phi = 1$. Então:

$\frac{d\theta}{dt} = \theta' = \phi \quad \theta'_0 = 1 \qquad \phi' = -8 \operatorname{sen} \theta \quad \phi'_0 = -4\sqrt{2}$

$\theta'' = \phi' \quad \theta''_0 = -4\sqrt{2} \quad \phi'' = -8\,\theta' \cos \theta \quad \phi''_0 = -4\sqrt{2}$

$$\theta''' = \phi'' \quad \theta_0''' = -4\sqrt{2} \quad \phi''' = 8(\theta')^2 \operatorname{sen}\theta - 8\theta'' \cos\theta$$

$$\theta^{iv} = \phi''' \quad \theta_0^{iv} = 4\sqrt{2}+32 \qquad \phi_0''' = 4\sqrt{2}(1+4\sqrt{2})$$

$$\text{e} \quad \theta = \pi/4 + t - 4\sqrt{2}\frac{t^2}{2} - 4\sqrt{2}\frac{t^3}{6} + 4(8+\sqrt{2})\frac{t^4}{24} + \cdots\cdots = 0{,}82821.$$

16) Pelo Método de Kutta-Simpson calcular y correspondente a $x = 0{,}1$ para a solução particular de $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2x\dfrac{dy}{dx} - 4y = 0$ satisfazendo $y = 0{,}2$, $\dfrac{dy}{dx} = 0{,}5$ quando $x = 0$.

A equação dada, com as condições iniciais, é equivalente ao sistema:

$$\frac{dy}{dx} = z = f(x, y, z), \qquad \frac{dz}{dx} = 4y - 2xz = g(x, y, z)$$

com as condições iniciais $x = 0$, $y = 0{,}2$, $z = 0{,}5$.

Temos: $(x_0, y_0, z_0) = (0;\ 0{,}2;\ 0{,}5)$, $h = 0{,}1$, $f_0 = 0{,}5$, $g_0 = 0{,}8$.

Então:

$k_1 = hf_0 = 0{,}05$,

$l_1 = hg_0 = 0{,}08$,

$k_2 = hf(x_0 + \frac{1}{2}h,\ y_0 + \frac{1}{2}k_1,\ z_0 + \frac{1}{2}l_1) = 0{,}1(0{,}54) = 0{,}054$,

$l_2 = hg(x_0 + \frac{1}{2}h,\ y_0 + \frac{1}{2}k_1,\ z_0 + \frac{1}{2}l_1) = 0{,}1(0{,}846) = 0{,}0846$,

$k_3 = hf(x_0 + \frac{1}{2}h,\ y_0 + \frac{1}{2}k_2,\ z_0 + \frac{1}{2}l_2) = 0{,}1(0{,}5423) = 0{,}05423$,

$l_3 = hg(x_0 + \frac{1}{2}h,\ y_0 + \frac{1}{2}k_2,\ z_0 + \frac{1}{2}l_2) = 0{,}1(0{,}85377) = 0{,}085377$,

$k_4 = hf(x_0 + h,\ y_0 + k_3,\ z_0 + l_3) = 0{,}1(0{,}585377) = 0{,}0585377$,

$k \approx \dfrac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 0{,}0541663$ e $\bar{y} = y_0 + k \approx 0{,}25417$.

PROBLEMAS PROPOSTOS

17) Calcular y quando $x = 0{,}2$ se $dy/dx = x + y^2$ e $y = 1$ quando $x = 0$, empregando: *a*) o Método de Picard, *b*) a Série de Taylor e *c*) o Método da Primeira Derivada com $n = 4$.
Resp.: *a*) $y_1 = 1{,}22$, $y_2 = 1{,}2657$, $y_3 = 1{,}2727$; *b*) 1,2735; *c*) 1,2503

18) Calcular y quando $x = 0{,}1$ se $dy/dx = x - y_2$ e $y = 1$ quando $x = 0$, empregando: o Método de Picard, *b*) a Série de Taylor e *c*) o Método da Primeira Derivada com $n = 4$.
Resp.: *a*) $y_1 = 0{,}905$, $y_2 = 0{,}9143$, $y_3 = 0{,}0138$; *b*) 0,9138; *c*) 0,9107

19) Pelo Método de Runge, calcular y quando $x = 0{,}025$ se $dy/dx = x + y$ e $y = 1$ quando $x = 0$. *Resp.:* 1,0256

20) Pelo Método de Runge, calcular y quando $x = 2{,}2$ se $dy/dx = 1 + y/x$ e $y = 2$ quando $x = 2$. *Resp.:* 2,4096

21) Pelo Método de Runge, calcular y quando $x = 0{,}5$ se $dy/dx = \sqrt{x + 2y}$ e $y = 0{,}17$ quando $x = 0{,}3$. *Resp.:* 0,3607

22) Resolver o Problema 21 empregando o Método de Kutta-Simpson. *Resp.:* 0,3611

23) Pelo Método de Runge, calcular y e z quando $x = 0{,}2$ na solução particular do sistema $dy/dx = y + z$, $dz/dx = x^2 + y$ satisfazendo $y = 0{,}4$, $z = 0{,}1$ quando $x = 0{,}1$. *Resp.:* $y \approx 0{,}4548$, $z \approx 0{,}1450$

24) Pelo Método de Kutta-Simpson calcular y quando $x = 0{,}2$ na solução particular de $\frac{d^2y}{dx^2} + 3x\frac{dy}{dx} + y = 0$ satisfazendo $y = 0{,}1$, $\frac{dy}{dx} = 0{,}2$ quando $x = 0{,}1$. *Resp.:* 0,1191

CAPÍTULO XXV

APLICAÇÃO DAS SÉRIES NA SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Equações Diferenciais de Primeira Ordem. O teorema da existência, apresentado no Capítulo II, para uma equação diferencial da forma

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

dá uma condição suficiente para uma solução. Empregando séries de potências, encontra-se y na forma de uma série de Taylor:

$$(2) \qquad y = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)^2 + \cdots\cdots + A_n(x - x_0)^n + \cdots\cdots,$$

onde, por conveniência, y_0 foi substituído por A_0. Esta série I) satisfaz a equação diferencial (1), II) tem o valor $y = y_0$ quando $x = x_0$ e III) é convergente para todos os valores de x nas vizinhanças de $x = x_0$.

A) Para obter a solução de (1) satisfazendo a condição $y = y_0$ quando $x = 0$:

a) Supor que a solução seja da forma

$$y = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \cdots\cdots + A_nx^n + \cdots\cdots$$

onde $A_0 = y_0$ e os restantes A são constantes a determinar.

b) Substituir a série suposta na equação diferencial e proceder como se viu no Método dos Coeficientes Indeterminados, no Capítulo XV.

EXEMPLO 1. Resolver $y' = x^2 + y$ em série satisfazendo à condição $y = y_0$ quando $x = 0$.

Como $f(x, y) = x^2 + y$ é unívoca e contínua, enquanto que $\partial f/\partial y = 1$ é contínua para qualquer valor de (x, y), incluindo $(0, y_0)$, as condições do Teorema da Existência estão satisfeitas e podemos admitir a solução:

$$y = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4 + \cdots\cdots + A_nx^n + \cdots\cdots$$

Dentro dos limites de convergência, esta série pode ser derivada têrmo a têrmo, dando uma série que converge para a derivada y'. Assim,

$$y' = A_1 + 2A_2x + 3A_3x^2 + 4A_4x^3 + \ldots\ldots + nA_nx^{n-1} + \ldots\ldots$$

e

$$y' - x^2 - y = (A_1 - A_0) + (2A_2 - A_1)x + (3A_3 - A_2 - 1)x^2 + (4A_4 - A_3)x^3 + \\ + \cdots\cdots\cdots + (nA_n - A_{n-1})x^{n-1} + \cdots\cdots\cdots = 0.$$

A fim de que esta série se anule para todos os valores de x nas vizinhanças de $x = 0$, é necessário e suficiente que os coeficientes de cada potência de x se anulem. Então:

$$A_1 - A_0 = 0 \text{ e } A_1 = A_0 = y_0, \qquad 3A_3 - A_2 - 1 = 0 \text{ e } A_3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}y_0,$$

$$2A_2 - A_1 = 0 \text{ e } A_2 = \frac{1}{2}A_1 = \frac{1}{2}A_0 = \frac{1}{2}y_0, \quad 4A_4 - A_3 = 0 \text{ e } A_4 = \frac{1}{12} + \frac{1}{24}y_0,$$

. . . .

$$nA_n - A_{n-1} = 0 \quad \text{e} \quad A_n = \frac{1}{n}A_{n-1}, \quad n \geqq 4.$$

Esta última relação, chamada *fórmula de recorrência*, pode ser usada para calcular os demais coeficientes. Então:

$$A_5 = \frac{1}{5}A_4 = \frac{1}{60} + \frac{1}{120}y_0, \quad A_6 = \frac{1}{6}A_5 = \frac{1}{360} + \frac{1}{720}y_0, \quad \ldots\ldots\ldots$$

É possível, também, obter os coeficientes como se segue:

Como $A_n = \frac{1}{n}A_{n-1}$ e $A_{n-1} = \frac{1}{n-1}A_{n-2}$, $A_n = \frac{1}{n(n-1)}A_{n-2}$. Porém,

$$A_{n-2} = \frac{1}{n-2}A_{n-3}, \cdots; \quad \text{assim: } A_n = \frac{1}{n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot 4}A_3 =$$

$$= \frac{1}{n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot 4\cdot 3}(1 + \tfrac{1}{2}A_0) = \frac{1}{n!}(2 + y_0), \quad n \geqq 3.$$

Quando os valores dos A forem substituídos na série suposta, teremos:

$$y = y_0 + y_0x + \frac{1}{2}y_0x^2 + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}y_0\right)x^3 + \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{24}y_0\right)x^4 + \cdots\cdots + \\ + \frac{1}{n!}(2 + y_0)x^n + \cdots\cdots =$$

$$= (y_0 + 2)(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots\cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots\cdots) - x^2 - 2x - 2 =$$

$$= (y_0 + 2)e^x - x^2 - 2x - 2.$$

A equação diferencial dada pode ser resolvida usando o fator de integração e^{-x}; então:

$$ye^{-x} = \int x^2 e^{-x}\,dx = (-x^2 - 2x - 2)e^{-x} + C \quad \text{e} \quad y = Ce^x - x^2 - 2x - 2.$$

Da condição inicial $y = y_0$ quando $x = 0$, $C = y_0 + 2$ e $y = (y_0 + 2)e^x - x^2 - 2x - 2$, como anteriormente.

B) Para obter a solução de (1) satisfazendo à condição $y = y_0$ quando $x = x_0$:

a) Fazer a substituição $x - x_0 = v$, isto é,

$$x = v + x_0, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv}$$

o que dá $dy/dv = F(v, y)$.

b) Usar o processo de *A*) para obter a solução desta equação satisfazendo à condição $y = y_0$ quando $v = 0$.

c) Fazer a substituição $v = x - x_0$ na solução.

Exemplo 2. Resolver $y' = x^2 - 4x + y + 1$ satisfazendo à condição $y = 3$ quando $x = 2$.

Primeiro fazer a substituição $x = v + 2$, obtendo $\frac{dy}{dv} = v^2 + y - 3$. Procuramos a solução satisfazendo $y = 3$ quando $v = 0$; assim, supomos que a solução seja a série:

$$y = 3 + A_1v + A_2v^2 + A_3v^3 + A_4v^4 + \cdots\cdots\cdots + A_nv^n + \cdots\cdots\cdots$$

Então:

$$\frac{dy}{dv} = A_1 + 2A_2v + 3A_3v^2 + 4A_4v^3 + \cdots\cdots\cdots + nA_nv^{n-1} + \cdots\cdots\cdots$$

e

$$\frac{dy}{dv} - v^2 - y + 3 = A_1 + (2A_2 - A_1)v + (3A_3 - A_2 - 1)v^2 + (4A_4 - A_3)v^3 + \\ + \cdots\cdots\cdots + (nA_n - A_{n-1})v^{n-1} + \cdots\cdots\cdots = 0.$$

Igualando os coeficientes a zero, temos: $A_1 = 0$, $2A_2 - A_1 = 0$ e $A_2 = 0$, $3A_3 - A_2 - 1 = 0$ e $A_3 = 1/3$, $4A_4 - A_3 = 0$ e $A_4 = 1/12$, $\cdots\cdots\cdots$

A fórmula de recorrência $A_n = \frac{1}{n} A_{n-1}$ dá:

$$A_n = \frac{1}{n} A_{n-1} = \frac{1}{n(n-1)} A_{n-2} = \cdots\cdots = \frac{1}{n(n-1)(n-2)\cdots 4} A_3 = \frac{2}{n!}, \quad n \geqq 3.$$

Daí: $y = 3 + \frac{1}{3} v^3 + \frac{1}{12} v^4 + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \frac{2}{n!} v^n + \cdots\cdots\cdots\cdots =$

$$= 3 + \frac{2}{3!}(x-2)^3 + \frac{2}{4!}(x-2)^4 + \cdots\cdots\cdots\cdots + \frac{2}{n!}(x-2)^n + \cdots\cdots$$

(Ver também Problemas 1-4).

Equações Diferenciais Lineares de Segunda Ordem. Consideremos a equação

$$P_0(x)y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = 0 \tag{3}$$

onde os P são polinômios em x. Chamaremos $x = a$ um *ponto ordinário* de (3) se $P_0(a) \neq 0$; em caso contrário, será um *ponto singular*.

Se $x = 0$ é um ponto ordinário, (3) pode ser resolvida em séries na vizinhança de $x = 0$, como

$$y = A\left\{\text{série em } x\right\} + B\left\{\text{série em } x\right\}, \tag{4}$$

onde A e B são constantes arbitrárias. As duas séries são linearmente independentes e ambas são convergentes nas vizinhanças de $x = 0$. O processo visto na seção acima, para as equações de primeira ordem, pode ser aplicado para se determinar (4).

(Ver Problemas 5-7).

PROBLEMAS RESOLVIDOS

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE PRIMEIRA ORDEM

1) Resolver $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x - y}{1 - x}$ em série, de modo que $y = y_0$ quando $x = 0$.

Suponhamos que a série seja

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + \cdots\cdots + A_n x^n + \cdots\cdots,$$

onde $A_0 = y_0$. Então:

$$y' = A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^2 + 4A_4 x_3 + \cdots\cdots + nA_n x^{n-1} + \cdots\cdots.$$

Substituindo na equação diferencial dada, $(1-x)y' - 2x + y = 0$, temos:

$$(1-x)(A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^2 + 4A_4 x^3 + \cdots\cdots + nA_n x^{n-1} + \cdots\cdots) -$$
$$- 2x + (A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \cdots\cdots + A_n x^n + \cdots\cdots) = 0,$$

ou

$$(A_1 + A_0) + (2A_2 - 2)x + (3A_3 - A_2)x^2 + (4A_4 - 2A_3)x^3 + \cdots\cdot +$$
$$+ [(n+1)A_{n+1} - (n-1)A_n]x^n + \cdots\cdot = 0.$$

(NOTA. Para determinar o têrmo geral da expressão acima, podemos partir da série suposta para y, derivá-la têrmo a têrmo, obtendo y', efetuar os produtos indicados e grupar os têrmos em x^n, ou deduzir o têrmo procurado por meio do têrmo geral da série suposta e suas derivadas. No presente caso, queremos o têrmo em x^n, depois de feitas as substituições em $y' - xy' - 2x + y = 0$. Primeiro, queremos o têrmo em x^n de y', conhecendo o têrmo em x^{n-1}. Mudamos, simplesmente, n por $(n+1)$ em $nA_n x^{n-1}$ obtendo $(n+1)A_{n+1}x^n$. Os têrmos restantes $-nA_n x^n + A_n x^n$ são óbvios).

Igualando a zero os coeficientes das potências distintas de x, temos:

$$A_1 + A_0 = 0 \quad \text{e} \quad A_1 = -A_0, \qquad 3A_3 - A_2 = 0 \quad \text{e} \quad A_3 = \frac{1}{3} A_2 = \frac{1}{3},$$

$$2A_2 - 2 = 0 \quad \text{e} \quad A_2 = 1, \qquad 4A_4 - 2A_3 = 0 \quad \text{e} \quad A_4 = \frac{1}{2} A_3 = \frac{1}{6},$$

. . . .

$$(n+1) A_{n+1} - (n-1) A_n = 0 \quad \text{e} \quad A_{n+1} = \frac{n-1}{n+1} A_n, \quad (n \geqq 2).$$

Agora: $A_n = \frac{n-2}{n} A_{n-1} = \frac{(n-2)(n-3)}{n(n-1)} A_{n-2} =$

$$= \frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{n(n-1)(n-2)} A_{n-3} = \cdots\cdots\cdots\cdots =$$

$$= \frac{(n-2)(n-3)(n-4)\cdots\cdots 2 \cdot 1}{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots\cdots 4 \cdot 3} A_2 = \frac{2}{n(n-1)}, \quad n \geqq 2.$$

Então:

$$y = y_0(1-x) + x^2 + \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{6} x^4 + \frac{1}{10} x^5 + \cdots\cdots + \frac{2}{n(n-1)} x^n + \cdots\cdots =$$

$$= y_0(1-x) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n(n-1)} x^n.$$

Pelo teste de relação, temos:

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{A_{n+1} x^{n+1}}{A_n x^n} \right| = |x| \lim_{n \to \infty} \frac{n-1}{n+1} = |x|.$$

A série converge para $|x| < 1$.

Nota. Por meio do fator de integração $1/(1-x)$ a solução da equação diferencial é: $y = 2(1-x)\ln(1-x) + 2x + C(1-x)$. A integral particular procurada é:

$$y = y_0(1-x) + 2(1-x)\ln(1-x) + 2x.$$

2) Resolver $(1 - xy) y' - y = 0$ em potências de x.

Suponhamos que a série seja

$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + \cdots + A_n x^n + \cdots\cdots$. Então

$y' = A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^2 + 4A_4 x^3 + \cdots\cdots + nA_n x^{n-1} + \cdots\cdots$ e

$$\begin{aligned}
&(1-xy)y' - y = \\
&= (1 - A_0 x - A_1 x^2 - A_2 x^3 - A_3 x^4 - \cdots - A_n x^{n+1} - \cdots)(A_1 + 2A_2 x + \\
&+ 3A_3 x^2 + 4A_4 x^3 + \cdots\cdots + nA_n x^{n-1} + \cdots) - (A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \\
&+ A_3 x^3 + \cdots + A_n x^n + \cdots) = \\
&= (A_1 - A_0) + (2A_2 - A_0 A_1 - A_1) x + (3A_3 - 2A_0 A_2 - A_1^2 - A_2) x^2 + \\
&+ (4A_4 - 3A_0 A_3 - 3A_1 A_2 - A_3) x^3 + \cdots = 0.
\end{aligned}$$

Igualando a zero os coeficientes das potências distintas de x, temos:

$A_1 - A_0 = 0$ e $A_1 = A_0$,

$2A_2 - A_0 A_1 - A_1 = 0$ e $A_2 = \frac{1}{2} A_1 (1 + A_0) = \frac{1}{2} A_0 (1 + A_0)$,

$$3A_3 - 2A_0 A_2 - A_1^2 - A_2 = 0 \text{ e } A_3 = \frac{1}{3}(2A_0 A_2 + A_1^2 + A_2) = \frac{1}{6} A_0 (1 + 5A_0 + 2A_0^2),$$

$$4A_4 - 3A_0 A_3 - 3A_1 A_2 - A_3 = 0 \text{ e } A_4 = \frac{1}{24} A_0 (1 + 17A_0 + 26A_0^2 + 6A_0^3),$$

....

Então: $$y = A_0 [1 + x + \frac{1}{2!}(1 + A_0) x^2 + \frac{1}{3!}(1 + 5A_0 + 2A_0^2) x^3 + \frac{1}{4!}(1 + 17A_0 + 26A_0^2 + 6A_0^3) x^4 + \cdots\cdots].$$

Não procuraremos, aqui, obter uma fórmula de recorrência nem testar para convergência.

3) Resolver $xy' - y - x - 1 = 0$ em potências de $(x - 1)$.

Fazendo $x = z + 1$, a equação transforma-se em $(z+1)\frac{dy}{dz} - y - z - 2 = 0$.

Suponhamos que a série, em potências de z, seja:

$$y = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + A_4 z^4 + \cdots\cdots + A_n z^n + \cdots\cdots.$$

Então:

$$\frac{dy}{dz} = A_1 + 2A_2 z + 3A_3 z^2 + 4A_4 z^3 + \cdots\cdots + nA_n z^{n-1} + \cdots\cdots \text{ e}$$

$$\begin{aligned}(z + 1)\frac{dy}{dz} - y - z - 2 &= \\ &= (z + 1)(A_1 + 2A_2 z + 3A_3 z^2 + 4A_4 z^3 + \cdots + nA_n z^{n-1} + \cdots) - \\ &\quad - z - 2 - (A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \cdots + A_n z^n + \cdots) = \\ &= (A_1 - 2 - A_0) + (2A_2 - 1) z + (3A_3 + A_2) z^2 + (4A_4 + 2A_3) z^3 + \\ &\quad + \cdots\cdots + [(n + 1) A_{n+1} + (n - 1) A_n] z^n + \cdots\cdots = 0.\end{aligned}$$

Igualando a zero os coeficientes das potências distintas de z, temos:

$A_1 - 2 - A_0 = 0$ e $A_1 = 2 + A_0$, $\quad 3A_3 + A_2 = 0$ e $A_3 = -\frac{1}{3} A_2 = -\frac{1}{6}$,

$2A_2 - 1 = 0$ e $A_2 = \frac{1}{2}$, $\quad 4A_4 + 2A_3 = 0$ e $A_4 = -\frac{1}{2} A_3 = \frac{1}{12}$,

....

$$(n + 1) A_{n+1} + (n - 1) A_n = 0 \text{ e } A_{n+1} = -\frac{n - 1}{n + 1} A_n, \quad n \geq 2.$$

Do Problema 1,

$$A_n = (-1)^n \frac{(n-2)(n-3)\cdots\cdots 2\cdot 1}{n(n-1)\cdots\cdots\cdots\cdots 4\cdot 3} A_2 = (-1)^n \frac{1}{n(n-1)}, \quad n \geqq 2,$$

e

$$y = A_0 + (2 + A_0)z + \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{12}z^4 - \cdots\cdots + \\ + (-1)^n \frac{1}{n(n-1)} z^n + \cdots\cdots$$

Substituindo z por $(x-1)$, temos:

$$y = A_0 x + 2(x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{6}(x-1)^3 + \frac{1}{12}(x-1)^4 - \cdots\cdots\cdots\cdots =$$

$$= A_0 x + 2(x-1) + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n(n-1)} (x-1)^n.$$

Pelo teste da relação:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{A_{n+1}z^{n+1}}{A_n z^n} \right| = |z| \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n+1} = |z| = |x-1|.$$

A série converge para $|x-1| < 1$.

4) Resolver $y' - x^3 - e^y = 0$ de modo que $y = 0$ quando $x = 0$.

Tendo em vista a condição inicial, suponhamos que a série seja;

$$y = A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + A_5 x^5 + \cdots\cdots\cdots\cdots.$$

Então:

$$y' = A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^2 + 4A_4 x^3 + 5A_5 x^4 + \cdots\cdots\cdots\cdots.$$

Também:

$$e^y = 1 + y + \frac{1}{2!}y^2 + \frac{1}{3!}y^3 + \frac{1}{4!}y^4 + \cdots\cdots\cdots\cdots =$$

$$= 1 + (A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + \cdots\cdots) + \frac{1}{2!}[A_1^2 x^2 + 2A_1 A_2 x^3 + \\ + (A_2^2 + 2A_1 A_3)x^4 + \cdots\cdots] + \frac{1}{3!}(A_1^3 x^3 + 3A_1^2 A_2 x^4 + \cdots\cdots) + \\ + \frac{1}{4!}(A_1^4 x^4 + \cdots\cdots) + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots =$$

$$= 1 + A_1 x + (A_2 + \frac{1}{2}A_1^2)x^2 + (A_3 + A_1 A_2 + \frac{1}{6}A_1^3)x^3 + \\ + (A_4 + \frac{1}{2}A_2^2 + A_1 A_3 + \frac{1}{2}A_1^2 A_2 + \frac{1}{24}A_1^4)x^4 + \cdots\cdots\cdots\cdots,$$

Substituindo na equação diferencial:

$$(A_1 - 1) + (2A_2 - A_1)x + (3A_3 - 1 - A_2 - \frac{1}{2}A_1^2)x_2 +$$
$$+ (4A_4 - A_3 - A_1A_2 - \frac{1}{6}A_1^3)x^3 + (5A_5 - A_4 - \frac{1}{2}A_2^2 - A_1A_3 -$$
$$- \frac{1}{2}A_1^2A_2 - \frac{1}{24}A_1^4)x^4 + \cdots\cdots = 0.$$

Igualando a zero os coeficientes das potências distintas de x, temos:

$$A_1 - 1 = 0 \quad \text{e} \quad A_1 = 1, \quad 2A_2 - A_1 = 0 \quad \text{e} \quad A_2 = \frac{1}{2}A_1 = \frac{1}{2},$$

$$3A_3 - 1 - A_2 - \frac{1}{2}A_1^2 = 0 \quad \text{e} \quad A_3 = \frac{1}{3}(1 + A_2 + \frac{1}{2}A_1^2) = \frac{2}{3},$$

$$4A_4 - A_3 - A_1A_2 - \frac{1}{6}A_1^3 = 0 \quad \text{e} \quad A_4 = \frac{1}{4}(A_3 + A_1A_2 + \frac{1}{6}A_1^3) = \frac{1}{3},$$

$$5A_5 - A_4 - \frac{1}{2}A_2^2 - A_1A_3 - \frac{1}{2}A_1^2A_2 - \frac{1}{24}A_1^4 = 0 \text{ e } A_5 = \frac{17}{60}, \cdots\cdots$$

$$\text{e} \quad y = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^4 + \frac{17}{60}x^5 + \cdots\cdots.$$

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES DE SEGUNDA ORDEM

5) Resolver $(1 + x^2)y'' + xy' - y = 0$ em potências de x.

Temos $P_0(x) = 1 + x^2$, $P_0(0) \neq 0$ e $x = 0$ é um ponto ordinário.

Suponhamos a série

$$y = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4 + \cdots\cdots + A_nx^n + \cdots\cdots.$$

Então:

$$y' = A_1 + 2A_2x + 3A_3x^2 + 4A_4x^3 + \cdots\cdots + nA_nx^{n-1} + \cdots\cdots$$

e

$$y'' = 2A_2 + 6A_3x + 12A_4x^2 + \cdots\cdots + n(n-1)A_nx^{n-2} + \cdots\cdots.$$

Substituindo na equação diferencial dada:

$$(1 + x^2)[2A_2 + 6A_3x + 12A_4x^2 + \cdots + n(n-1)A_nx^{n-2} + \cdots] +$$
$$+ x(A_1 + 2A^2x + 3A_3x^2 + 4A_4x^3 + \cdots + nA_nx^{n-1} + \cdots) -$$
$$- (A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4 + \cdots + A_nx^n + \cdots) = 0,$$

$$\text{ou} \quad (2A_2 - A_0) + 6A_3x + (12A_4 + 3A_2)x^2 + \cdots +$$
$$+ [(n + 2)(n + 1)A_{n+2} + (n^2 - 1)A_n]x^n + \cdots = 0.$$

Igualando a zero os coeficientes das potências distintas de x, temos:

$$2A_2 - A_0 = 0 \quad e \quad A_2 = \frac{1}{2} A_0, \quad 6A_3 = 0 \quad e \quad A_3 = 0,$$

$$12A_4 + 3A_2 = 0 \quad e \quad A_4 = -\frac{1}{8} A_0, \quad \cdots\cdots$$

$$(n+2)(n+1) A_{n+2} + (n^2 - 1) A_n = 0 \quad e \quad A_{n+2} = -\frac{n-1}{n+2} A_n.$$

Da última relação, é claro que: $A_3 = A_5 = A_7 = \cdots = 0$, isto é, $A_{n+2} = 0$ se n fôr ímpar. Para n par, $(n = 2k)$, temos:

$$A_{2k} = -\frac{2k-3}{2k} A_{2k-2} = \frac{(2k-3)(2k-5)}{2k(2k-2)} A_{2k-4} = \cdots\cdots =$$
$$= (-1)^{k+1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots\cdots (2k-3)}{2^k k!} A_0 .$$

Então, a solução geral é:

$$y = A_0 \left(1 + \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{8} x^4 + \frac{1}{16} x^6 - \frac{5}{128} x^8 + \cdots\cdots\right) + A_1 x$$

$$= A_0 \left[1 + \frac{1}{2} x^2 + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots\cdots (2k-3)}{2^k k!} x^{2k}\right] + A_1 x =$$

$$= A_0 \left[1 + \frac{1}{2} x^2 - \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots\cdots (2k-3)}{2^k k!} x^{2k}\right] + A_1 x.$$

Aqui: $\lim\limits_{n \to \infty} \left| \dfrac{A_{n+2} x^{n+2}}{A_n x^n} \right| = x^2 \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n-1}{n+2} = x^2$ e a série converge para $|x| > 1$.

6) Resolver $y'' - x^2 y' - y = 0$ em potências de x.

Aqui $P_0(x) = 1$ e $x = 0$ é um ponto ordinário. Suponhamos a série:

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \cdots\cdots\cdots + A_n x^n + \cdots\cdots\cdots .$$

Então:

$$y' = A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^2 + \cdots\cdots\cdots + nA_n x^{n-1} + \cdots\cdots\cdots,$$

$$y'' = 2A_2 + 6A_3 x + 12A_4 x^2 + 20A_5 x^3 + \cdots\cdots\cdots + n(n-1) A_n x^{n-2} +$$
$$+ \cdots\cdots\cdots \quad e \quad y'' - x^2 y' - y =$$
$$= (2A_2 - A_0) + (6A_3 - A_1) x + (12A_4 - A_1 - A_2) x^2 +$$
$$+ (20A_5 - 2A_2 - A_3) x^3 + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots +$$
$$+ [(n+2)(n+1) A_{n+2} - (n-1) A_{n-1} - A_n] x^n + \cdots\cdots\cdots\cdots = 0.$$

Igualando a zero os coeficientes das potências distintas de x, temos:

$$2A_2 - A_0 = 0 \text{ e } A_2 = \frac{1}{2}A_0, \quad 6A_3 - A_1 = 0 \text{ e } A_3 = \frac{1}{6}A_1,$$

$$12A_4 - A_1 - A_2 = 0 \text{ e } A_4 = \frac{1}{24}A_0 + \frac{1}{12}A_1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(n+2)(n+1)A_{n+2} - (n-1)A_{n-1} - A_n = 0$$

e

$$A_{n+2} = \frac{(n-1)A_{n-1} + A_n}{(n+1)(n+2)}, \quad n \geqq 1.$$

A solução geral é:

$$y = A_0\left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{20}x^5 + \frac{1}{720}x^6 + \frac{13}{2520}x^7 + \cdots\cdots\right) +$$
$$+ A_1\left(x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{7}{360}x^6 + \frac{41}{5040}x^7 + \cdots\cdots\right).$$

7) Resolver $y'' - 2x^2y' + 4xy = x^2 + 2x + 2$ em potências de x.

Suponhamos que a série seja:

$$y = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4 + A_5x^5 + \cdots\cdots +$$
$$+ A_nx^n + \cdots\cdots.$$

Então:

$$y' = A_1 + 2A_2x + 3A_3x^2 + 4A_4x^3 + 5A_5x^4 + \cdots\cdots +$$
$$+ nA_nx^{n-1} + \cdots\cdots,$$

$$y'' = 2A_2 + 6A_3x + 12A_4x^2 + 20A_5x_3 + \cdots\cdots +$$
$$+ n(n-1)A_nx^{n-2} + \cdots\cdots$$

e

$$y'' - 2x^2y' + 4xy - x^2 - 2x - 2 = (2A_2 - 2) + (6A_3 + 4A_0 - 2)x +$$
$$+ (12A_4 + 2A_1 - 1)x^2 + 20A_5x^3 + \cdots\cdots +$$
$$+ [(n+2)(n+1)A_{n+2} - 2(n-1)A_{n-1} + 4A_{n-1}]x^n + \cdots\cdots = 0.$$

Igualando a zero os coeficientes, temos:

$$2A_2 - 2 = 0 \text{ e } A_2 = 1, \quad 6A_3 + 4A_0 - 2 = 0$$

e

$$A_3 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}A_0, \quad A_4 = \frac{1}{12} - \frac{1}{6}A_1, \quad A_5 = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(n+2)(n+1)A_{n+2} - 2(n-3)A_{n-1} = 0$$

e

$$A_{n+2} = \frac{2(n-3)}{(n+1)(n+2)}A_{n-1}, \quad n \geqq 3.$$

A solução geral é:

$$y = A_0 (1 - \frac{2}{3} x^3 - \frac{2}{45} x^6 - \frac{2}{405} x^9 - \cdots\cdots) +$$

$$+ A_1 (x - \frac{1}{6} x^4 - \frac{1}{63} x^7 - \frac{1}{567} x^{10} - \cdots\cdots) +$$

$$+ x^2 + \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{12} x^4 + \frac{1}{45} x^6 + \frac{1}{126} x^7 + \frac{1}{405} x^9 + \frac{1}{1134} x^{10} + \cdots\cdots$$

8) Resolver $y'' + (x-1)y' + y = 0$ em potências de $x - 2$.

Façamos $x = v + 2$ na equação dada. Temos: $\frac{d^2y}{dv^2} + (v+1)\frac{dy}{dv} + y = 0$ que deve ser integrada em potências de v. Tomemos a série

$$y = A_0 + A_1 v + A_2 v^2 + A_3 v^3 + A_4 v^4 + \cdots\cdots + A_n v^n + \cdots\cdots.$$

Então:

$$\frac{dy}{dv} = A_1 + 2A_2 v + 3A_3 v^2 + 4A_4 v^3 + \cdots\cdots + nA_n v^{n-1} + \cdots\cdots,$$

$$\frac{d^2y}{dv^2} = 2A_2 + 6A_3 v + 12A_4 v^2 + \cdots\cdots + n(n-1) A_n v^{n-2} + \cdots\cdots$$

e

$$\frac{d^2y}{dv^2} + (v+1)\frac{dy}{dv} + y = (2A_2 + A_1 + A_0) + (6A_3 + 2A_1 + 2A_2) v +$$
$$+ (12A_4 + 3A_2 + 3A_3) v^2 + \cdots\cdots +$$
$$+ [(n+2)(n+1) A_{n+2} + (n+1) A_n + (n+1) A_{n+1}] v^n + \cdots\cdots = 0.$$

Igualando a zero os coeficientes das potências de v, temos:

$$A_2 = -\frac{1}{2}(A_0 + A_1), \quad A_3 = -\frac{1}{3}(A_1 + A_2) = \frac{1}{6}(A_0 - A_1),$$

$$A_4 = -\frac{1}{4}(A_2 + A_3) = \frac{1}{12}(A_0 + 2A_1), \cdots\cdots$$

$$(n+2)(n+1) A_{n+2} + (n+1) A_n + (n+1) A_{n+1} = 0$$

e

$$A_{n+2} = -\frac{1}{n+2}(A_n + A_{n+1}).$$

Daí, como $v = x - 2$, a solução geral é:

$$y = A_0 [1 - \frac{1}{2}(x-2)^2 + \frac{1}{6}(x-2)^3 + \frac{1}{12}(x-2)^4 -$$
$$- \frac{1}{20}(x-2)^5 - \frac{1}{180}(x-2)^6 + \cdots\cdots] +$$
$$+ A_1 [(x-2) - \frac{1}{2}(x-2)^2 - \frac{1}{6}(x-2)^3 + \frac{1}{6}(x-2)^4 - \frac{1}{36}(x-2)^6 + \cdots\cdots]]$$

PROBLEMAS PROPOSTOS

9) Resolver $(1-x)\,y' = x^2 - y$ em potências de x.

Resp.: $y = A_0(1-x) +$
$$+ x^3\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}x+\frac{1}{10}x^2+\cdots\cdots+\frac{1\cdot 2}{(n+2)(n+3)}x^n+\cdots\cdots\right)$$

10) Resolver $xy' = 1-x+2y$ em potências de $x-1$. Integrar, também, diretamente.

Sugestão: Faça $x-1=z$ e resolva $(z+1)\dfrac{dy}{dz} = -z+2y$ em potências de z.

Resp.: $y = A_0\,[1+2(x-1)+(x-1)^2] + \frac{1}{2} + (x-1)$

11) Resolver $y' = 2x^2 + 3y$ em potências de x.

Resp.: $y = A_0\,[1+3x+9x^2/2+9x^3/2+27x^4/8+\cdots\cdots] +$
$+ 2x^3/3 + x^4/2 = \cdots\cdots$

12) Resolver $(x+1)\,y' = x^2 - 2x + y$ em potências de x.

Resp.: $y = A_0(1+x) - x^2 + 2x^3/3 - x^4/3 + x^5/5 - 2x^6/15 + \cdots\cdots$

13) Resolver $y'' + xy = 0$ em potências de x.

$A_n = -\dfrac{1}{n(n-1)}A_{n-3}$, $n \geqq 3$; convergente para todos os valores de x.

Resp.: $y = A_0(1-x^3/6+x^6/180-\cdots\cdots)+A_1(x-x^4/12+x^7/504-\cdots\cdots)$

14) Resolver $y'' + 2x^2y = 0$ em potências de x.

$A_n = -\dfrac{2}{n(n-1)}A_{n-4}$; convergente para todos os valores de x.

Resp.: $y = A_0(1-x^4/6+x^8/168-\cdots\cdots) + A_1(x-x^5/10 +$
$+ x^9/360 - \cdots\cdots$

15) Resolver $y'' = xy' + x^2y = 0$ em potências de x.

$n(n-1)A_n - (n-2)A_{n-2} + A_{n-4} = 0$, $n \geqq 4$.

Resp.: $y = A_0(1-x^4/12 - x^6/90 + x^8/3360 + \cdots) +$
$+ A_1(x+x^3/6 - x^5/40 - x^7/144 - \cdots$

16) Resolver $(1-x^2)\,y'' - 2xy' + p(p+1)\,y = 0$, onde p é uma constante, em potências de x. (Equação de Legendre).

$A_n = \dfrac{(n-2-p)(n+p-1)}{n(n-1)} A_{n-2}$; convergente para $|x| < 1$.

Resp.: $y = A_0 \left(1 - \dfrac{p(p+1)}{2!} x^2 + \dfrac{(p-2)p(p+1)(p+3)}{4!} x^4 - \cdots\cdots\right) +$

$+ A_1 \left(x - \dfrac{(p-1)(p+2)}{3!} x^3 + \dfrac{(p-3)(p-1)(p+2)(p+4)}{5!} x^5 - \cdots\cdots\right)$

17) Resolver $y'' + x^2 y = 1 + x + x^2$ em potências de x.

$A_n = -\dfrac{1}{n(n-1)} A_{n-4}$; convergente para todos os valores de x.

Resp.: $y = A_0 (1 - x^4/12 + x^8/672 - \cdots\cdots) + A_1 (x - x^5/20 +$
$+ x^9/1440 - \cdots\cdots) + x^2/2 + x^3/6 + x^4/12 - x^6/60 -$
$- x^7/252 - x^8/672 + \cdots\cdots$

Capítulo XXVI

APLICAÇÃO DAS SÉRIES NA SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Quando $x = a$ é um ponto singular da equação diferencial

$$(1) \qquad P_0(x)y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = 0,$$

onde $P_i(x)$ são polinômios, o processo do Capítulo anterior não dá uma solução geral, em série, nas vizinhanças de $x = a$.

Exemplo 1. Para a equação $x^2y'' + (x^2 - x)y' + 2y = 0$, $x = 0$ é um ponto singular porque $P_0(0) = 0$. Se admitirmos a solução da forma:

$$(\text{I}) \qquad y = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \cdots\cdots\cdots$$

e substituirmos na equação dada, teremos:

$$2A_0 + A_1x + (2A_2 + A_1)x^2 + (5A_3 + 2A_2)x^3 + \cdots\cdots\cdots = 0.$$

Para que esta relação seja satisfeita, é necessário que: $A_0 = 0$, $A_1 = 0$, $A_2 = 0$, $A_3 = 0$, $\cdots$; assim, não há nenhuma série da forma (I) que satisfaça.

Um ponto singular $x = a$ de (1) é denominado *regular* se, quando (1) estiver na forma

$$(1') \qquad y'' + \frac{R_1(x)}{x-a}y' + \frac{R_2(x)}{(x-a)^2}y = 0,$$

$R_1(x)$ e $R_2(x)$ puderem ser desenvolvidas em série de Taylor, nas vizinhanças de $x = a$.

Exemplo 2. Para a equação $(1 + x)y'' + 2xy' - 3y = 0$, $x = -1$ é um ponto singular, porque $P_0(-1) = 1 + (-1) = 0$. Com a equação na forma

$$y'' + \frac{R_1(x)}{x+1}y' + \frac{R_2(x)}{(x+1)^2}y = y'' + \frac{2x}{x+1}y' + \frac{-3(x+1)}{(x+1)^2}y = 0,$$

os desenvolvimentos de Taylor, na vizinhança de $x = -1$, de $R_1(x)$ e $R_2(x)$ são:

$$R_1(x) = 2x = 2(x+1) - 2 \quad \text{e} \quad R_2(x) = -3(x+1).$$

Logo, $x = -1$ é um ponto singular regular.

EXEMPLO 3. Para a equação $x^3y'' + x^2y' + y = 0$, $x = 0$ é um ponto singular. Escrevendo a equação na forma:

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \frac{x/1}{x^2} y = 0,$$

verifica-se que $R_2(x) = 1/x$ não pode ser desenvolvida em série de Taylor na vizinhança de $x = 0$. Então, $x = 0$ não é um ponto singular regular.

Quando x = 0 é um ponto singular regular de (1), existe sempre uma série que satisfaz. Tal série é da forma

$$(2) \quad y = x^m \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n = A_0 x^m + A_1 x^{m+1} + A_2 x^{m+2} + \cdots + A_n x^{m+n} + \cdots,$$

com $A_0 \neq 0$, bastando determinar m e os A de modo que (2) satisfaça (1).

EXEMPLO 4. Resolver, em série, $2xy'' + (x + 1) y' + 3y = 0$.

Aqui, $x = 0$ é um ponto singular regular. Substituindo

$$y = A_0x^m + A_1x^{m+1} + A_2x^{m+2} + \cdots + A_nx^{m+n} + \cdots,$$

$$y' = mA_0 x^{m-1} + (m + 1) A_1x^m + (m + 2) A_2x^{m+1} + \cdots + (m + n) A_n x^{m+n-1} + \cdots,$$

$$y'' = (m-1) mA_0x^{-m2} + m (m + 1) A_1x^{m-1} + (m + 1)(m + 2) A_2x^m + \cdots + (m + n - 1)(m + n) A_nx^{m+n-2} + \cdots$$

na equação diferencial dada, temos:

$$\text{(I)} \quad m(2m-1) A_0x^{m-1} + [(m + 1)(2m + 1) A_1 + (m + 3) A_0]x^m + [(m + 2)(2m + 3) A_2 + (m + 4) A_1]x^{m+1} + \cdots + [(m+n)(2m+2n-1) A_n + (m+n+2) A_{n-1}]x^{m+n-1} + \cdots = 0.$$

Como $A_0 \neq 0$, para que o coeficiente do primeiro têrmo se anule temos $m(2m-1) = 0$, isto é, $m = 0$ ou $m = ½$. Entretanto, independentemente de m, todos os têrmos, depois do primeiro, se anulam desde que os A satisfaçam a fórmula:

$$A_n = -\frac{m + n + 2}{(m+n)(2m+2n-1)} A_{n-1}, \quad n \geq 1.$$

Então, a série

$$(2') \quad \bar{y} = A_0x^m [1 - \frac{m + 3}{(m + 1)(2m + 1)} x + \frac{(m + 3)(m + 4)}{(m+1)(m+2)(2m+1)(2m+3)} x^2 - \frac{(m + 4)(m + 5)}{(m + 1((m + 2)(2m + 1)(2m + 3)(2m + 5)} x^3 + \cdots]$$

satisfaz à equação

$$\text{(II)} \quad 2x\bar{y}'' + (x + 1)\bar{y}' + 3\bar{y} = m(2m-1) A_0x^{m-1}.$$

O segundo membro de (II) anula-se quando $m = 0$ ou $m = \frac{1}{2}$. Quando $m = 0$, temos de (2') e com $A_0 = 1$, a solução particular

$$y_1 = 1 - 3x + 2x^2 - 2x^3/3 + \ldots\ldots\ldots,$$

e quando $m = \frac{1}{2}$ com $A_0 = 1$, a solução particular

$$y_2 = \sqrt{x}\,(1 - 7x/6 + 21x^2/40 - 11x^3/80 + \cdots\cdots).$$

A solução geral é, então:

$$y = Ay_1 + By_2 =$$

$$= A\,(1-3x+2x^2-2x^3/3+\cdots\cdots)+B\sqrt{x}\,(1-7x/6+21x^2/40-11x^3/80+\cdots\cdots).$$

O coeficiente da mais baixa potência de x em (I) [e, também, o coeficiente do têrmo do segundo membro de (II)], tem a forma $f(m)\,A_0$. A equação $f(m) = 0$ é chamada *equação indicadora*. As soluções linearmente independentes y_1 e y_2, acima, correspondem às raízes distintas $m = 0$ e $m = \frac{1}{2}$ desta equação.

Nos Problemas Resolvidos, abaixo, as raízes da equação indicadora serão:

a) distintas, não diferindo por valor inteiro,

b) iguais,

c) distintas, porém diferindo por um número inteiro.

O primeiro caso está ilustrado no exemplo acima e nos Problemas 1-2.

Quando as raízes m_1 e m_2 da equação indicadora são iguais, as soluções correspondentes são idênticas. A solução geral é, então, obtida por:

$$y = Ay\Big|_{m=m_1} + B\frac{\partial y}{\partial m}\Big|_{m=m_1}$$

(Ver Problemas 3-4).

Quando as duas raízes $m_1 < m_2$ da equação indicadora diferem por um inteiro, a maior das duas, m_2, dá sempre uma solução, enquanto que a menor, m_1, poderá dar ou não. No último caso, fazemos $A_0 = B_0(m - m_1)$ e a solução geral será dada por

$$y = A\bar{y}\Big|_{m=m_1} + B\frac{\partial \bar{y}}{\partial m}\Big|_{m=m_1}$$

(Ver Problemas 5-7).

As séries, desenvolvidas nas vizinhanças de $x = 0$, que aparecem nessas soluções gerais, convergem sempre na região do plano complexo, limitado por dois círculos concêntricos em $x = 0$. O raio de um é arbitràriamente pequeno, enquanto que o do outro se estende ao ponto singular finito da equação diferencial, mais próximo de $x = 0$. É claro que a série obtida no exemplo 4 converge, também, em $x = 0$; além disso, como a equação diferencial tem apenas um ponto singular $x = 0$, estas séries convergem para todos os valores finitos de x.

A solução geral de

$$P_0(x)y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = Q \tag{3}$$

consiste na soma da função complementar [solução geral de (1)] com uma integral particular de (3). Um processo para obter uma integral particular quando Q é uma soma de potências positivas e negativas de x, está ilustrado no Problema 8.

Valores Infinitos de x. Algumas vêzes é necessário resolver uma equação diferencial (1) para valores muito grandes de x. Em tais casos as séries obtidas, mesmo quando válidas para todos os valores finitos de x, são impraticáveis.

Para resolver uma equação em série convergente para valores muito grandes de x ou *nas vizinhanças do infinito*, transforma-se a equação dada fazendo-se:

$$x = 1/z$$

e resolve-se, se possível, a equação resultante, em série, na vizinhança de $z = 0$. (Ver Problemas 9-10).

PROBLEMAS RESOLVIDOS

1) Resolver $2x^2y'' - xy' + (x^2 + 1)y = 0$, em séries.

Substituindo

$$y = A_0x^m + A_1x^{m+1} + A_2x^{m+2} + \cdots\cdots + A_nx^{m+n} + \cdots$$

$$y' = mA_0x^{m-1} + (m+1)A_1x^m + (m+2)A_2x^{m+1} + \cdots\cdots + (m+n)A_nx^{m+n-1} + \cdots$$

$$y'' = (m-1)mA_0x^{m-2} + (m+1)mA_1x^{m-1} + (m+1)(m+2)A_2x^m + \cdots\cdots + (m+n-1)(m+n)A_nx^{m+n-2} + \cdots$$

na equação diferencial dada, temos:

$$(m-1)(2m-1)A_0x^m + m(2m+1)A_1x^{m+1} + [(\{m+2)(2m+1)+1]A_2 + A_0\}x^{m+2} + \cdots\cdots + \{[(m+n)(2m+2n-3)+1]A_n + A_{n-2}\}x^{m+n} + \cdots\cdots = 0.$$

Todos os têrmos, exceto os dois primeiros, anulam-se se $A_2, A_3, \cdots\cdots$ satisfazem à fórmula

$$(1) \qquad A_n = -\frac{1}{(m+n)(2m+2n-3)+1} A_{n-2}, \quad n \geqq 2.$$

As raízes da equação indicadora, $(m-1)(2m-1) = 0$, são $m = \frac{1}{2}$, 1, e, para qualquer dêsses valores, o primeiro têrmo se anula. Como, porém, nenhum dêsses valores de m acarretará a nulidade do segundo têrmo, tomamos $A_1 = 0$. De (1), segue-se que $A_1 = A_3 = A_5 = \cdots\cdots = 0$. Então:

$$\bar{y} = A_0 x^m \left(1 - \frac{1}{(m+2)(2m+1)+1} x^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{[(m+2)(2m+1)+1][(m+4)(2m+5+1)]} x^4 - \cdots\cdots\cdots\right)$$

satisfaz $\quad 2x^2\bar{y}'' - x\bar{y}' + (x^2+1)\bar{y} = (m-1)(2m-1)A_0x^m$

e o segundo membro é nulo quando $m = \frac{1}{2}$ ou $m = 1$.

Quando $m = \frac{1}{2}$ e $A_0 = 1$, temos

$$y_1 = \sqrt{x}\,(1 - x^2/6 + x^4/168 - x^6/11088 + \cdots\cdots\cdots)$$

e quando $m = 1$, com $A_0 = 1$, temos

$$y_2 = x\,(1 - x^2/10 + x^4/360 - x^6/28080 + \cdots\cdots\cdots).$$

A solução geral é:

$$y = Ay_1 + By_2 =$$
$$= A\sqrt{x}\,(1 - x^2/6 + x^4/168 - x^6/11088 + \cdots) +$$
$$+ Bx\,(1 - x^2/10 + x^4/360 - x^6/28080 + \cdots).$$

Como $x = 0$ é o único ponto singular finito, a série converge para todos os valores finitos de x.

2) Resolver $3xy'' + 2y' + x^2y = 0$, em séries.

Substituindo y, y' e y'', como no problema acima, temos

$$m(3m-1)A_0x^{m-1} + (m+1)(3m+2)A_1x^m +$$
$$+ (m+2)(3m+5)A_2x^{m+1} + [(m+3)(3m+8)A_3 + A_0]x^{m+2} +$$
$$+ \cdots\cdots + [(m+n)(3m+3n-1)A_n + A_{n-3}]x^{m+n-1} + \cdots\cdots = 0.$$

Todos os têrmos a partir do 4.°, inclusive, são nulos se $A_3, A_4, \cdots\cdots$ satisfazem à fórmula

$$A_n = -\frac{1}{(m+n)(3m+3n-1)} A_{n-3}, \quad n \geqq 3.$$

As raízes da equação indicadora $m(3m-1)=0$ são $m=0,\ 1/3$. Como nenhuma delas anula o segundo e o terceiro têrmos, tomamos: $A_1=A_2=0$. Então, usando a fórmula de recorrência: $A_1 = A_4 = A_7 = \cdots = 0$ e $A_2 = A_5 = A_8 = \cdots = 0$. Logo, a série:

$$(1) \quad \bar{y} = A_0 x^m \left(1 - \frac{1}{(m+3)(3m+8)} x^3 + \frac{1}{(m+3)(m+6)(3m+8)(3m+17)} x^6 - \cdots\cdots\right)$$

satisfaz
$$3x\bar{y}'' + 2\bar{y}' + x^2\bar{y} = m(3m-1)A_0 x^{m-1}.$$

Para $m=0$, com $A_0=1$, temos, de (1) $y_1 = 1 - x^3/24 + x^6/2448 - \cdots\cdots$ e para $m=1/3$, com $A_0=1$, temos $y_2 = x^{1/3}(1 - x^3/30 + x^6/3420 - \cdots\cdots)$.

A solução geral é:

$$y = Ay_1 + By_2 = A(1 - x^3/24 + x^6/2448 - \cdots\cdots) + Bx^{1/3}(1 - x^3/30 + x^6/3420 - \cdots\cdots).$$

A série converge para x finito.

EQUAÇÃO INDICADORA COM RAÍZES IGUAIS

3) Resolver $xy'' + y' - y = 0$, em séries.

Substituindo y, y' e y'' como nos Problemas 1 e 2 acima, temos:

$$m^2 A_0 x^{m-1} + [(m+1)^2 A_1 - A_0]x^m + [(m+2)^2 A_2 - A_1]x^{m+1} + \cdots\cdots + [(m+n)^2 A_n - A_{n-1}]x^{m+n-1} + \cdots\cdots = 0.$$

Todos os têrmos, exceto o primeiro, anulam-se se $A_1, A_2, \cdots\cdots$ satisfazem à fórmula

$$(1) \qquad A_n = \frac{1}{(m+n)^2} A_{n-1}, \quad n \geqq 1.$$

Então: $$\bar{y} = A_0 x^m \left(1 + \frac{1}{(m+1)^2} x + \frac{1}{(m+1)^2(m+2)^2} x^2 + \frac{1}{(m+1)^2(m+2)^2(m+3)^2} x^3 + \cdots\cdots\right)$$

satisfaz

$$(2) \qquad x\bar{y}'' + \bar{y}' - \bar{y} = m^2 A_0 x^{m-1}.$$

As raízes da equação indicadora são $m = 0,0$. Assim, há apenas uma série satisfazendo (2) com $m = 0$. Entretanto, encarando $\bar{y}$ como uma função das variáveis independentes x e m:

$$\frac{\partial \bar{y}'}{\partial m} = \frac{\partial}{\partial m}\left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial m}\right) = \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial m}\right)'$$

e $$\frac{\partial \bar{y}''}{\partial m} = \frac{\partial}{\partial m}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial m}\left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial m}\right) = \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial m}\right)'',$$

e, derivando (2) parcialmente, em relação a m, temos:

$$(3) \qquad x\left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial m}\right)'' + \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial m}\right)' - \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial m}\right) = 2mA_0x^{m-1} + m^2A_0x^{m-1}\ln x.$$

De (2) e (3) segue-se que $y_1 = \bar{y}\Big|_{m=0}$ e $y_2 = \frac{\partial \bar{y}}{\partial m}\Big|_{m=0}$ são soluções da equação dada. Tomando $A_0 = 1$, encontramos:

$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial m} = x^m \ln x\,[1 + \frac{1}{(m+1)^2}x + \frac{1}{(m+1)^2(m+2)^2}x^2 + \frac{1}{(m+1)^2(m+2)^2(m+3)^2}x^3 + \cdots\cdots] + x^m\,[-\frac{2}{(m+1)^3}x - \left(\frac{2}{(m+1)^3(m+2)^2} + \frac{2}{(m+1)^2(m+2)^3}\right)x^2 - \left(\frac{2}{(m+1)^3(m+2)^2(m+3)^2} + \frac{2}{(m+1)^2(m+2)^3(m+3)^2} + \frac{2}{(m+1)^2(m+2)^2(m+3)^3}\right)x^3 - \cdots\cdots] =$$

$$= \bar{y}\ln x - 2x^m\left[\frac{1}{(m+1)^3}x + \left(\frac{1}{(m+1)^3(m+2)^2} + \frac{1}{(m+1)^2(m+2)^3}\right)x^2 + \left(\frac{1}{(m+1)^3(m+2)^2(m+3)^2} + \frac{1}{(m+1)^2(m+2)^3(m+3)^2} + \frac{1}{(m+1)^2(m+2)^2(m+3)^3}\right)x^3 + \cdots\right].$$

Então: $y_1 = \bar{y}\Big|_{m=0} = 1 + x + \frac{x^2}{(2!)^2} + \frac{x^3}{(3!)^2} + \cdots\cdots,$

$$y^2 = \frac{\partial \bar{y}}{\partial m}\Big|_{m=0} = y_1 \ln x - 2\,[x + \frac{1}{(2!)^2}\left(1 + \frac{1}{2}\right)x^2 + \frac{1}{(3!)^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)x^3 + \cdots\cdots]$$

e a solução geral é:

$$y = Ay_1 + By_2 = (A + B\ln x)\,[1 + x + \frac{1}{(2!)^2}x^2 + \frac{1}{(3!)^2}x^3 + \cdots\cdots) - 2B\,[x + \frac{1}{(2!)^2}\left(1 + \frac{1}{2}\right)x^2 + \frac{1}{(3!)^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)x^3 + \cdots\cdots].$$

A série converge para $x \neq 0$ e finito.

4) Resolver $xy'' + y' + x^2y = 0$, em séries.

Substituindo y, y' e y'', temos:

$$m^2A_0x^{m-1} + (m+1)^2A_1x^m + (m+2)^2A_2x^{m+1} + [(m+3)^2A_3 + A_0]\,x^{m+2} + \cdots\cdots + [(m+n)^2A_n + A_{n-3}]\,x^{m+n-1} + \cdots\cdots = 0.$$

As duas raízes da equação indicadora são iguais. Tomamos $A_0 = 1$, $A_1 = A_2 = 0$ e os A restantes, satisfazendo à fórmula

$$A_n = -\frac{1}{(m+n)^2} A_{n-3}.$$

Então: $A_1 = A_4 = A_7 = \cdots = 0$, $A_2 = A_5 = A_8 = \ldots = 0$,

$$\bar{y} = x^m \left(1 - \frac{1}{(m+3)^2} x^3 + \frac{1}{(m+3)^2 (m+6)^2} x^6 - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{(m+3)^2 (m+6)^2 (m+9)^2} x^9 + \cdots\cdots\cdots \right)$$

e seguindo o processo do Problema 3 acima:

$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial m} = \bar{y} \ln x + 2x^m \left[\frac{1}{(m+3)^3} x^3 - \left(\frac{1}{(m+3)^3 (m+6)^2} + \frac{1}{(m+3)^2 (m+6)^3} \right) x^6 + \right.$$

$$+ \left(\frac{1}{(m+3)^3 (m+6)^2 (m+9)^2} + \frac{1}{(m+3)^2 (m+6)^3 (m+9)^2} + \right.$$

$$\left. \left. + \frac{1}{(m+3)^2 (m+6)^2 (m+9)^3} \right) x^9 - \cdots\cdots \right].$$

Usando a raiz $m = 0$ da equação indicadora

$$y_1 = \bar{y} \Big|_{m=0} = 1 - \frac{1}{3^2} x^3 + \frac{1}{3^4 (2!)^2} x^6 - \frac{1}{3^6 (3!)^2} x^9 + \cdots\cdots\cdots$$

$$\text{e } y_2 = \frac{\partial \bar{y}}{\partial m} \Big|_{m=0} = y_1 \ln x + 2 \left[\frac{1}{3^3} x^3 - \frac{1}{3^5 (2!)^2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) x^6 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{3^7 (3!)^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) x^9 - \cdots\cdots \right].$$

A solução geral é:

$$y = Ay_1 + By_2 = (A + B \ln x) \left[1 - \frac{1}{3^2} x^3 + \frac{1}{3^4 (2!)^2} x^6 - \frac{1}{3^6 (3!)^2} x^9 + \right.$$

$$\left. + \cdots\cdots\cdots \right[+ 2B \left[\frac{1}{3^3} x^3 - \frac{1}{3^5 (2!)^2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) x^6 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{3^7 (3!)^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) x^9 - \cdots\cdots\cdots \right].$$

A série converge para $x \neq 0$ e finito.

EQUAÇÃO INDICADORA COM RAÍZES DIFERINDO POR UM INTEIRO

5) Resolver $xy'' - 3y' + xy = 0$, em séries.

Substituindo y, y' e y'', temos:

$$(m-4)\,mA_0\,x^{m-1} + (m-3)(m+1)\,A_1x^m + \\ + [\,(m-2)(m+2)\,A_2 + A_0]\,x^{m+1} + \cdots\cdots + \\ + [\,(m+n-4)(m+n)\,A_n + A_{n-2}]\,x^{m+n-1} + \cdots\cdots = 0.$$

As raízes da equação indicadora são $m = 0{,}4$ e estamos no segundo caso especial citado acima, porque a diferença entre as duas raízes é um inteiro. Tomamos $A_1 = 0$ e escolhemos os A restantes de acôrdo com a fórmula:

$$A_n = -\frac{1}{(m+n-4)(m+n)}\,A_{n-2}, \quad n \geqq 2.$$

Esta relação dá valores finitos quando $m = 4$, a maior das raízes, porém, quando $m = 0$, $A_4 \to \infty$. Como a raiz $m = 0$ acarreta dificuldades, mudamos A_0 por $B_0\,(m-0) = B_0 m$ e notamos que a série

$$\bar{y} = A_0x^m\,[1 - \frac{1}{(m-2)(m+2)}\,x^2 + \\ + \frac{1}{m\,(m-2)(m+2)(m+4)}\,x^4 - \frac{1}{m\,(m-2)(m+2)^2\,(m+4)(m+6)}\,x^6 + \\ + \frac{1}{m\,(m-2)(m+2)^2\,(m+4)^2\,(m+6)(m+8)}\,x^8 - \cdots\cdots] =$$

$$= B_0x^m\,[m - \frac{m}{(m-2)(m+2)}\,x^2 + \\ + \frac{1}{(m-2)(m+2)(m+4)}\,x^4 - \frac{1}{(m-2)(m+2)^2\,(m+4)(m+6)}\,x^6 + \\ + \frac{1}{(m-2)(m+2)^2\,(m+4)^2\,(m+6)(m+8)}\,x^8 - \cdots\cdots]$$

satisfaz à equação

$$x\bar{y}'' - 3\bar{y}' + x\bar{y} = (m-4)\,mA_0x^{m-1} = (m-4)\,m^2B_0x^{m-1}.$$

Como o segundo membro contém o fator m^2, segue-se, pelo que se viu no Problema 3, que $\bar{y}$ e $\dfrac{\partial \bar{y}}{\partial m}$, com $m = 0$, são soluções da equação diferencial dada. Temos:

$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial m} = \bar{y}\ln x + B_0x^m\,[1 + \frac{m^2+4}{[\,(m-2)(m+2)]^2}\,x^2 - \\ - \frac{1}{(m-2)(m+2)(m+4)}\left(\frac{1}{m-2} + \frac{1}{m+2} + \frac{1}{m+4}\right)x^4 +$$

$$+\frac{1}{(m-2)(m+2)^2(m+4)(m+6)}\left(\frac{1}{m-2}+\frac{2}{m+2}+\frac{1}{m+4}+\frac{1}{m+6}\right)x^6-$$

$$-\frac{1}{(m-2)(m+2)^2(m+4)^2(m+6)(m+8)}\left(\frac{1}{m-2}+\frac{2}{m+2}+\frac{2}{m+4}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{m+6}+\frac{1}{m+8}\right)x^8+\cdots\cdots],$$

Empregando a raiz $m=0$, com $B_0=1$, temos:

$$y_1=\bar{y}\Big|_{m=0}=-\frac{1}{2\cdot 2\cdot 4}x^4+\frac{1}{2\cdot 2^2\cdot 4\cdot 6}x^6-\frac{1}{2\cdot 2^2\cdot 4^2\cdot 6\cdot 8}x^8+\cdots\cdots\cdots$$

e

$$y_2=\frac{\partial\bar{y}}{\partial m}\Big|_{m=0}=y_1\ln x+1+\frac{1}{2^2}x^2+\frac{1}{2^5\,2!}x^4-\frac{1}{2^6\,3!\,1!}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)x^6+$$

$$+\frac{1}{2^8\,4!\,2!}\left[\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}\right]x^8-$$

$$+\frac{1}{2^{10}\,5!\,3!}\left[\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\right]x^{10}+\cdots.$$

A solução geral é:

$$=Ay_1+By_2=$$

$$=(A+B\ln x)\left\{-\frac{1}{2^3\,2!}x^4+\frac{1}{2^5\,3!\,1!}x^6-\frac{1}{2^7\,4!\,2!}x^8+\cdots\cdots\right\}+$$

$$+B\left\{1+\frac{1}{2^2}x^2+\frac{1}{2^5\,2!}x^4-\frac{1}{2^6\,3!\,1!}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)x^6+\right.$$

$$+\frac{1}{2^8\,4!\,2!}\left[\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}\right]x^8-$$

$$\left.-\frac{1}{2^{10}\,5!\,3!}\left[\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\right]x^{10}+\cdots\cdots\right\}$$

A série converge para $x\neq 0$ e finito.

6) Resolver $(x-x^2)y''-3y'+2y=0$, em séries.

Substituindo y, y' e y'', temos:

$$(m-4)mA_0x^{m-1}+[(m-3)(m+1)A_1-(m-2)(m+1)A_0]x^m+$$
$$+[(m-2)(m+2)A_2-(m-1)(m+2)A_1]x^{m+1}+\cdots\cdots+$$
$$+[(m+n-4)(m+n)A_n-(m+n-3)(m+n)A_{n-1}]x^{m+n-1}+\cdots\cdots=0.$$

A fórmula de recorrência é $A_n=\dfrac{m+n-3}{m+n-4}A_{n-1}$ de modo que:

$$(1) \qquad \bar{y} = A_0 x^m [1 + \frac{m-2}{m-3}x + \frac{m-1}{m-3}x^2 + \frac{m}{m-3}x^3 + $$
$$+ \frac{m+1}{m-3}x^4 + \frac{m+2}{m-3}x^5 + \frac{m+3}{m-3}x^6 + \cdots\cdots]$$

satisfaz à equação diferencial:

$$(x - x^2)\bar{y}'' - 3\bar{y}' + 2\bar{y} = (m-4)\,mA_0x^{m-1}.$$

As raízes $m = 0 - 4$ da equação indicadora diferem por um inteiro. Entretanto, quando $m = 0$ o denominador do coeficiente de x^4 não se anula, como se esperava, porque o fator m, aparecendo tanto no numerador como no denominador, é cancelado. Note-se que o coeficiente de x^3 é nulo para $m = 0$.

Então, com $A_0 = 1$,

$$y_1 = \bar{y}\Big|_{m=0} = 1 + 2x/3 + x^2/3 + 0 - x^4/3 - 2x^5/3 - 3x^6/3 - 4x^7/3 - \cdots\cdots$$

e $$y_2 = \bar{y}\Big|_{m=4} = x^4(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots\cdots)$$

de modo que $y_1 = (1 + 2x/3 + x^2/3) - y_2/3$.

A solução geral é

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 = C_1(1 + 2x/3 + x^2/3) + (C_2 - C_1/3)\,y_2 =$$
$$= A(x^2 + 2x + 3) + Bx^4(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots\cdots) =$$
$$= A(x^2 + 2x + 3) + B\frac{x^4}{(1-x)^2}.$$

Existem pontos singulares finitos em $x = 0$ e $x = 1$. A série converge para $|x| < 1$.

7) Resolver $xy'' + (x-1)y' - y = 0$, em séries.

Substituindo y, y' e y'', temos:

$$(m-2)mA_0x^{m-1} + [(m-1)(m+1)A_1 + (m-1)A_0]x^m +$$
$$+ [m(m+2)A_2 + mA_1]x^{m+1} + \cdots\cdots +$$
$$+ [(m+n-2)(m+n)A_n + (m+n-2)A_{n-1}]x^{m+n-1} + \cdots\cdots = 0.$$

As raízes da equação indicadora são $m = 0 - 2$ que diferem por um inteiro. Escolhemos os A de acôrdo com a fórmula

$$A_n = -\frac{m+n-2}{(m+n-2)(m+n)}A_{n-1} = -\frac{1}{m+n}A_{n-1}.$$

Vemos que nenhum $A_i \to \infty$ para $m=0$, que é a menor raiz, como no Problema 5. Isto, naturalmente, é devido ao fato de se ter cancelado o fator $m + n - 2$.

Então, como

$$\bar{y} = A_0 x^m \left[1 - \frac{1}{m+1} x + \frac{1}{(m+1)(m+2)} x^2 - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{(m+1)(m+2)(m+3)} x^3 + \cdots\cdots\right]$$

satisfaz a

$$x\bar{y}'' + (x-1)\bar{y}' - \bar{y} = (m-2)\, m A_0 x^{m-1},$$

temos, com $A_0 = 1$ e $m = 0$, $m = 2$, respectivamente,

$$y_1 = \bar{y}\Big|_{m=0} = 1 - x + x^2/2! - x^3/3! + \cdots\cdots\cdots = e^{-x}$$

e $\quad y_2 = \bar{y}\Big|_{m=2} = x^2 - 2x^3/3! + 2x^4/4! - 2x^5/5! + \cdots\cdots\cdots = 2\,(e^{-x} + x - 1).$

A solução geral é $y = C_1 e^{-x} + C_2 [2(e^{-x} + x - 1)] = Ae^{-x} + B(1-x)$, convergente para todos os valores finitos de x.

INTEGRAL PARTICULAR

8) Resolver $(x^2 - x)y'' + 3y' - 2y = x + 3/x^2$ na vizinhança de $x + 0$.

Substituindo y, y' e y'' como no Problema 6, temos a condição

(1) $\quad m(4-m) A_0 x^{m-1} + [(m+1)(3-m)A_1 + $
$+ (m+1)(m-2)A_0] x^m + \cdots\cdots\cdots + [(m+n)(4-m-n)A_n +$
$+ (m+n)(m+n-3)A_{n-1}] x^{m+n-1} + \cdots\cdots\cdots = x + 3/x^2.$

Para achar a função complementar, anulamos o primeiro membro de (1) e procedemos como antes.

A fórmula de recorrência é $A_n = \dfrac{m+n-3}{m+n-4} A_{n-1}$ e, então,

$$\bar{y} = A_0 x^m \left(1 + \frac{m-2}{m-3} x + \frac{m-1}{m-3} x^2 + \frac{m}{m-3} x^3 + \frac{m+1}{m-3} x^4 + \cdots\cdots\cdots\right)$$

satisfaz a

(2) $$(x^2 - x)\bar{y}'' + 3\bar{y}' - 2\bar{y} = m(4-m) A_0 x^{m-1}.$$

O segundo membro de (2) será 0 quando $m = 0 - 4$. Para $m = 0$ com $A_0 = 1$, temos

$$y_1 = 1 + 2x/3 + x^2/3 - x^4/3 - 2x^5/3 - 3x^6/3 - 4x^7/3 - \cdots\cdots\cdots\cdots$$

e para $m = 4$ com $A_0 = 1$, temos

$$y_2 = x^4(1 + 2x + 3x^2 = 4x^3 + 5x^4 + \cdots\cdots\cdots\cdots).$$

Então $y_1 = (1 + 2x/3 + x^2/3) - y_2/3$ e (ver Problema 6) a função complementar é

$$y = A(x^2 + 2x + 3) + Bx^4/(1-x)^2 .$$

Para achar uma integral particular, consideramos os têrmos do segundo membro da equação diferencial dada, separadamente. Fazendo o segundo membro de (2) idêntico a x, isto é,

$$m(4-m) A_0 x^{m-1} \equiv x,$$

temos $m = 2$ e $A_0 = \frac{1}{4}$. Para $m = 2$, a fórmula de recorrência é $A_n = \dfrac{n-1}{n-2} A_{n-1}$; então: $A_1 = A_2 = A_3 = \cdots\cdots = 0$. A integral particular correspondente ao têrmo x é $x^2/4$.

Outra vez, fazendo o segundo membro de (2) idêntico a $3/x^2$, isto é,

$$m(4-m) A_0 x^{m-1} \equiv 3/x^2 ,$$

temos $m = -1$ e $A_0 = -3/5$. Para $m = -1$, $A_n = \dfrac{n-4}{n-5} A_{n-1}$; então: $A_1 = \dfrac{3}{4} A_0$, $A_2 = \dfrac{1}{2} A_0$, $A_3 = \dfrac{1}{4} A_0$, $A_4 = A_5 = A_6 = \cdots\cdots = 0$. A integral particular correspondente ao têrmo $3/x^2$ é:

$$-\frac{3}{5} x^{-1} \left(1 + \frac{3}{4} x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{4} x^3\right).$$

A solução geral procurada é:

$$y = A(x^2 + 2x + 3) + \frac{Bx^4}{(1-x)^2} - \frac{3}{5x} - \frac{9}{20} - \frac{3}{10} x + \frac{1}{10} x^2 =$$

$$= C(x^2 + 2x + 3) + \frac{Bx^4}{(1-x)^2} + \frac{1}{4} x^2 - \frac{3}{5x}.$$

Nota. Uma verificação parcial do trabalho pode ser feita, mostrando que a integral particular $y = x^2/4 - 3/5x$ satisfaz à equação diferencial.

Como $x = 1$ é ponto singular finito, a série converge na região anular limitada por um círculo, de raio arbitràriamente pequeno, e por um círculo de raio unitário, ambos com centro em $x = 0$.

DESENVOLVIMENTO PARA VALORES INFINITOS DE x

9) Resolver $2x^2(x-1)y'' + x(3x+1)y' - 2y = 0$ em série convergente na vizinhança de $x = \infty$.

A substituição

$$x = \frac{1}{z}, \quad y' = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dz} = -z^2\frac{dy}{dz},$$

$$y'' = \frac{2}{x^3}\frac{dy}{dz} + \frac{1}{x^4}\frac{d^2y}{dz^2} = z^4\frac{d^2y}{dz^2} + 2z^3\frac{dy}{dz}$$

transforma a equação dada em

$$2(z-z^2)\frac{d^2y}{dz^2}+(1-5z)\frac{dy}{az}-2y=0$$

em que $z=0$, correspondente a $x=\infty$, é um ponto singular regular. Supondo que a solução é:

$$y=A_0z^m+A_1z^{m+1}+A_2z^{m+2}+\cdots\cdots+A_nz^{m+n}+\cdots\cdots$$

obtemos a condição:

$$m(2m-1)A_0z^{m-1}+\left\{(m+1)(2m+1)A_1-(2m^2+3m+2)A_0\right\}z^m+$$
$$+\cdots\cdots\cdots+\left\{(m+n)(2m+2n-1)A_n-\right.$$
$$\left.-[2(m+n)^2-(m+n)+1]A_{n-1}\right\}z^{m+n-1}+\cdots=0.$$

A fórmula de recorrência é $A_n=\dfrac{2(m+n)^2-(m+n)+1}{(m+n)(2m+2n-1)}A_{n-1}$ e a série

$$\bar{y}=A_0z^m\left(1+\frac{2m^2+3m+2}{(m+1)(2m+1)}z+\right.$$
$$\left.+\frac{2m^2+3m+2}{(m+1)(2m+1)}\cdot\frac{2m^2+7m+7}{(m+2)(2m+3)}z^2+\cdots\cdots\right)$$

satisfaz a

$$2(z-z^2)\frac{d^2\bar{y}}{dz^2}+(1-5z)\frac{d\bar{y}}{dz}-2\bar{y}=m(2m-1)A_0z^{m-1}.$$

Para $m=0$, com $A_0=1$, temos:

$$y_1=1+2z+7z^2/3+112z^3/45+\cdots\cdots=$$
$$=1+\frac{2}{x}+\frac{7}{3x^2}+\frac{112}{45x^3}+\cdots\cdots$$

e para $m=\frac{1}{2}$, com $A_0=1$, temos:

$$y_2=z^{\frac{1}{2}}(1+4z/3+22z^2/15+484z^3/315+\cdots\cdots)=$$
$$=x^{-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{4}{3x}+\frac{22}{15x^2}+\frac{484}{315x^3}+\cdots\cdots\right).$$

A solução geral é:

$$y=Ay_1+By_2=A\left(1+\frac{2}{x}+\frac{7}{3x^2}+\frac{112}{45x^3}+\cdots\right)+$$
$$+Bx^{-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{4}{3x}+\frac{22}{15x^2}+\frac{484}{315x^3}+\cdots\right).$$

A série em z converge para $|z|\angle 1$, isto é, para z dentro de um círculo de raio 1, de centro em $z=0$. A série em x converge para $|x|>1$, isto é, para x fora de um círculo de raio 1, de centro em $x=0$.

10) Resolver $x^3y'' + x(1-x)y' + y = 0$ em série convergente na vizinhança de $x = \infty$.

Fazendo $x = 1/z$ como no Problema 9, temos:

$$z\frac{d^2y}{dz^2} + (3-z)\frac{dy}{dz} + y = 0 \tag{1}$$

em que $z = 0$ é um ponto singular regular. Supomos, agora, que a solução seja:

$$y = A_0z^m + A_1z^{m+1} + A_2z^{m+2} + \cdots\cdots + A_nz^{m+n} + \cdots\cdots,$$

substituímos em (1) e obtemos:

$$m(m+2)A_0z^{m-1} + [(m+1)(m+3)A_1 - (m-1)A_0]z^m + \\ + [(m+2)(m+4)A_2 - mA_1]z^{m+1} + \cdots\cdots + \\ + [(m+n)(m+n+2)A_n - (m+n-2)A_{n-1}]z^{m+n-1} + \cdots\cdots = 0.$$

As raízes da equação indicadora são $m = 0, -2$ e diferem por um inteiro. Da fórmula de recorrência $A_n = \dfrac{m+n-2}{(m+n)(m+n+2)}A_{n-1}$ vê-se que $A_2 \to \infty$ quando $m = -2$. Substituímos A_0 por $B_0(m+2)$ e notamos que a série

$$\bar{y} = B_0z^m\Big[(m+2) + \frac{(m-1)(m+2)}{(m+1)(m+3)}z + \\ + \frac{(m-1)m}{(m+1)(m+3)(m+4)}z^2 + \frac{(m-1)m}{(m+3)^2(m+4)(m+5)}z^3 + \\ + \frac{(m-1)m(m+2)}{(m+3)^2(m+4)^2(m+5)(m+6)}z^4 + \cdots\cdots\Big]$$

satisfaz à equação

$$z\frac{d^2\bar{y}}{dz^2} + (3-z)\frac{d\bar{y}}{dz} + \bar{y} = B_0m(m+2)^2z^{m-1}.$$

Assim,

$$\frac{\partial\bar{y}}{\partial m} = \bar{y}\ln z + B_0z^m\Big\{1 + \\ + \left[\frac{2m+1}{(m+1)(m+3)} - \frac{(m-1)(m+2)}{(m+1)(m+3)}\left(\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+3}\right)\right]z + \\ + \left[\frac{2m-1}{(m+1)(m+3)(m+4)} - \frac{(m-1)m}{(m+1)(m+3)(m+4)}\left(\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+3} + \frac{1}{m+4}\right)\right]z^2 + \\ + \left[\frac{2m-1}{(m+3)^2(m+4)(m+5)} - \frac{(m-1)m}{(m+3)^2(m+4)(m+5)}\left(\frac{2}{m+3} + \frac{1}{m+4} + \frac{1}{m+5}\right)\right]z^3 + \\ + \left[\frac{3m^2+2m-2}{(m+3)^2(m+4)^2(m+5)(m+6)} - \\ - \frac{(m-1)m(m+2)}{(m+3)^2(m+4)^2(m+5)(m+6)}\left(\frac{2}{m+3} + \frac{2}{m+4} + \frac{1}{m+5} + \frac{1}{m+6}\right)\right]z^4 + \\ + \cdots\cdots\Big\}$$

também satisfaz à equação.

Com $m = -2$ e $B_0 = 1$, temos:

$$y_1 = \bar{y}\Big|_{m=-2} = z^{-2}(-3z^2 + z^3) = \frac{1}{x} - 3 \quad \text{e}$$

$$y_2 = \frac{\partial \bar{y}}{\partial m}\Big|_{m=-2} = y_1 \ln z + z^{-2}(1 + 3z + 4z^2 - 11z^3/3 + z^4/8 + \cdots\cdots) =$$
$$= y_1 \ln \frac{1}{x} + x^2 + 3x + 4 - 11/3x + 1/8x^2 + \cdots\cdots\cdots\cdots$$

A solução geral é:

$$y = Ay_1 + By_2 = \left(A + B \ln \frac{1}{x}\right)(1/x - 3) +$$
$$+ B(x^2 + 3x + 4 - 11/3x + 1/8x^2 + \cdots\cdots\cdots).$$

A série converge para os valores de $x \neq 0$.

PROBLEMAS PROPOSTOS

Resolver em séries nas vizinhanças de $x = 0$:

11) $2(x^2 + x^3)y'' - (x - 3x^2)y' + y = 0.$

$A_n = -A_{n-1}$

Resp.: $y = (A\sqrt{x} + Bx)(1 - x + x^2 - x^3 + \cdots\cdots)$. Converge para $|x| < 1$.

12) $4xy'' + 2(1 - x)y' - y = 0.$

$$A_n = \frac{1}{2(m+n)} A_{n-1}$$

Resp.: $$y = A\left(1 + \frac{x}{2\cdot 1!} + \frac{x^2}{2^2\cdot 2!} + \frac{x^3}{2^3\cdot 3!} + \cdots\right) + B\sqrt{x}\left(1 + \frac{x}{1\cdot 3} + \frac{x^2}{1\cdot 3\cdot 5} + \frac{x^3}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7} + \cdots\right).$$

Converge para todos os valores finitos de x.

13) $2x^2y'' - xy' + (1 - x^2)y = 0.$

$$A_n = \frac{1}{(m+n-1)(2m+2n-1)} A_{n-2}, \quad n \text{ par}; \quad A_n = 0, \quad n \text{ ímpar}.$$

Resp.: $$y = Ax\left(1 + \frac{x^2}{2\cdot 5} + \frac{x^4}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 9} + \frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 5\cdot 9\cdot 13} + \cdots\cdots\cdots\right) + B\sqrt{x}\left(1 + \frac{x^2}{2\cdot 3} + \frac{x^4}{2\cdot 4\cdot 3\cdot 7} + \frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 3\cdot 7\cdot 11} + \cdots\cdots\cdots\right).$$

Converge para todos os valores finitos de x.

14) $xy'' + y' + xy = 0.$

$A_n = -\dfrac{1}{(m+n)^2} A_{n-2}$, n par; $A_n = 0$, n ímpar.

Resp.: $y = (A + B \ln x)\left(1 - \dfrac{x^2}{2^2} + \dfrac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \dfrac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \cdots\cdots\cdots\right) +$

$$+ B\left[\frac{x^2}{2^2} - \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) \quad \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \cdots\cdots\cdots\right].$$

Converge para todo valor finito de $x \neq 0$.

15) $x^2y'' - xy' + (x^2 + 1)y = 0.$

$A_n = -\dfrac{1}{(m+n-1)^2} A_{n-2}$, n par; $A_n = 0$, n ímpar.

Resp.: $y = (A + B \ln x)\, x \left(1 - \dfrac{x^2}{2^2} + \dfrac{x^4}{2^4\,(2\,!)^2} - \dfrac{x^6}{2^6\,(3\,!)^2} + \cdots\cdots\cdots\right) +$

$$+ Bx\left[\frac{x^2}{2^2} - \frac{x^4}{2^4 (2!)^2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{x^6}{2^6 (3!)^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \cdots\cdots\cdots\right].$$

Converge para todo valor finito de $x \neq 0$.

16) $xy'' - 2y' + y = 0.$ $\quad A_n = -\dfrac{1}{(m+n-3)(m+n)} A_{n-1}$

Resp.: $y = (A + B \ln x)\left(-\dfrac{x^3}{12} + \dfrac{x^4}{48} - \dfrac{x^5}{480} + \cdots\right) +$

$$+ B\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{36} - \frac{19x^4}{576} + \frac{137x^5}{28800} - \cdots\right).$$

Converge para todo valor finito de $x \neq 0$.

17) $xy'' + 2y' + xy = 0.$

$A_n = -\dfrac{1}{(m+n)(m+n+1)} A_{n-2}$, n par; $A_n = 0$, n ímpar.

Resp.: $y = Ax^{-1}\left(1 - \dfrac{x^2}{2\,!} + \dfrac{x^4}{4\,!} - \cdots\cdots\right) + B\left(1 - \dfrac{x^2}{3\,!} + \dfrac{x^4}{5\,!} - \cdots\cdots\right).$

Converge para todo valor finito de $x \neq 0$.

18) $x^2(x+1)y'' + x(x+1)y' - y = 0.$

Pontos singulares: $x = 0, -1.$ $\quad A_n = -\dfrac{m+n-1}{m+n+1} A_{n-1}.$

Resp.: $y = Ax\,(1 - x/3 + x^2/6 - x^3/10 + \cdots\cdots) + Bx^{-1}(1 + x).$

Converge numa região anular limitada por um círculo de raio arbitràriamente pequeno e por um círculo de raio 1 (um), ambos com centro em $x = 0$.

19) $2xy'' + y' - y = x + 1.$ $\quad A_n = \dfrac{1}{(m+n)(2m+2n-1)} A_{n-1}$

Resp.: $y = A(1 + x + x^2/6 + x^3/90 + \cdots\cdots) +$
$+ B\sqrt{x}(1 + x/3 + x^2/30 + x^3/630 + \cdots\cdots\cdots) +$
$+ \dfrac{1}{6}x^2(1 + x/15 + x^2/420 + x^3/18900 + \cdots\cdots\cdots) - 1.$

Converge para qualquer valor finito de x.

Resolver em séries nas vizinhanças de $x = \infty$.

20) $2x^3y'' + x^2y' + y = 0.$ $\quad A_n = -\dfrac{1}{(m+n)(2m+2n+1)} A_{n-1}$

Resp.: $y = A\left(1 - \dfrac{1}{3x} + \dfrac{1}{30x^2} - \dfrac{1}{630x^3} + \cdots\cdots\right) +$
$+ B\sqrt{x}\left(1 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{6x^2} - \dfrac{1}{90x^3} + \cdots\cdots\right).$

Converge para todo valor finito de $x \neq 0$.

21) $x^3y'' + (x^2 + x)y' - y = 0.$ $\quad A_n = \dfrac{1}{m+n} A_{n-1}$

Resp.: $y = \left(A + B\ln\dfrac{1}{x}\right)\left(1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2x^2} + \dfrac{1}{6x^3} + \cdots\right) +$
$+ B\left[\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2x^2}\left(1 + \dfrac{1}{2}\right) + \dfrac{1}{6x^3}\left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}\right) + \cdots\right].$

Converge para todo valor finito de $x \neq 0$.

CAPÍTULO XXVII

EQUAÇÕES DE LEGENDRE, BESSEL E GAUSS

As três equações diferenciais que serão consideradas aqui são resolvidas pelos métodos estudados no Capítulo anterior. As duas primeiras têm aplicações importantes na Física. Tôdas as três apresentam várias propriedades interessantes.

EQUAÇÃO DE LEGENDRE

$$(1-x^2)y''-2xy'+p(p+1)y=0.$$

Uma solução desta equação, em série convergente na vizinhança de $x=0$, ponto ordinário, foi visto no Problema 16, Capítulo XXV. Sob certas condições de p, que serão estabelecidas mais tarde, podemos obter a solução convergente na vizinhança de $x=\infty$. Fazendo $x=1/z$ (ver Capítulo XXVI) a equação transforma-se em:

$$(z^4-z^2)\frac{d^2y}{dz^2}+2z^3\frac{dy}{dz}+p(p+1)y=0$$

para a qual $z=0$ é um ponto singular regular.

Fazendo: $y=A_0z^m+A_1z^{m+1}+A_2z^{m+2}+\cdots\cdots+A_nz^{m+n}+\cdots\cdots$, temos:

$$\Big\{-m(m-1)+p(p+1)\Big\}A_0z^m+\Big\{-m(m+1)+p(p+1)\Big\}A_1z^{m+1}+$$
$$+\Big\{[-(m+1)(m+2)+p(p+1)]A_2+m(m+1)A_0\Big\}z^{m+2}+\cdots\cdots+$$
$$+\Big\{[-(m+n)(m+n-1)+p(p+1)]A_n+(m+n-2)(m+n-1)A_{n-2}\Big\}z^{m+n}+$$
$$+\cdots\cdots=0.$$

Tomamos $A_1=0$ e $A_n=\dfrac{(m+n-2)(m+n-1)}{(m+n)(m+n-1)-p(p+1)}A_{n-2}$ e vemos que

$$\bar{y}=A_0z^m[1+\frac{m(m+1)}{(m+1)(m+2)-p(p+1)}z^2+$$
$$+\frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{[(m+1)(m+2)-p(p+1)][(m+3)(m+4)-p(p+1)]}z^4+$$
$$+\frac{m(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)}{[(m+1)(m+2)-p(p+1)][(m+3)(m+4)-p(p+1)][(m+5)(m+6)-p(p+1)]}z^6+\cdots\cdots]$$

satisfaz à equação:

$$(z^4 - z^2)\frac{d^2y}{dz^2} + 2z^3\frac{d\bar{y}}{dz} + p(p+1)\bar{y} =$$

$$= [-m(m-1) + p(p+1)]A_0z^m = (m+p)(-m+p+1)A_0z^m.$$

Para $m = -p$ com $A_0 = 1$, obtemos

$$(1) \quad y_1 = z^{-p}[1 - \frac{p(p-1)}{2(2p-1)}z^2 + \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{2\cdot 4(2p-1)(2p-3)}z^4 - \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)(p-5)}{2\cdot 4\cdot 6(2p-1)(2p-3)(2p-5)}z^6 + \cdots\cdots] =$$

$$= x^p[1 - \frac{p(p-1)}{2(2p-1)}x^{-2} + \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{2\cdot 4(2p-1)(2p-3)}x^{-4} - \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)(p-5)}{2\cdot 4\cdot 6(2p-1)(2p-3)(2p-5)}x^{-6} + \cdots\cdots].$$

Para $m = p + 1$ com $A_0 = 1$, obtemos

$$(2) \quad y_2 = z^{p+1}[1 + \frac{(p+1)(p+2)}{2(2p+3)}z^2 + \frac{(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)}{2\cdot 4(2p+3)(2p+5)}z^4 + \frac{(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)(p+5)(p+6)}{2\cdot 4\cdot 6(2p+3)(2p+5)(2p+7)}z^6 + \cdots\cdots] =$$

$$= x^{-p-1}[1 + \frac{(p+1)(p+2)}{2(2p+3)}x^{-2} + \frac{(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)}{2\cdot 4(2p+3)(2p+5)}x^{-4} + \frac{(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)(p+5)(p+6)}{2\cdot 4\cdot 6(2p+3)(2p+5)(2p+7)}x^{-6} + \cdots\cdots].$$

Então: $$y = Ay_1 + By_2$$

e a solução geral, convergente para $|x| > 1$, desde que

$$p \neq 1/2,\ 3/2,\ 5/2,\ \cdots\cdots \quad \text{ou} \quad p \neq -3/2,\ -5/2,\ \cdots\cdots.$$

Suponhamos que seja um inteiro positivo, incluindo 0, e consideremos a solução y_1, que é um polinômio, como $u_p(x)$. Fazendo $p = 0, 1, 2, 3, \cdots$ em (1), temos

$$u_0(x) = 1,\ u_1(x) = x,\ u_2(x) = x^2 - 1/3,\ u_3(x) = x^3 - 3x/5,\ \cdots\cdots,$$

$$u_k(x) = \sum_{n=0}^{\left[\frac{1}{2}k\right]} (-1)^n \frac{k(k-1)\cdots\cdots(k-2n+1)}{2^n n!(2k-1)\cdots\cdots(2k-2n+1)} x^{k-2n},\ \cdots\cdots,$$

onde $\left[\frac{1}{2}k\right]$ indica o maior inteiro $\leq \frac{1}{2}k$ (i. e., $\left[\frac{1}{2}k\right] = 3$ se $k = 7$, $\left[\frac{1}{2}k\right] = 4$ se $k = 8$).

Os polinômios definidos por

$$(3)\quad P_p(x) = \frac{(2p)!}{2^p (p!)^2} u_p(x) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots (2p-1)}{p!} u_p(x),\ p = 0, 1, 2, \cdots\cdots,$$

são chamados polinômios de Legendre. Os primeiros dêles são:

$$P_0(x) = u_0(x) = 1,$$

$$P_1(x) = u_1(x) = x,$$

$$P_2(x) = \frac{1\cdot 3}{2!} u_2(x) = \frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{2},$$

$$P_3(x) = \frac{1\cdot 3\cdot 5}{3!} u_3(x) = \frac{5}{2} x^3 - \frac{3}{2} x,$$

$$P_4(x) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{4!} u_4(x) = \frac{5\cdot 7}{2\cdot 4} x^4 - 2\frac{3\cdot 5}{2\cdot 4} x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4},$$

$$P_5(x) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{5!} u_5(x) = \frac{7\cdot 9}{2\cdot 4} x^5 - 2\frac{5\cdot 7}{2\cdot 4} x^3 + \frac{3\cdot 5}{2\cdot 4} x,$$

$$P_6(x) = \frac{1\cdot 3\cdots 11}{6!} u_6(x) = \frac{7\cdot 9\cdot 11}{2\cdot 4\cdot 6} x^6 - 3\frac{5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6} x^4 + 3\frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6} x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6},$$

$$P_7(x) = \frac{1\cdot 3\cdots 13}{7!} u_7(x) = \frac{9\cdot 11\cdot 13}{2\cdot 4\cdot 6} x^7 - 3\frac{7\cdot 9\cdot 11}{2\cdot 4\cdot 6} x^5 + 3\frac{5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6} x^3 - \frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6} x. \quad \text{etc.}$$

Está claro, de (3), que $P_p(x)$ é uma solução particular de Legendre: $(1 - x^2) y'' - 2xy' + p(p+1) = 0$. (Ver Problemas 1-6).

EQUAÇÃO DE BESSEL

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - k^2) y = 0.$$

É evidente que $x = 0$ é um ponto singular regular. Para obter a solução em série, convergente, na vizinhança de $x = 0$, substituímos

$$y = A_0 x^m + A_1 x^{m+1} + A_2 x^{m+2} + \cdots\cdots + A_n x^{m+n} + \cdots\cdots$$

e obtemos

$$(m^2 - k^2) A_0 x^m + \left\{(m+1)^2 - k^2\right\} A_1 x^{m+1} + \left\{[(m+2)^2 - k^2] A_2 + A_0\right\} x^{m+2} +$$
$$+ \cdots\cdots\cdots + \left\{[(m+n)^2 - k^2] A_n + A_{n-2}\right\} x^{m+n} + \cdots\cdots = 0.$$

Tomamos $A_1 = 0$ e $A_n = -\dfrac{1}{(m+n)^2 - k^2} A_{n-2}$ e vemos que

$$\bar{y} = A_0 x^m \left\{1 - \frac{1}{(m+2)^2 - k^2} x^2 + \frac{1}{[(m+2)^2 - k^2][(m+4)^2 - k^2]} x^4 - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{[(m+2)^2 - k^2][(m+4)^2 - k^2][(m+6)^2 - k^2]} x^6 + \cdots\cdots\cdots \right\}$$

satisfaz à equação

$$x^2 \bar{y}'' + x\bar{y}' + (x^2 - k^2)\bar{y} = (m^2 - k^2) A_0 x^m.$$

Para $m = k$ com $A_0 = 1$, temos:

$$y_1 = x^k \left\{1 - \frac{1}{4(k+1)} x^2 + \frac{1}{4^2 \cdot 2!(k+1)(k+2)} x^4 - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{4^3 \cdot 3!(k+1)(k+2)(k+3)} x^6 + \cdots\cdots \right\}$$

e para $m = -k$ com $A_0 = 1$, temos:

$$y_2 = x^{-k} \left\{1 - \frac{1}{4(1-k)} x^2 + \frac{1}{4^2 \cdot 2!(1-k)(2-k)} x^4 - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{4^3 \cdot 3!(1-k)(2-k)(3-k)} x^6 + \cdots\cdots \right\}.$$

Note que $y^2 = y_1$ se $k = 0$, y_1 não tem significado se k fôr um inteiro negativo e y_2 não tem significado se k fôr um inteiro positivo. Exceto nestes casos, a solução geral da equação de Bessel é $y = Ay_1 + By_2$, convergente para $x \neq 0$.

As funções de Bessel, de primeira espécie, são definidas por:

$$J_k(x) = \frac{1}{2^k \cdot k!} y_1 = \left(\frac{x}{2}\right)^k \left\{\frac{1}{k!} - \frac{1}{1!(k+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2!(k+2)!}\left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1}{3!(k+3)!}\left(\frac{x}{2}\right)^6 + \cdots \right\},$$

$J_{-k}(x) = (-1)^k J_k(x)$, onde k é um inteiro positivo, incluindo 0.

As funções

$$J_0(x) = 1 - \frac{1}{(1!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1}{(3!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^6 + \cdots\cdots$$

e

$$J_1(x) = \left(\frac{x}{2}\right)\left\{1 - \frac{1}{1!\,2!}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2!\,3!}\left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1}{3!\,4!}\left(\frac{x}{2}\right)^6 + \cdots\cdots\right\}$$

são as mais freqüentemente empregadas.

(Ver Problemas 7-10).

EQUAÇÃO DE GAUSS

$$(x - x^2)y'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]y' - \alpha\beta y = 0.$$

Para obter a solução em série convergente, na vizinhança de $x = 0$, substituímos

$$y = A_0 x^m + A_1 x^{m+1} + A_2 x^{m+2} + \cdots\cdots + A_n x^{m+n} + \cdots\cdots$$

e obtemos

$$m(m + \gamma - 1) A_0 x^{m-1} + \left\{(m+1)(m+\gamma) A_1 - [m(m+\alpha+\beta) + \alpha\beta] A_0\right\} x^m +$$
$$+ \cdots\cdots + \left\{(m+n)(m+n+\gamma-1) A_n - \right.$$
$$\left. - [(m+n-1)(m+n+\alpha+\beta-1) + \alpha\beta] A_{n-1}\right\} x^{m+n-1} + \cdots\cdots = 0.$$

Tomamos $A_n = \dfrac{(m+n-1)(m+n+\alpha+\beta-1)+\alpha\beta}{(m+n)(m+n+\gamma-1)} A_{n-1}$ e vemos que

$$\bar{y} = A_0 x^m \,[1 + \frac{m(m+\alpha+\beta)+\alpha\beta}{(m+1((m+\gamma)} x +$$

$$+ \frac{m(m+\alpha+\beta)+\alpha\beta}{(m+1)(m+\gamma)} \cdot \frac{(m+1)(m+\alpha+\beta+1)+\alpha\beta}{(m+2)(m+\gamma+1)} x^2 +$$

$$+ \frac{m(m+\alpha+\beta)+\alpha\beta}{(m+1)(m+\gamma)} \cdot \frac{(m+1)(m+\alpha+\beta+1)+\alpha\beta}{(m+2)(m+\gamma+1)} \cdot \frac{(m+2)(m+\alpha+\beta+2)+\alpha\beta}{(m+3)(m+\gamma+2)} x^3 +$$

$$+ \cdots\cdots]$$

satisfaz à equação

$$(x - x^2)\,y'' + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]\,\bar{y}' - \alpha\beta\,\bar{y} = m(m+\gamma-1)A_0 x^{m-1}.$$

Para $m = 0$, com $A_0 = 1$, obtemos:

$$y_1 = 1 + \frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma(\gamma+1)} x^2 +$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\,\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} x^3 + \cdots\cdots,$$

para $m = 1-\gamma$. $\gamma \neq 1$, com $A_0 = 1$, obtemos:

$$y_2 = x^{1-\gamma}\,[1 + \frac{(\alpha-\gamma+1)(\beta-\gamma+1)}{1\,(2-\gamma)} x +$$

$$+ \frac{(\alpha-\gamma+1)(\alpha-\gamma+2)(\beta-\gamma+1)(\beta-\gamma+2)}{1\cdot 2\,(2-\gamma)(3-\gamma)} x^2 +$$

$$+ \frac{(\alpha-\gamma+1)(\alpha-\gamma+2)(\alpha-\gamma+3)(\beta-\gamma+1)(\beta-\gamma+2)(\beta-\gamma+3)}{1\cdot 2\cdot 3\,(2-\gamma)(3-\gamma)(4-\gamma)} x^3 + \cdots\cdots].$$

A série y_1, conhecida como *série hipergeométrica*, é convergente para $|x| < 1$ e é representada por

$$y_1 = F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ x).$$

Note que $y_2 = x^{1-\gamma} F(\alpha-\gamma+1,\ \beta-\gamma+1,\ 2-\gamma,\ x)$

é do mesmo tipo. Então, se γ não é inteiro (incluindo 0), a solução geral é

$$y = Ay_1 + By_2 = AF(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ x) + Bx^{1-\gamma} F(\alpha-\gamma+1,\ \beta-\gamma+1,\ 2-\gamma,\ x).$$

Há numerosos casos especiais, dependendo dos valores de α, β e γ. Alguns dêles serão tratados nos Problemas Resolvidos.

PROBLEMAS RESOLVIDOS

EQUAÇÃO DE LEGENDRE

1) Verificar que $2^p p! P_p(x) = \dfrac{d^p}{dx^p}(x^2-1)^p$. (Fórmula de Rodrigues)

Pelo teorema do binômio: $(x^2-1)^p = \sum_{n=0}^{p} (-1)^n \dfrac{p!}{n!(p-n)!} x^{2p-2n}$.

Então:

$$\frac{d^p}{dx^p}(x^2-1)^p = \sum_{n=0}^{\left[\frac{1}{2}p\right]} (-1)^n \frac{p!}{n!(p-n)!}(2p-2n)(2p-2n-1)\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots(p-2n+1)\,x^{p-2n} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\left[\frac{1}{2}p\right]} (-1)^n \frac{2p(2p-1)\cdots(2p-2n+1)}{2p(2p-1)\cdots(2p-2n+1)}(2p-2n)(2p-2n-1)\cdots$$

$$\cdots(p-2n+1)\frac{(p-2n)(p-2n-1)\cdots 1}{(p-2n)(p-2n-1)\cdots 1}\cdot\frac{p!}{n!(p-n)!}x^{p-2n}.$$

A expressão do denominador $2p(2p-1)\cdots(2p-2n+1) = 2^n[p(p-1)\cdots(p-n+1)][(2p-1)(2p-3)\cdots(2p-2n+1)]$ multiplicada por $(p-n)!$ dá: $2^n p![(2p-1)(2p-3)\cdots\cdots(2p-2n+1)]$. Assim:

$$\frac{d^p}{dx^p}(x^2-1)^p = \sum_{n=0}^{\left[\frac{1}{2}p\right]} (-1)^n \frac{(2p)!\,p!}{2^n p![(2p-1)(2p-3)\cdots(2p-2n+1)](p-2n)!\,n!}x^{p-2n} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\left[\frac{1}{2}p\right]} (-1)^n \frac{(2p)!}{2^n\,n!\,p!}\cdot\frac{p(p-1)\cdots(p-2n+1)}{(2p-1)(2p-3)\cdots(2p-2n+1)}x^{p-2n} =$$

$$= \frac{(2p)!}{p!}u_p(x) = 2^p\cdot p!\,P_p(x).$$

2) Mostrar que $P_p(x) = \sum_{n=0}^{\left[\frac{1}{2}p\right]} (-1)^n \dfrac{(2p-2n)!}{2^p\,n!(p-n)!(p-2n)!}x^{p-2n}$.

(Do Problema 1, acima.)

$$\frac{d^p}{dx^p}(x^2-1)^p = \sum_{n=0}^{\left[\frac{1}{2}p\right]} (-1)^n \frac{p!}{n!(p-n)!}(2p-2n)(2p-2n-1)\cdots\cdot$$

$$\cdots\cdot(p-2n+1)\,x^{p-2n} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\left[\frac{1}{2}p\right]} (-1)^n (2p-2n)(2p-2n-1) \cdots$$

$$\cdots (p-2n+1) \frac{(p-2n)!}{(p-2n)!} \cdot \frac{p!}{n!\,(p-n)!} x^{p-2n} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\left[\frac{1}{2}p\right]} (-1)^n \frac{(2p-2n)!\,p!}{n!\,(p-n)!\,(p-2n)!} x^{p-2n}.$$

Assim:

$$P_p(x) = \frac{1}{2^p p!} \cdot \frac{d^p}{dx^p}(x^2-1)^p = \sum_{n=0}^{\left[\frac{1}{2}d\right]} (-1)^n \frac{(2p-2n)!}{2^p\, n!\,(p-n)!\,(p-2n)!} x^{p-2n}.$$

3) Calcular $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_r(x)\, P_s(x)\, dx$.

A fórmula de Rodrigues (Problema 1) dá:

$$\int_{-1}^{1} P_r(x)\, P_s(x)\, dx = \frac{1}{2^{r+s}\, r!\, s!} \int_{-1}^{1} \frac{d^r}{dx^r}(x^2-1)^r \cdot \frac{d^s}{dx^s}(x^2-1)^s\, dx.$$

Façamos: $u = \dfrac{d^r}{dx^r}(x^2-1)^r$ e $dv = \dfrac{d^s}{dx^s}(x^2-1)^s\, dx$.

Então: $du = \dfrac{d^{r+1}}{dx^{r+1}}(x^2-1)^r\, dx,\ \ v = \dfrac{d^{s-1}}{dx^{s-1}}(x^2-1)^s$

e $$\int_{x=-1}^{x=1} u\, dv = uv\Big]_{x=-1}^{x=1} - \int_{x=-1}^{x=1} v\, du =$$

$$= \frac{d^r}{dx^r}(x^2-1)^r \cdot \frac{d^{s-1}}{dx^{s-1}}(x^2-1)^s \Big]_{-1}^{1} -$$

$$- \int_{-1}^{1} \frac{d^{r+1}}{dx^{r+1}}(x^2-1)^r \cdot \frac{d^{s-1}}{dx^{s-1}}(x^2-1)^s\, dx.$$

Agora: $\dfrac{d^{s-j}}{dx^{s-j}}(x^2-1)^s \Big]_{-1}^{1} = 0$, para $j = 1, 2, \cdots, s-1$; assim, depois de uma integração por partes, temos:

$$\int_{-1}^{1} P_r(x)\, P_s(x)\, dx = -\frac{1}{2^{r+s}\, r!\, s!} \int_{-1}^{1} \frac{d^{r+1}}{dx^{r+1}}(x^2-1)^r \cdot \frac{d^{s-1}}{dx^{s-1}}(x^2-1)^s\, dx.$$

Uma segunda integração por partes dá:

$$\int_{-1}^{1} P_r(x)\, P_s(x)\, dx = \frac{1}{2^{r+s}\, r!\, s!} \int_{-1}^{1} \frac{d^{r+2}}{dx^{r+2}}(x^2-1)^r \cdot \frac{d^{s-2}}{dx^{s-2}}(x^2-1)^s\, dx$$

e, depois de s integrações por partes, temos:

$$A) \quad \int_{-1}^{1} P_r(x)\, P_s(x)\, dx = \frac{(-1)^s}{2^{r+s}\, r!\, s!} \int_{-1}^{1} (x^2 - Z)^s \cdot \frac{d^{r+s}}{dx^{r+s}} (x^2 - 1)^r\, dx.$$

Suponhamos $s > r$. Como $(x^2 - 1)^r = x^{2r} - rx^{2r-2} + \cdots\cdots + (-1)^r$, temos: $\frac{d^{r+s}}{dx^{r+s}}(x^2 - 1)^r = 0$ e $\int_{-1}^{1} P_r(x)\, P_s(x)\, dx = 0$. Como r e s aparecem simètricamente, esta relação é verdadeira, também, para $r > s$. Assim, a relação é verdadeira para $r \neq s$.

Suponhamos $s = r$. $A)$ transforma-se em:

$$B) \qquad \int_{-1}^{1} P_r^2(x)\, dx = \frac{(-1)^r}{2^{2r}\, (r!)^2} \int_{-1}^{1} (x^2 - 1)^r \cdot \frac{d^{2r}}{d\, x^{2r}} (x^2 - 1)^r\, dx.$$

Agora: $\frac{d^{2r}}{d\, x^{2r}} (x^2 - 1)^r = (2r)!$. Assim: $\int_{-1}^{1} P_r^2(x)\, dx =$

$$= \frac{(-1)^r\, (2r)!}{2^{2r}\, (r!)^2} \int_{-1}^{1} (x^2 - 1)^r\, dx = \frac{(-1)^r\, (2r)!}{2^{2r}\, (r!)^2} \cdot (-1)^r \cdot 2 \int_{0}^{\frac{1}{2}\pi} \operatorname{sen}^{2r+1}\theta\, d\theta =$$

$= \frac{(2r)!}{2^{2r}\, (r!)^2} \cdot \frac{2^{r+1}\, r!}{1 \cdot 3 \cdots (2r + 1)} = \frac{2}{2r+1}$, empregando a substituição $x = \cos\theta$

e a Fórmula de Wallis $\int_{0}^{\frac{1}{2}\pi} \operatorname{sen}^{2n+1}\theta\, d\theta = \frac{2^n\, n!}{1 \cdot 3 \cdots (2n+1)}$.

4) Exprimir $f(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 - x - 3$ em têrmos de polinômios de Legendre.

Como $P_4(x) = \frac{35}{8} x^4 - \frac{15}{4} x^2 + \frac{3}{8}$, temos: $x^4 = \frac{8}{35} P_4(x) + \frac{6}{7} x^2 - \frac{3}{35}$ e

$$f(x) = \left(\frac{8}{35} P_4(x) + \frac{6}{7} x^2 - \frac{3}{35}\right) + 2x^3 + 2x^2 - x - 3 =$$

$$= \frac{8}{35} P_4(x) + 2x^3 + \frac{20}{7} x^2 - x - \frac{108}{35}.$$

Agora: $x^3 = \frac{2}{5} P_3(x) + \frac{3}{5} x$ e

$$f(x) = \frac{8}{35} P_4(x) + \frac{4}{5} P_3(x) + \frac{20}{7} x^2 + \frac{1}{5} x - \frac{108}{35};$$

$x^2 = \frac{2}{3} P_2(x) + \frac{1}{3}$ e

$$f(x) = \frac{8}{35} P_4(x) + \frac{4}{5} P_3(x) + \frac{40}{21} P_2(x) + \frac{1}{5} x - \frac{224}{105} =$$

$$= \frac{8}{35} P_4(x) + \frac{4}{5} P_3(x) + \frac{40}{21} P_2(x) + \frac{1}{5} P_1(x) - \frac{224}{105} P_0(x).$$

5) Mostrar que $(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}} = P_0(x) + P_1(x)\,t + P_2(x)\,t^2 + \cdots\cdots + P_k(x)\,t^k + \cdots\cdots$.

$$\text{Temos: } (1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}} = [1-(2xt-t^2)]^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}(2xt-t^2) +$$

$$+ \frac{(1/2)(3/2)}{2}(2xt-t^2)^2 + \cdots\cdots + \frac{1\cdot 3\cdots(2k-5)}{2^{k-2}(k-2)!}(2xt-t^2)^{k-2} +$$

$$+ \frac{1\cdot 3\cdots(2k-3)}{2^{k-1}(k-1)!}(2xt-t^2)^{k-1} + \frac{1\cdot 3\cdots(2k-1)}{2^k\, k!}(2xt-t^2)^k + \cdots\cdots.$$

$$\text{Porém: } (2xt-t^2)^k = (2x)^k\, t^k - \cdots\cdots,$$

$$(2xt-t^2)^{k-1} = (2x)^{k-1}\,t^{k-1} - (k-1)(2x)^{k-2}\,t^k + \cdots\cdots,$$

$$(2xt-t^2)^{k-2} = (2x)^{k-2}\,t^{k-2} - (k-2)(2x)^{k-3}\,t^{k-1} + \frac{(k-2)(k-3)}{2!}(2x)^{k-4}\,t^k - \cdots\cdots, \text{ etc.}$$

$$\text{Assim: } (1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + xt + \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right)t^2 + \cdots\cdots\cdots\cdots +$$

$$+ \left[\frac{1\cdot 3\cdots(2k-1)}{2^k\, k!}2^k x^k - \frac{1\cdot 3\cdots(2k-3)}{2^{k-1}(k-1)!}(k-1)\,2^{k-2}x^{k-2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1\cdot 3\cdots(2k-5)}{2^{k-2}(k-2)!}\,\frac{(k-2)(k-3)}{2!}\,2^{k-4}x^{k-4} + \cdots\cdots\right]t^k + \cdots\cdots\cdots =$$

$$= 1 + xt + \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right)t^2 + \cdots\cdots\cdots\cdots + \frac{1\cdot 3\cdots(2k-1)}{k!}\left[x^k - \right.$$

$$\left. - \frac{k(k-1)}{2(2k-1)}x^{k-2} + \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{2\cdot 4\,(2k-1)(2k-3)}x^{k-4} + \cdots\right]t^k + \cdots$$

$$= P_0(x) + P_1(x)\,t + P_2(x)\,t^2 + \cdots\cdots + P_k(x)\,t^k + \cdots\cdots.$$

6) Mostrar que $P_p(1) = 1,\ p = 0, 1, 2, 3, \cdots\cdots\cdots$.

Fazendo $x = 1$ na identidade estabelecida no Problema 5, temos:

$$(1-2t+t^2)^{-\frac{1}{2}} = (1-t)^{-1} = 1 + t + t^2 + \cdots\cdots + t^p + \cdots\cdots =$$

$$= P_0(1) + P_1(1)\,t + P_2(1)\,t^2 + \cdots\cdots + P_p(1)\,t^p + \cdots\cdots.$$

Logo, $P_0(1) = P_1(1) = \cdots\cdots = P_p(1) = \cdots\cdots = 1$.

EQUAÇÃO DE BESSEL

7) Provar que $\frac{d}{dx} J_0(x) = -J_1(x)$.

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} =$$

$$= 1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^4 \quad \frac{1}{(3!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^6 + \cdots + $$

$$+ (-1)^{n+1} \frac{1}{[(n+1)!]^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+2} + \cdots\cdots$$

e

$$\frac{d}{dx} J_0(x) = -\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{1!\,2!} \left(\frac{x}{2}\right)^3 - \frac{1}{2!\,3!} \left(\frac{x}{2}\right)^5 + \cdots\cdots +$$

$$+ (-1)^{n+1} \frac{1}{n!\,(n+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1} + \cdots\cdots =$$

$$= -\left[\frac{x}{2} - \frac{1}{1!\,2!} \left(\frac{x}{2}\right)^3 + \cdots\cdots + \right.$$

$$\left. + (-1)^n \frac{1}{n!\,(n+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1} + \cdots\cdots \right] =$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!\,(n+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1} = -J_1(x).$$

Mais resumidamente:

$$\frac{d}{dx} J_0(x) = \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} = \frac{d}{dx} [1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}]$$

$$= \frac{d}{dx} [1 - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{[(n+1)!]^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+2}] =$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!\,(n+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1} = -J_1(x).$$

8) Provar que *a*) $\frac{d}{dx} x^k \cdot J_k(x) = x^k J_{k-1}(x)$,

b) $\frac{d}{dx} x^{-k} \cdot J_k(x) = -x^{-k} J_{k+1}(x)$,

onde k é um inteiro positivo.

a) $$\frac{d}{dx} x^k \cdot J_k(x) = \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^{k+2n} n!\,(k+n)!} x^{2k+2n} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2k+2n}{2^{k+2n} n!\,(k+n)!} x^{2k+2n-1} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^{k+2n-1} n!\,(k+n-1)!} x^{2k+2n-1} =$$

$$= x^k \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!\,(k+n-1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{k+2n-1} = x^k J_{k-1}(x).$$

b) $$\frac{d}{dx} x^{-k} \cdot J_k(x) = \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^{k+2n} n!\,(k+n)!} x^{2n} =$$

$$= \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2^k k!} - \right.$$

$$\left. - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^{k+2n+2}\,(n+1)!\,(k+n+1)!} x^{2n+2}\right] =$$

$$= - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^{k+2n+1}\, n!\,(k+n+1)!} x^{2n+1} =$$

$$= - x^{-k} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!\,(k+n+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{k+2n+1} =$$

$$= - x^{-k} J_{k+1}(x).$$

9) Provar que

a) $J_{k-1}(x) - J_{k+1}(x) = 2\dfrac{d}{dx} J_k(x)$, b) $J_{k-1}(x) + J_{k+1}(x) = \dfrac{2k}{x} J_k(x)$,

onde k é um inteiro positivo.

Do Problema 8,

$A)$ $$\frac{d}{dx} x^k \cdot J_k(x) = x^k \frac{d}{dx} J_k(x) + kx^{k-1} J_k(x) = x^k J_{k-1}(x) \quad \text{e}$$

$B)$ $$\frac{d}{dx} x^{-k} \cdot J_k(x) = x^{-k} \frac{d}{dx} J_k(x) - kx^{k-1} J_k(x) = - x^{-k} J_{k+1}(x).$$

De $A)$:

(1) $$\frac{d}{dx} J_k(x) + \frac{k}{x} J_k(x) = J_{k-1}(x).$$

De $B)$:

(2) $$\frac{d}{dx} J_k(x) - \frac{k}{x} J_k(x) = - J_{k+1}(x).$$

Somando (1) e (2), temos $a)$; subtraindo (2) de (1), temos $b)$.

Note que quando $b)$ é subtraído de $a)$, temos:

$$2\frac{d}{dx}J_k(x) - \frac{2k}{x}J_k(x) = -2J_{k+1}(x) \quad \text{ou} \quad \frac{d}{dx}J_k(x) = \frac{k}{x}J_k(x) - J_{k+1}(x).$$

Note também que $b)$ é uma fórmula de recorrência para as funções de Bessel.

10) Mostrar que

$$e^{\frac{1}{2}x(t-1/t)} = J_0(x) + tJ_1(x) + \cdots\cdots + t^k J_k(x) + \cdots\cdots + \\ + \frac{1}{t}J_{-1}(x) + \cdots\cdots + \frac{1}{t^k}J_{-k}(x) + \cdots\cdots\cdots = \sum_{n=-\infty}^{\infty+} t^n J_n(x).$$

$$e^{\frac{1}{2}x(t-1/t)} = e^{\frac{1}{2}xt} \cdot e^{-x/2t} =$$

$$= [1 + \frac{xt}{2} + \frac{x^2 t^2}{2^2\,2!} + \frac{x^3 t^3}{2^3\,3!} + \cdots\cdots + \frac{x^n t^n}{2^n n!} + \cdots\cdots][1 - \frac{x}{2t} + \\ + \frac{x^2}{2^2\,2!\,t^2} - \frac{x^3}{2^3\,3!\,t^3} + \cdots\cdots + (-1)^n \frac{x^n}{2^n n!\,t^n} + \cdots\cdots].$$

Neste produto, os têrmos independentes de t são:

$$1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1}{(3!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^6 + \cdots\cdots + \\ + (-1)^n \frac{1}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n} + \cdots\cdots = J_0(x)$$

o coeficiente de t^k é

$$\frac{x^k}{2^k k!} - \frac{x^{k+1}}{2^{k+1}(k+1)!}\cdot\frac{x}{2} + \frac{x^{k+2}}{2^{k+2}(k+2)!}\cdot\frac{x^2}{2^2\,2!} - \frac{x^{k+3}}{2^{k+3}(k+3)!}\cdot\frac{x^3}{2^3\,3!} + \\ + \cdots\cdots\cdots = \frac{1}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^k - \frac{1}{1!\,(k+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{k+2} + \frac{1}{2!\,(k+2)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{k+4} - \\ - \frac{1}{3!\,(k+3)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{k+6} + \cdots\cdots\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n!(k+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{k+2n} = J_k(x),$$

e o coeficiente de $\frac{1}{t^k}$ é

$$(-1)^k\left[\frac{x^k}{2^k k!} - \frac{x^{k+1}}{2^{k+1}(k+1)!}\cdot\frac{x}{2} + \frac{x^{k+2}}{2^{k+2}(k+2)!}\cdot\frac{x^2}{2^2\,2!} - \right. \\ \left. - \frac{x^{k+3}}{2^{k+3}(k+3)!}\cdot\frac{x^3}{2^3\,3!} + \cdots\cdots\right] = (-1)^k\left[\frac{1}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^k - \frac{1}{1!(k+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{k+2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2!(k+2)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{k+4} - \frac{1}{3!(k+3)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{k+6} + \cdots\right] = (-1)^k J_k(x) = J_{-k}(x).$$

EQUAÇÃO DE GAUSS

11) Resolver, em série, $(x - x^2) y'' + \left(\frac{3}{2} - 2x\right) y' - \frac{1}{4} y = 0.$

Temos: $\alpha+\beta+1=2$, $\gamma=3/2$, $\alpha\beta=1/4$; então: $\alpha=\beta=1/2$ e $\gamma=3/2$.
Daí:

$$y_1 = F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, x\right) = 1 + \frac{x}{6} + \frac{3x^2}{40} + \frac{5x^3}{112} + \cdots\cdots$$

e

$$y_2 = x^{1-\gamma} F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma, x) = x^{-\frac{1}{2}} F(0, 0, \tfrac{1}{2}, x) = 1/\sqrt{x}$$

e a solução geral é: $y = A\,F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, x\right) + B/\sqrt{x}$.

12) Resolver, em série, $(x - x^2) y'' + 4(1 - x) y' - 2y = 0$.

Temos: $\alpha + \beta + 1 = 4$, $\gamma = 4$, $\alpha\beta = 2$; então $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma + 4$ ou $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $\gamma = 4$. Daí:

$$y_1 = F(1, 2, 4, x) = F(2, 1, 4, x) =$$

$$= 1 + \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{10} + \frac{x^3}{5} + \frac{x^4}{7} + \frac{3x^5}{28} + \cdots\cdots$$

Como $y = 4$, o quarto têrmo de y_2 tem o denominador nulo. Entretanto, um dos valores $\alpha - \gamma + 2$ ou $\beta - \gamma + 2$, no terceiro têrmo é nulo, de modo que:

$$y_2 = x^{-3} F(-2, -1, -2, x) = x^{-3} F(-1, -2, -2, x) = x^{-3}(1 - x)$$

e a solução geral é:

$$y = A\,F(1, 2, 4, x) + B\,\frac{1-x}{x^3}.$$

13) Mostrar que *a*) $F(\alpha, \beta, \beta, x) = (1 - x)^{-\alpha}$, *b*) $xF(1, 1, 2, -x) = \ln(1 + x)$.

a) $$F(\alpha, \beta, \beta, x) = 1 + \frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\beta} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\beta(\beta+1)} x^2 + \cdots\cdots =$$

$$= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{3!} x^3 + \cdots\cdots = (1 - x)^{-\alpha}.$$

b) $$xF(1,1,2,-x) = x\left[1 + \frac{1\cdot 1}{1\cdot 2}(-x) + \frac{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 2\cdot 3}(-x)^2 + \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 2\cdot 3\cdot 4}(-x)^3 + \cdots\cdots\right] =$$

$$= x\left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots\cdots\right) = \ln(1 + x).$$

PROBLEMAS PROPOSTOS

14) Calcular

a) $P_4(2) = 55{,}3750$, *c*) $J_1(1) = 0{,}4401$,

b) $J_0(1) = 0{,}7652$, *d*) $F(1, 1, 10, -1) = 0{,}9147$.

15) Verificar as seguintes igualdades pelo desenvolvimento em série de $P_p(x)$.

a) $(x^2 - 1)\, P'_p(x) = (p + 1)\,[P_{p+1}(x) - xP_p(x)] = p\,[xP_p(x) - P_{p-1}(x)]$.

b) $P'_{p+1}(x) = xP'_p(x) + (p + 1)\, P_p(x)$.

c) $(2p + 1)\, P_p(x) = P'_{p+1}(x) - P'_{p-1}(x) = \dfrac{1}{x}\,[(p + 1)\, P_{p+1}(x) + pP_{p-1}(x)]$.

16) Se $P_6(2) = a$ e $P_7(2) = b$, mostrar que:

a) $P'_6(2) = \dfrac{7}{3}(b - 2a)$, *c*) $P_8(2) = \dfrac{1}{8}(30b - 7a)$,

b) $P'_7(2) = \dfrac{7}{3}(2b - a)$, *d*) $P'_8(2) = \dfrac{1}{3}(52b - 14a)$.

17) Se $J_0(2) = a$ e $J_1(2) = b$, mostrar que:

a) $J_2(2) = b - a$, *b*) $J'_1(2) = a - \frac{1}{2}\, b$, *c*) $J'_1(2) = a$.

18) Mostrar que a troca da variável independente $x^2 = t$ reduz a equação de Legendre à equação de Gauss.

19) *a*) Mostrar que a troca da variável dependente $y = x^{1/2} z$ transforma $y'' + y = 0$ numa equação de Bessel.

b) Pondo a solução da equação de Bessel na forma: $y = C_1 x^{1/2} J_{1/2}(x) + C_2 x^{1/2} J_{-1/2}(x)$ mostrar que $J_{1/2}(x)$ e $J_{-1/2}(x)$ podem ser definidos por $ax^{-1/2} \operatorname{sen} x$ e $bx^{-1/2} \cos x$, respectivamente.

c) Mostrar que se as relações do Problema 8 forem verdadeiras para $k = \pm \frac{1}{2}$, tem-se $a = b$.

NOTA. Estas funções são definidas com $a = \sqrt{2/\pi}$.

20) Fazendo $y = x^{1/2} z$ e, em seguida, $x = (3t/2)^{2/3}$ mostrar que $y'' + xy = 0$ é um caso especial da equação de Bessel e resolvê-la.

Sugestão: $z'' + tz' + (t^2 - 1/9)\, z = 0$.

Resp.: $y = Ax\left[1 - \frac{x^3}{2^2\ 3} + \frac{x^6}{2!\ 2^2\ 3^2\ 7} - \frac{x^9}{3!\ 2^2\ 3^3\ 7 \cdot 10} + \cdots\cdots\right] +$

$$+ B\left[1 - \frac{x^3}{3 \cdot 2} + \frac{x^6}{2!\ 3^2\ 2 \cdot 5} - \frac{x^9}{3!\ 3^3\ 2 \cdot 5 \cdot 8} + \cdots\cdots\cdots\cdots\right]$$

21) Resolver $(x^2 - 3x + 2)\, y'' + 4xy' + 2y = 0$ depois de reduzir à equação de Gauss por uma substituição da forma $x = \xi z + \eta$.

Sugestão: $y = AF(1, 2, -4, x-1) + B(x-1)^5 F(6, 7, 6, x-1)$ não é uma solução geral porque o sexto têrmo de $F(1, 2, -4, x-1)$ torna-se infinito.

Resp.: $y = AF(1, 2, 8, 2-x) + B(2-x)^{-7} F(-6, -5, -6, 2-x)$

22) Exprimir as funções abaixo como funções de Gauss:

a) $\frac{1}{1-x} = F(1, \beta, \beta, x)$

b) $\text{arc sen}\, x = x F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, x^2\right)$

c) $\text{arc tg}\, x = x F\left(1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -x^2\right)$

d) $e^x = \lim_{\alpha \to \infty} F(\alpha, 1, 1, x/\alpha)$

e) $\text{sen}\, x = \lim_{\substack{\alpha \to \infty \\ \beta \to \infty}} x F\left(\alpha, \beta, \frac{3}{2}, -\frac{x^2}{4\alpha\beta}\right)$.

Capítulo XXVIII

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS

Equações diferenciais parciais são aquelas que encerram uma ou mais derivadas parciais. Devem envolver, portanto, ao menos duas variáveis independentes. A *ordem* de uma equação diferencial parcial é a da derivada de mais alta ordem que nela figura. Por exemplo, considerando z como variável dependente e x, y como variáveis independentes:

$$(1) \qquad x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z \quad \text{ou} \quad (1') \quad xp + yq = z$$

é de primeira ordem e

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 3\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \quad \text{ou} \quad (2') \quad r + 3s + t = 0$$

é de segunda ordem. Ao escrever (1′) e (2′), usou-se a notação:

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

As equações diferenciais parciais podem aparecer como resultado da eliminação de constantes arbitrárias de uma dada relação entre as variáveis ou pela eliminação de funções arbitrárias das variáveis. Aparecem, também, em conexão com problemas relacionados com a Física e a Geometria.

Eliminação de constantes arbitrárias. Consideremos z como uma função de duas variáveis independentes x e y definida por:

$$(3) \qquad g(x, y, z, a, b) = 0,$$

onde a e b são duas constantes arbitrárias. Derivando (3) parcialmente em relação a x e y, temos:

$$(4) \qquad \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial x} + p\frac{\partial g}{\partial z} = 0$$

e

$$(5) \qquad \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial y} = q\frac{\partial g}{\partial z} = 0.$$

Em geral, as constantes arbitrárias podem ser eliminadas de (3), (4), (5) dando uma equação diferencial parcial de primeira ordem:

(6) $$f(x, y, z, p, q) = 0.$$

EXEMPLO 1. Eliminar as constantes arbitrárias a e b de $z = ax^2 + by^2 + ab$.

Derivando parcialmente em relação a x e y, temos:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p = 2ax \quad \text{e} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q = 2by.$$

Tirando a e b destas equações e substituindo na relação dada, temos:

$$z = \left(\tfrac{1}{2}\frac{p}{x}\right)x^2 + \left(\tfrac{1}{2}\frac{q}{y}\right)y^2 + \left(\tfrac{1}{2}\frac{p}{x}\right)\left(\tfrac{1}{2}\frac{q}{y}\right) \text{ ou } pq + 2px^2y + 2qxy^2 = 4xyz,$$

uma equação diferencial parcial de primeira ordem.

Se z fôr uma função de x e y, definida por uma relação envolvendo apenas uma constante arbitrária, normalmente é possível obter duas equações diferenciais parciais distintas de, primeira ordem, como resultado da eliminação da constante.

EXEMPLO 2. Eliminar a de $z = a(x + y)$.

Derivando em relação a x dá $p = a$, de modo que aparece a equação diferencial parcial $z = p(x + y)$. Anàlogamente, derivando em relação a y tem-se $q = a$ e a equação $z = q(x + y)$.

Se o número de constantes arbitrárias a se eliminar exceder o número de variáveis independentes, a equação diferencial parcial (ou equações) é, geralmente, de ordem acima da primeira.

EXEMPLO 3. Eliminar a, b, c de $z = ax + by + cxy$.

Derivando parcialmente em relação a x e y, temos:

$$\text{(I)}\ p = a + cy \quad \text{e} \quad \text{(II)}\ q = b + cx.$$

Estas relações, juntamente com a que foi dada, não são suficientes para a eliminação das três constantes. Derivando (I) parcialmente em relação a x, temos:

$$\frac{\partial}{\partial x} p = \frac{\partial^2 z}{dx^2} = r = 0,$$

equação diferencial parcial de segunda ordem. Derivando (II) parcialmente em relação a y, temos:

$$\frac{\partial}{\partial y} q = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t = 0, \quad \text{de segunda ordem.}$$

Derivando (I) parcialmente em relação a y ou (II) em relação a x, temos:

$$\frac{\partial}{\partial y} p = \frac{\partial}{\partial x} q = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = s = c.$$

De (I): $p = a + sy$ e $a = p - sy$; de (II): $b = q - sx$.

Substituindo a, b, c na relação dada, temos:

$$z = (p - sy)x + (q - sx)y + sxy = px + qy - sxy,$$

de segunda ordem.

Temos, então, três equações diferenciais parciais: $r=0$, $t=0$, $z=px+qy-sxy$ da mesma ordem (mínima) associadas com a relação dada.

(Ver também Problemas 1-4).

Eliminação de funções arbitrárias. Sejam $u = u(x, y, z)$ e $v = v(x, y, z)$ funções independentes das variáveis x, y, z, e seja

$$\phi(u, v) = 0 \tag{7}$$

uma relação arbitrária entre elas. Considerando z como variável dependente e derivando parcialmente em relação a x e y, temos:

$$\frac{\partial\phi}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + p\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \frac{\partial\phi}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + p\frac{\partial v}{\partial z}\right) = 0 \tag{8}$$

e

$$\frac{\partial\phi}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + q\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \frac{\partial\phi}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial y} + q\frac{\partial v}{\partial z}\right) = 0. \tag{9}$$

Eliminando $\dfrac{\partial\phi}{\partial u}$ e $\dfrac{\partial\phi}{\partial v}$ de (8) e (9), temos:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} + p\dfrac{\partial u}{\partial z} & \dfrac{\partial v}{\partial x} + p\dfrac{\partial v}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + q\dfrac{\partial u}{\partial z} & \dfrac{\partial v}{\partial y} + q\dfrac{\partial v}{\partial z} \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + p\frac{\partial u}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y} + q\frac{\partial v}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial u}{\partial y} + q\frac{\partial u}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x} + p\frac{\partial v}{\partial z}\right) =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} + p\left(\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z}\right) + q\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0.$$

Fazendo:

$$\lambda P = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \lambda Q = \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z},$$

$$\lambda R = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x},$$

temos a forma

$$Pp + Qq = R,$$

equação diferencial parcial em p e q e livre da função arbitrária $\phi(u, v)$.

Exemplo 4. Achar a equação diferencial resultante de $\phi(z/x^3,\ y/x) = 0$, onde ϕ é uma função arbitrária dos argumentos.

Escrevamos a relação funcional na forma $\phi(u, v)=0$ com $u=z/x^3$ e $v=y/x$ Derivando parcialmente em relação a x e y, temos:

$$\frac{\partial\phi}{\partial u}\left(\frac{p}{x^3}-\frac{3z}{x^4}\right)+\frac{\partial\phi}{\partial v}\left(-\frac{y}{x^2}\right)=0, \qquad \frac{\partial\phi}{\partial u}\left(\frac{q}{x^3}\right)+\frac{\partial\phi}{\partial v}\left(\frac{1}{x}\right)=0.$$

A eliminação de $\dfrac{\partial\phi}{\partial u}$ e $\dfrac{\partial\phi}{\partial v}$ dá:

$$\begin{vmatrix} p/x^3 - 3z/x^4 & -y/x^2 \\ q/x^3 & 1/x \end{vmatrix} = p/x^4 - 3z/x^5 + qy/x^5 = \quad \text{ou} \quad px + qy = 3z.$$

A relação funcional arbitrária pode ser dada, também, por $\dfrac{z}{x^3} = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ ou $z = x^3 f\left(\dfrac{y}{x}\right)$, onde f é uma função arbitrária de seus argumentos. Com $v=y/x$ e derivando $z = x^3 f(v)$ em relação a x e y, temos:

$$p = 3x^2 f(v) + x^3 \frac{df}{dv}\frac{\partial v}{\partial x} = 3x^2 f(v) + x^3\left(\frac{df}{dv}\right)\left(-\frac{y}{x^2}\right) = 3x^2 f(v) - xyf'(v),$$

$$q = x^3\frac{df}{dv}\frac{\partial v}{\partial y} = x^3\left(\frac{df}{dv}\right)\left(\frac{1}{x}\right) = x^2 f'(v).$$

Eliminando $f'(v)$ destas relações, temos:

$$px + qy = 3x^3 f(v) = 3z$$

como anteriormente. (Ver também Problemas 5-8).

PROBLEMAS RESOLVIDOS

1) Eliminar a e b de $z = (x^2 + a)(y^2 + b)$.

Derivando parcialmente em relação a x e y, $p=2x(y^2+g)$ e $q=2y(x^2+a)$.

Então: $y^2 + b = \dfrac{p}{2x}$, $x^2 + a = \dfrac{q}{2y}$ e $z = (x^2 + a((y^2 + b) = \left(\dfrac{q}{2y}\right)\left(\dfrac{p}{2x}\right)$ ou $pq = 4xyz$.

Poderíamos também eliminar a e b como se segue:

$$pq = 4xy(y^2 + b)(x^2 + a) = 4xyz.$$

2) Achar a equação diferencial da família de esferas de raio 5 com os centros no plano $x = y$.

A equação da família de esferas é:

(1) $$(x-a)^2 + (y-a)^2 + (z-b)^2 = 25,$$

a e b sendo constantes arbitrárias. Derivando parcialmente em relação a x e y e, dividindo por 2, temos:

$$(x-a) + (z-b)\,p = 0 \quad \text{e} \quad (y-a) + (z-b)\,q = 0.$$

Seja: $z - b = -m$; então $x - a = pm$ e $y - a = qm$. Fazendo as substituições em (1), temos:

$$m^2\,(p^2 + q^2 + 1) = 25.$$

Agora, $x - y = (p-q)\,m$. Então:

$$m = \frac{x-y}{p-q}, \quad m^2\,(p^2+q^2+1) = \frac{(x-y)^2}{(p-q)^2}(p^2+q^2+1) = 25$$

e a equação diferencial pedida é: $(x-y)^2\,(p^2 + q^2 + 1) = 25\,(p-q)^2$.

3) Mostrar que a equação diferencial parcial obtida pela eliminação das constantes arbitrárias a, c de $z = ax + h(a)\,y + c$, onde $h(a)$ é uma função arbitrária de a, é independente das variáveis x, y, z.

Derivando $z = ax + h(a)\,y + c$ parcialmente em relação a x e y, tem-se $p = a$ e $q = h(a)$. A equação diferencial resultante da eliminação de a é $q = h(p)$ ou $f(p, q) = 0$, onde f é uma função arbitrária de seus argumentos. Esta equação contém p e q porém não encerra nenhuma das variáveis.

4) Mostrar que a equação diferencial parcial obtida pela eliminação das constantes arbitrárias a e b de

$$z = ax + by + f(a, b),$$

equação de Clairaut desenvolvida, é:

$$z = px + qy + f(p, q).$$

Derivando $z = ax + by + f(a, b)$ em relação a x e y dá $p = a$ e $q = b$ e a equação diferencial pedida é imediata.

5) Achar a equação diferencial de $\phi\,(x + y + z,\ x^2 + y^2 - z^2) = 0$.

Sejam: $u = x + y + z$, $v = x^2 + y^2 - z^2$, de modo que a relação dada seja: $\phi\,(u, v) = 0$.

Derivando em relação a x e y, temos:

$$\frac{\partial \phi}{\partial u}(1+p) + \frac{\partial \phi}{\partial v}(2x - 2zp) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \phi}{\partial u}(1+q) + \frac{\partial \phi}{\partial v}(2y - 2zq) = 0.$$

Eliminando $\dfrac{\partial \phi}{\partial u}$ e $\dfrac{\partial \phi}{\partial v}$, temos:

$$\begin{vmatrix} 1+p & 2x-2zp \\ 1+q & 2y-2zq \end{vmatrix} = 2\,(y-x) + 2p\,(y+z) - 2q\,(z+x) = 0 \quad \text{ou}$$

$$(y+z)\,p - (x+z)\,q = x - y.$$

6) Eliminar a função arbitrária $\phi(x+y)$ de $z = \phi(x+y)$.

Seja $x + y = u$ de modo que a relação dada seja: $z = \phi(u)$.

Derivando em relação a x e y, temos: $p = \dfrac{d\phi}{du} = \phi'(u)$ e $q = \theta'(u)$.

Então: $p = q$ é a equação diferencial resultante.

7) A equação de um cone qualquer com vértice em $P_0(x_0, y_0, z_0)$ é da forma $\phi\left(\dfrac{x-x_0}{z-z_0}, \dfrac{y-y_0}{z-z_0}\right) = 0$.

Achar a equação diferencial.

Sejam $\dfrac{x-x_0}{z-z_0} = u$, $\dfrac{y-y_0}{z-z_0} = v$ de modo que a relação dada se escreva $\phi(u, v) = 0$.

Derivando em relação a x e y, temos:

$$\frac{\partial\phi}{\partial u}\left(\frac{1}{z-z_0} - p\,\frac{x-x_0}{(z-z_0)^2}\right) + \frac{\partial\phi}{\partial v}\left(-p\,\frac{y-y_0}{(z-z_0)^2}\right) = 0$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial u}\left(-q\,\frac{x-x_0}{(z-z_0)^2}\right) + \frac{\partial\phi}{\partial v}\left(\frac{1}{z-z_0} - q\,\frac{y-y_0}{(z-z_0)^2}\right) = 0.$$

Eliminando $\dfrac{\partial\phi}{\partial u}$ e $\dfrac{\partial\phi}{\partial v}$, temos: $p(x-x_0) + q(y-y_0) = z - z_0$.

8) Eliminar as funções arbitrárias $f(x)$ e $g(y)$ de $z = y f(x) + x g(y)$.

Derivando parcialmente em relação a x e y, temos:

(1) $\quad p = y f'(x) + g(y) \quad$ e $\quad$ (2) $\quad q = f(x) + x g'(y)$.

Como não é possível eliminar f, g, f', g' destas relações e da relação dada, passamos às derivadas parciais de segunda ordem:

(3) $\quad r = y f''(x), \quad s = f'(x) + g'(y), \quad t = x g''(y)$.

De (1) e (2) temos: $f'(x) = \dfrac{1}{y}[p - g(y)]$ e $g'(y) = \dfrac{1}{x}[q - f(x)]$. Assim:

$$s = f'(x) + g'(y) = \frac{1}{y}[p - g(y)] + \frac{1}{x}[q - f(x)].$$

Então:

$xys = x[p - g(y)] + y[q - f(x)] = px + qy - [y f(x) + x g(y)] = px + qy - z$

é a equação diferencial parcial resultante.

Note que a equação diferencial é de segunda ordem, sendo de se esperar, porém, normalmente, ordem mais elevada. Entretanto, como uma das relações (3) encerra sòmente derivadas primeiras, de f e g, é possível eliminar f, g, f', g' entre esta relação e as relações (1) e (2) e a dada inicialmente.

9) Achar a equação diferencial das superfícies que cortam, ortogonalmente, a família de cones $x^2 + y^2 - a^2z^2 = 0$.

Seja $z = f(x, y)$ a equação procurada. Em um ponto $P(x, y, z)$ da superfície, os parâmetros diretores da normal à superfície são $[p, q, -1]$. Anàlogamente, em P, os parâmetros diretores da normal ao cone que passa por P é $[x, y, -a^2z]$. Como estas direções são ortogonais:

$$px + qy + a^2z = 0.$$

A eliminação de a^2 entre esta e a equação dada resulta na equação diferencial procurada:

$$z(px + qy) + x^2 + y^2 = 0.$$

10) Uma superfície que seja a envoltória de uma família de planos, a um parâmetro, é uma superfície desenvolvível, planificável. (Tal superfície pode ser desenvolvida em um plano sem deformar-se por tração ou rasgar-se). Determinar a equação diferencial da superfície acima citada.

Seja $z = f(x, y)$ a equação da superfície planificável.

O plano tangente em um ponto (x_0, y_0, z_0) da superfície é:

$$F = (x - x_0)p + (y - y_0)q - (z - z_0) = 0. \tag{1}$$

Quando p e q satisfizerem à relação $\phi(p, q) = 0$, (1) será uma família de planos, a um parâmetro, tendo $z = f(x, y)$ como envoltória. Então $\phi(p, q) = 0$ ou $q = \lambda(p)$ é a equação diferencial procurada.

O cone do Problema 9 é uma superfície planificável porque $p = \dfrac{x}{a^2 z}$, $q = \dfrac{y}{a^2 z}$ satisfaz a $\phi(p. q) = a^2(p^2 + q^2) - 1 = 0$.

11) Eliminar as funções arbitrárias ϕ_1 e ϕ_2 de

$$z = \phi_1(y + m_1x) + \phi_2(y + m_2x) = \phi_1(u) + \phi_2(v)$$

onde $m_1 \neq m_2$ são constantes fixadas.

Derivando parcialmente, temos:

$$r = m_1^2 \frac{d^2\phi_1}{du^2} + m_2^2 \frac{d^2\phi_2}{dv^2}, \quad s = m_1 \frac{d^2\phi_1}{du^2} + m_2 \frac{d^2\phi_2}{dv^2}, \quad t = \frac{d^2\phi_1}{du^2} + \frac{d^2\phi_2}{dv^2}.$$

Eliminando $\dfrac{d^2\phi_1}{du^2}$, $\dfrac{d^2\phi_2}{dv^2}$, temos:

$$\begin{vmatrix} m_1^2 & m_2^2 & r \\ m_1 & m_2 & s \\ 1 & 1 & t \end{vmatrix} = (m_1 - m_2)r - (m_1^2 - m_2^2)s + (m_1^2 m_2 - m_1 m_2^2)t = 0.$$

Como $m_1 \neq m_2$, temos: $r - (m_1 + m_2)s + m_1m_2t = 0$.

12) Mostrar que *a)* $z = ax^3 + by^3$ e *b)* $z = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^4/x$ dão origem à mesma equação diferencial.

a) Derivando $z = ax^3 + by^3$ parcialmente em relação a x e y, temos:

$$p = 3ax^2 \quad \text{e} \quad q = 3by^2.$$

Então: $px + qy = 3(ax^3 + by^3) = 3z$ é a equação diferencial resultante.

b) Derivando $z = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^4/x$ parcialmente em relação a x e y, temos:

$$p = 3ax^2 + 2bxy + cy^2 - dy^4/x^2 \quad \text{e} \quad q = bx^2 + 2cxy + 4dy^3/x.$$

Então: $px + qy = 3(ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^4/x) = 3z$ como anteriormente.

O fato das duas equações, uma com duas constantes arbitrárias e outra com quatro, darem origem à mesma equação diferencial, mostra o caráter secundário que a constante arbitrária tem aqui. Como *a)* pode ser escrita como se segue:

$$z = ax^3 + by^3 = x^3[a + b(y/x)^3] = x^3 \cdot g(y/x),$$

e *b)* pode ser escrita como abaixo:

$$z = x^3[a + b(y/x) + c(y/x)^2 + d(y/x)^4] = x^3 \cdot h(y/x),$$

vê-se que cada uma é um caso particular de $z = x^3 \cdot f(y/x)$ considerada no Exemplo 4. As constantes arbitrárias foram substituídas por funções arbitrárias.

PROBLEMAS PROPOSTOS

Eliminar as constantes arbitrárias a, b, c de cada uma das seguintes equações:

13) $z = (x-a)^2 + (y-b)^2$ — *Resp.:* $4z = p^2 + q^2$

14) $z = axy + b$ — *Resp.:* $xp - yq = 0$

15) $ax + by + cz = 1$ — *Resp.:* $r = 0$, $s = 0$, ou $t = 0$

16) $z = axe^y + \frac{1}{2}a^2e^{2y} + b$ — *Resp.:* $q = xp + p^2$

17) $z = xy + y\sqrt{x^2 - a^2} + b$ — *Resp.:* $pq = xp + yq$

18) $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$

Resp.: $xzr + xp^2 - zp = 0$, $yzt + yq^2 - zq = 0$, ou $zs + pq = 0$

Eliminar as constantes arbitrárias a, b e as funções arbitrárias ϕ, f, g.

19) $z = x^2\phi(x-y)$ ou $\psi(z/x^2, x-y) = 0$ — *Resp.:* $2z = xp + xq$

20) $xyz = \phi(x + y + z)$ — *Resp.:* $x(y-z)p + y(z-x)q = z(x-y)$

21) $z = (x+y)\phi(x^2 - y^2)$ — *Resp.:* $yp + xq = z$

22) $z = f(x) + e^y g(x)$ *Resp.:* $t - q = 0$

23) $x = f(z) + g(y)$ *Resp.:* $ps - qr = 0$

24) $z = f(xy) + g(x + y)$
Resp.: $x(y - x)r - (y^2 - x^2)s + y(y - x)t + (p - q)(x + y) = 0$

25) $z = f(x + z) + g(x + y)$ *Resp.:* $qr - (1 + p + q)s + (1 + p)t = 0$

26) $z = ax^2 + g(y)$ *Resp.:* $p - xr = 0$ ou $s = 0$

27) $z = \frac{1}{2}(a^2 + 2)x^2 + axy + bx + \phi(y + ax)$ *Resp.:* $r - 2t + rt - s^2 = 2$

28) Achar a equação diferencial das esferas de raio 2 tendo os centros no plano xOy. *Sugestão:* Eliminar a e b de $(x - a)^2 + (y - b)^2 + z^2 = 4$.
Resp.: $z^2(p^2 + q^2 + 1) = 4$

29) Achar a equação diferencial dos planos que cortam os eixos dos x e y nos mesmos pontos.
Resp.: $p - q = 0$

30) Achar a equação diferencial das superfícies de revolução que têm o eixo dos z como eixo de rotação.

Sugestão: Eliminar ϕ de $z = \phi(\sqrt{x^2 + y^2}) = \psi(x^2 + y^2)$.
Resp.: $yp - xq = 0$.

Capítulo XXIX

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM

As equações diferenciais parciais de primeira ordem

(1_1) $\quad px + qy = 3z \qquad$ e $\qquad (1_2)$ $\quad px^2 + qy = z^3$

são chamadas *lineares*, como indicação de que são do primeiro grau em p e q. Note-se que, ao contrário das equações diferenciais ordinárias lineares, não há restrição quanto ao grau da variável dependente z.

As equações diferenciais parciais de primeira ordem que não são lineares, como

(2_1) $\quad p^2 + q^2 = 1 \qquad$ e $\qquad (2_2)$ $\quad p + \ln q = 2z^3$,

são chamadas *não-lineares*.

Equações diferenciais parciais lineares de primeira ordem. A equação (1_1) foi obtida no Capítulo XXVIII, Exemplo 4, partindo da relação funcional arbitrária

$$(3) \qquad \phi\,(z/x^2,\ y/x) = 0$$

ou sua equivalente $z/x^3 = fy/x$. Esta solução, que contém uma função arbitrária, é chamada a *solução geral* de (1_1).

A equação diferencial foi também obtida (Capítulo XXVIII, Probl. 12) pela eliminação das constantes arbitrárias de

$$(4_1) \qquad z = ax^3 + by^3$$

e de

$$(4_2) \qquad z = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^4/x.$$

Um estudo dos problemas daquele Capítulo mostra que as relações que envolvem duas constantes arbitrárias, normalmente, dão equações diferenciais parciais não-lineares, de primeira ordem, enquanto que aquelas que têm mais de duas constantes arbitrárias dão equações de ordem superior ao primeiro. Entretanto, como foi assinalado no

Capítulo XXVIII, Problema 12, ambas as relações são casos particulares da relação funcional arbitrária (3). Está claro, então, que a solução geral de (1) dá uma variedade muito maior de soluções do que a que é obtida (no caso das equações diferenciais ordinárias) pela variação das constantes arbitrárias. Por exemplo:

$$z/x^3 = A \operatorname{sen} (y/x)^2 + B \cos (y/x + C \ln (y/x) + De^{y/x} + E (y/x)^{12}$$

está incluída na solução geral (3).

Solução geral. Uma equação diferencial parcial linear de primeira ordem, envolvendo uma variável dependente z e duas variáveis independentes x e y, é da forma

$$(5) \qquad Pp + Qq = R$$

onde P, Q, R são funções de x, y, z.

Se $P = 0$ ou $Q = 0$, (5) pode ser fàcilmente resolvida. Assim, a equação $\dfrac{\partial z}{\phi x} = 2x + 3y$ tem como solução $z = x^2 + 3xy + \phi(y)$, onde ϕ é uma função arbitrária.

Lagrange reduziu o problema de achar a solução geral de (5) àquele de resolver um sistema auxiliar, (chamado sistema de Lagrange), de equações diferenciais ordinárias,

$$(6) \qquad \frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$$

mostrando (ver Problema 7) que

$$(7) \qquad \phi(u, v) = 0, \qquad (\phi, \text{ arbitrário})$$

é a solução geral de (5) desde que $u = u(x, y, z) = a$ e $v = v(x, y, z) = b$ sejam duas soluções independentes de (6). Aqui, a e b são constantes arbitrárias e, ao menos, uma das funções u, v deve conter z.

Exemplo 1. Achar a solução geral de

$$(1) \qquad px + qy = 3z.$$

O sistema auxiliar é: $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dz}{3z}$.

De $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dz}{3z}$, temos: $u = z/x^3 = a$; e de $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y}$, temos: $v = y/x = b$.

Então, a solução geral é $\phi(z/x^3, y/x) = 0$, onde ϕ é arbitrário.

Naturalmente que, de $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{dz}{3z}$, temos $z/y^3 = c$, e podemos escrever:

$$\psi\,(z/x^3,\; z/y^3) = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda\,(z/y^3,\; y/x) = 0,$$

onde ψ e λ são arbitrários. Entretanto, estas soluções são tôdas equivalentes e podemos chamar qualquer uma delas como *a* solução geral.

O processo acima pode ser fàcilmente estendido para resolver equações diferenciais lineares de primeira ordem que envolvem mais de duas variáveis independentes.

Exemplo 2. Achar a solução geral de

$$x\,\frac{\partial z}{\partial x} + y\,\frac{\partial z}{\partial y} + t\,\frac{\partial z}{dt} = xyt,$$

z sendo a variável dependente.

O sistema auxiliar é $\quad \dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dt}{t} = \dfrac{dz}{xyt}$.

Temos, fàcilmente: $u = x/y = a,\; v = t/y = b$.

Uma terceira solução independente pode ser encontrada por meio dos multiplicadores $yt,\; xt,\; xy,\; -3$. Como

$$x\,(yt) + y\,(xt) + t\,(xy) + (xyt)\,(-3) = 0,$$

$$yt\,dx + xt\,dy + xy\,dt - 3\,dz = 0$$

e

$$xyt - 3z = c.$$

Então, a solução geral é: $\phi\,(x/y,\; t/y,\; xyt - 3z) = 0$.

Soluções completas. Se $u = a$ e $v = b$ são duas soluções independentes de (6) e se α, β são constantes arbitrárias,

$$u = \alpha v + \beta \tag{8}$$

é chamada *uma solução completa* de (5). Então, para a equação do Exemplo 1,

$$z/x^3 = \alpha\,(y/x) + \beta$$

é uma solução completa.

Uma solução completa (8) representa uma família de superfícies, a dois parâmetros, que não têm uma envoltória, porque as constantes arbitrárias entram linearmente. É possível, entretanto, selecionar entre as superfícies de (8) uma família de superfícies, a um parâmetro, tendo envoltórias. Como se vê no Problema 8, estas envoltórias (superfícies) são simplesmente superfícies particulares da solução geral.

PROBLEMAS RESOLVIDOS

1) Achar a solução geral de $2p + 3q = 1$.

O sistema auxiliar é $\dfrac{dx}{2} = \dfrac{dy}{3} = \dfrac{dz}{1}$.

De $\dfrac{dx}{2} = \dfrac{dz}{1}$, temos: $x - 2z = a$; e de $\dfrac{dx}{2} = \dfrac{dy}{3}$, temos: $3x - 2y = b$.

Então, a solução geral é: $\phi(x - 2z, 3x - 2y) = 0$.

A solução completa $x - 2z = \alpha(3x - 2y) + \beta$ é uma família de planos, a dois parâmetros. A família, a um parâmetro, determinada fazendo $\beta = \alpha^2$, tem a equação:

$A)$ $$x - 2z = \alpha(3x - 2y) + \alpha^2.$$

Derivando $A)$ em relação a α, temos:

$$0 = 3x - 2y + 2\alpha \quad \text{ou} \quad \alpha = -\tfrac{1}{2}(3x - 2y).$$

Entrando com êsse valor em $A)$, temos a envoltória, um cilindro parabólico: $x - 2z = -\frac{1}{4}(3x - 2y)^2$.

Êste cilindro, vê-se perfeitamente, é uma parte da solução geral.

2) Achar a solução geral de $y^2zp - x^2zq = x^2y$.

As equações auxiliares são: $\dfrac{dx}{y^2z} = \dfrac{dy}{-x^2z} = \dfrac{dz}{x^2y}$.

De $\dfrac{dz}{x^2y} = \dfrac{dy}{-x^2z}$ ou $z\,dz + y\,dy = 0$, temos: $y^2 + z^2 = a$; de $\dfrac{dx}{y^2z} = \dfrac{dy}{-x^2z}$, temos: $x^3 + y^3 = b$.

Então, a solução geral é: $\phi(y^2 + z^2, x^3 + y^3) = 0$.

3) Achar a solução geral de $(y - z)p + (x - y)q = z - x$.

O sistema auxiliar é: $\dfrac{dx}{y - z} = \dfrac{dy}{x - y} = \dfrac{dz}{z - x}$.

Como $(y - z) + (x - y) + (z - x) = 0$, $dx + dy + dz = 0$ e $x + y + z = a$.

Como $x(y - z) + z(x - y) + y(z - x) = 0$, $x\,dx + z\,dy + y\,dz = 0$ e $x^2 + 2yz = b$.

Então, a solução geral é: $\phi(x^2 + 2yz, x + y + z) = 0$.

A solução completa $x^2 + 2yz = \alpha(x + y + z) + \beta$ representa uma família de hiperbolóides.

4) Achar a solução geral de $(x^2 - y^2 - z^2)\,p + 2xyq = 2xz$.

O sistema auxiliar é $\dfrac{dx}{x^2 - y^2 - z^2} = \dfrac{dy}{2xy} = \dfrac{dz}{2xz}$.

De $\dfrac{dy}{2xy} = \dfrac{dz}{2xz}$, temos: $y/z = a$.

De $\dfrac{dz}{2xz} = \dfrac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{x(x^2 - y^2 - z^2) + y(2xy) + z(2xz)} = \dfrac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{x(x^2 + y^2 + z^2)}$ ou

$\dfrac{dz}{z} = \dfrac{2(x\,dx + y\,dy + z\,dz)}{x^2 + y^3 + z^2}$, temos: $\dfrac{x^2 + y^2 + z^2}{z} = b$.

Então, a solução geral é $\phi\left(\dfrac{y}{z}, \dfrac{x^2 + y^2 + z^2}{z}\right) = 0$.

A solução completa $x^2 + y^2 + z^2 = \alpha y + \beta z$ consiste das esferas que passam na origem, com centros nos plano yOz.

5) Resolver $ap + bq + cz = 0$.

O sistema auxiliar é: $\dfrac{dx}{a} = \dfrac{dy}{b} = \dfrac{dz}{-cz}$. De $\dfrac{dx}{a} = \dfrac{dy}{b}$, temos $ay - bx = A$.

Se $a \neq 0$, $\dfrac{dz}{-cz} = \dfrac{dx}{a}$ dá $\ln z = -\dfrac{c}{a}x + \ln B$ ou $z = Be^{-cx/a}$ e a solução geral pode tomar a forma: $z = e^{-cx/a}\,\phi(ay - bx)$. Se $b \neq 0$, $\dfrac{dz}{-cz} = \dfrac{dy}{b}$ dá $z = Ce^{-cy/b}$ e a solução geral pode tomar a forma: $z = e^{-cy/b}\,\psi(ay - bx)$.

6) Resolver 1) $2p+q+z=0$, 2) $p-3q+2z=0$, 3) $2p+3q+5z=0$, 4) $q+2z=0$.

1) Comparando com o Problema 5 acima, $a = 2$, $b = 1$, $c = 1$.

A solução geral é: $z = e^{-x/2}\,\phi(2y - x)$ ou $z = e^{-y}\,\psi(2y - x)$.

2) Aqui: $a = 1$, $b = -3$, $c = 2$.

A solução geral é: $z = e^{-2x}\,\phi(y + 3x)$ ou $z = e^{2y/3}\,\psi(y + 3x)$.

3) A solução geral é: $z = e^{-5x/2}\,\phi(2y - 3x)$ ou $z = e^{-5y/3}\,\psi(2y - 3x)$.

4) A solução geral é: $z = e^{-2y}\,\phi(-x) = e^{-2y}\,\psi(x)$.

7) Mostrar que, se $u = u(x, y, z) = a$ e $v = v(x, y, z) = b$ forem duas soluções independentes de $\dfrac{dx}{P} = \dfrac{dy}{Q} = \dfrac{dz}{R}$, onde P, Q, R são funções de x, y, z, tem-se $\phi(u, v) = 0$, com ϕ arbitrário, como solução geral de $Pp + Qq = R$.

Tomando as diferenciais de $u = a$ e $v = b$, temos:

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy + \frac{\partial v}{\partial z}dz = 0.$$

Como u e v são funções independentes, temos:

$$dx : dy : dz = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial y}\right) : \left(\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z}\right) : \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right) = P : Q : R.$$

Porém, estas são as relações que definem P, Q, R (ver Capítulo XXVIII) na equação $Pp + Qq = R$ cuja solução geral é $\phi(u, v) = 0$.

8) Seja $u = \alpha v + \beta$ uma solução completa de $Pp + Qq = R$. Desta família de superfícies, a dois parâmetros, selecionar uma família, a um parâmetro, fazendo $\beta = h(\alpha)$, onde h é uma dada função de α, e obter a envoltória.

A envoltória da família

(1) $$u = \alpha v + h(\alpha)$$

é obtida eliminando α entre (1) e

(2) $$0 = v + h'(\alpha).$$

De (2) vem $\alpha = \mu(v)$ que, substituído em (1), dá:

(3) $$u = v \cdot \mu(v) + h[\mu(v)] = \lambda(v).$$

(3) é uma parte da solução geral $\phi(u, v) = 0$. Então, ao contrário do caso das equações diferenciais ordinárias, a envoltória não é um novo lugar.

Se $h(\alpha)$ fôr tomado como uma função arbitrária de α, $\lambda(v)$ é uma função arbitrária de v e (3) é a solução geral. Assim, a solução geral de uma equação diferencial parcial linear de primeira ordem é a totalidade de envoltórias de tôdas as famílias, a um parâmetro, (1) obtidas de uma solução completa. Note-se que, quando $h(\alpha)$ fôr arbitrário, a eliminação de α entre (1) e (2) não será possível; então, a solução geral não pode ser obtida da solução completa.

9) Mostrar que a condição para que a equação diferencial ordinária

$$\mu(x, y)\, M(x, y)\, dx + \mu(x, y)\, N(x, y)\, dy = 0$$

seja exata é uma equação diferencial parcial linear de primeira ordem. Em seguida, mostrar como achar um fator de integração de $Mdx + Ndy = 0$. (Ver Capítulo IV).

Se

$$\mu M dx + \mu N dy = 0$$

fôr uma equação diferencial exata, então:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu N) \quad \text{ou} \quad M\frac{\partial \mu}{\partial y} - N\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right).$$

Esta é uma equação diferencial parcial linear de primeira ordem, da qual o sistema auxiliar é:

$$(1) \qquad \frac{dx}{-N} = \frac{dy}{M} = \frac{d\mu}{\mu\left(\dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y}\right)}.$$

Qualquer solução, envolvendo μ, dêste sistema é um fator de integração de $Mdx + Ndy = 0$.

Escrevendo (1) na forma

$$(2) \qquad \frac{\dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y}}{-N}\,dx = \frac{\dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y}}{M}\,dy = \frac{d\mu}{\mu},$$

é evidente que, se $\dfrac{\dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y}}{-N} = f(x)$, então $\mu = e^{\int f(x)\,dx}$ é um fator de integração; ou, se $\dfrac{\dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y}}{M} = g(y)$, $\mu = e^{\int g(y)\,dy}$ é um fator de integração. Além disso, se a equação é linear (isto é, $y' + Py = Q$), tem-se $M = Py - Q$, $N = 1$ e (2) transforma-se em $Pdx = \dfrac{-P}{Py - Q}dy = \dfrac{d\mu}{\mu}$ e $\mu = e^{\int P\,dx}$ é um fator de integração.

10) Achar um fator de integração para $(2x^3y - y^2)\,dx - (2x^4 + xy)\,dy = 0$. (Ver Problema 9 acima).

Temos:

$$M = 2x^3y - y^2, \quad N = -(2x^4 + xy), \quad \frac{\partial M}{\partial y} = 2x^3 - 2y, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -(8x^3 + y).$$

Procuramos uma solução, envolvendo μ, de

$$\frac{dx}{2x^4 + xy} = \frac{dy}{2x^3y - y^2} = \frac{d\mu}{\mu(y - 10x^3)}.$$

De $\dfrac{d\mu}{\mu(y - 10x^3)} = \dfrac{-2ydx - 3xdy}{-2y(2x^4 + xy) - 3x(2x^3y - y^2)} = \dfrac{-2ydx - 3xdy}{xy(y - 10x^3)}$ ou $\dfrac{d\mu}{\mu} = \dfrac{-2ydx - 3xdy}{xy}$ temos $\ln\mu = -2\ln x - 3\ln y$. Então, $\mu = x^{-2}y^{-3}$ é um fator de integração.

11) Achar a superfície integral de $x^2p + y^2q + z^2 = 0$ que passe pela hipérbole

$$xy = x + y, \quad z = 1.$$

O sistema auxiliar é: $\dfrac{dx}{x^2} = \dfrac{dy}{y^2} = \dfrac{dz}{-z^2}$.

De $\frac{dx}{x^2} = \frac{dz}{-z^2}$ temos $u = \frac{x+z}{xz} = a$ e de $\frac{dy}{y^2} = \frac{dz}{-z^2}$ temos $v = \frac{y+z}{yz} = b$.

Eliminamos primeiro x_0, y_0, z_0 entre $x_0 y_0 = x_0 + y_0$, $z_0 = 1$ e $u = \frac{x_0 + z_0}{x_0 z_0} = \frac{x_0 + 1}{x_0} = a$ e $v = \frac{y_0 + z_0}{y_0 z_0} = \frac{y_0 + 1}{y_0} = b$. Desta última vem: $x_0 = \frac{1}{a-1}$, $y_0 = \frac{1}{g-1}$. Substituindo em $x_0 y_0 = x_0 + y_0$, temos: $\frac{1}{(a-1)(b-1)} = \frac{1}{a-1} + \frac{1}{b-1}$ ou $a + b = 3$ como a relação que deve existir entre a e b. A equação da superfície procurada é:

$$a + b = u + v = \frac{x+z}{xz} + \frac{y+z}{yz} = 3 \quad \text{ou} \quad 2xy + z(x+y) = 3xyz.$$

PROBLEMAS PROPOSTOS

Achar a solução geral de cada uma das seguintes equações:

12) $p + q = z$ *Resp.:* $z = e^y \phi(x - y)$

13) $3p + 4q = 2$ *Resp.:* $3y - 4x = f(3z - 2x)$ ou $\phi(3y - 4x,\ 3z - 2x) = 0$

14) $yq - xp = z$ *Resp.:* $\phi(xy, xz) = 0$

15) $xzp + yzq = xy$ *Resp.:* $y = x\phi(xy - z^2)$

16) $x^2p + y^2q = z^2$ *Resp.:* $x - y = xy\phi(1/x - 1/z)$

17) $yp - xq + x^2 - y^2 = 0$ *Resp.:* $\phi(x^2 + y^2,\ xy - z) = 0$

18) $yzp - xzq = xy$ *Resp.:* $\phi(x^2 + y^2,\ y^2 + z^2) = 0$

19) $zp + yq = x$ *Resp.:* $x + z = y\phi(x^2 - z^2)$

20) $x(y - z)p + y(z - x)q = z(x - y)$ *Resp.:* $\phi(xyz,\ x + y + z) = 0$

21) $x(y^2 - z^2)p + y(z^2 - x^2)q = z(x^2 - y^2)$ *Resp.:* $\phi(xyz,\ x^2 + y^2 + z^2) = 0$

22) Achar a equação de tôdas as superfícies cujos planos tangentes passem pelo ponto $(0, 0, 1)$.

Sugestão: Resolver $xp + yq = z - 1$. *Resp.:* $z = 1 + x\phi(y/x)$

23) Achar a equação da superfície satisfazendo $4yzp + q + 2y = 0$ e passando por $y^2 + z^2 = 1$, $x + z = 2$. *Resp.:* $y^2 + z^2 + x + z = 3$

Capítulo XXX

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS NÃO-LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM

Soluções completa e singular. Seja a equação diferencial parcial não-linear de primeira ordem

$$f(x, y, z, p, q) = 0 \tag{1}$$

derivada de

$$g(x, y, z, a, b) = 0 \tag{2}$$

pela eliminação das constantes arbitrárias a e b. A relação (2) é chamada uma (ou a) solução completa de (1).

Esta solução representa uma família de superfícies, a dois parâmetros, que pode ter ou não uma envoltória. Para achar a envoltória (se houver) elimina-se a e b de

$$g = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial b} = 0.$$

Se o eliminante

$$\lambda(x, y, z) = 0 \tag{3}$$

satisfizer (1), será denominado a *solução singular* de (1); se

$$\lambda(x, y, z) = \xi(x, y, z) \cdot \eta(x, y, z)$$

e se $\xi = 0$ satisfizer (1) e $\eta = 0$ não, $\xi = 0$ é a solução singular. Como no caso das equações diferenciais ordinárias (Cap. X), a solução singular pode ser obtida da equação diferencial parcial pela eliminação de p e q de:

$$f = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial p} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial q} = 0.$$

EXEMPLO 1. Verifica-se fàcilmente que $z = ax + by - (a^2 + b^2)$ é uma solução completa de $z = px + qy - (p^2 + q^2)$. Eliminando a e b de

$$g = z - ax - by + a^2 + b^2 = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial a} = -x + 2a = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial b} = -y + 2b = 0,$$

temos: $z = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{4}(x^2 + y^2) = \frac{1}{4}(x^2 + y^2)$, que satisfaz à equação diferencial e é a solução singular. A solução completa representa uma família a dois parâmetros, de planos, envoltória do parabolóide $x^2 + y^2 = 4z$.

Solução geral. Se, na solução completa (2) uma das constantes, digamos b, fôr substituída por uma função conhecida da outra, digamos $b = \phi(a)$, a relação

$$g[x, y, z, a, \phi(a)] = 0$$

será uma família de superfícies, a um parâmetro, de (1). Se esta família tiver uma envoltória, sua equação poderá ser encontrada normalmente, eliminando a de

$$g[x, y, z, a, \phi(a)] = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial a} g[x, y, z, a, \phi(a)] = 0$$

e determinando a parte do resultado que satisfaz (1).

EXEMPLO 2. Façamos $b = \phi(a) = a$ na solução completa do Exemplo 1. O resultado da eliminação de a de $g = z - a(x+y) + 2a^2 = 0$ e $\frac{\partial g}{\partial a} = -(x+y) + 4a = 0$ é $z = \frac{1}{8}(x + y)^2$ que, mostra-se fàcilmente, satisfaz à equação diferencial do Exemplo 1. Esta equação é a de um cilindro parabólico com a geratriz paralela ao plano xOy.

O conjunto de soluções que se obtém fazendo-se variar $\phi(a)$ é chamado a *solução geral* da equação diferencial. Assim, do Exemplo 2, $8z = (x + y)^2$ está incluída na solução geral da equação diferencial do Exemplo 1.

Quando $b = \phi(a)$, ϕ arbitrário, é empregado, a eliminação de a entre

$$g = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial g}{\partial a} = 0$$

não é possível; assim, não podemos exprimir a solução geral como uma equação simples, englobando uma função arbitrária, tal como fizemos no caso da equação linear.

Soluções. Antes de considerarmos um método geral de obtenção de uma solução completa de (1) daremos processos especiais para quatro tipos de equações.

TIPO I: $f(p, q) = 0$. Exemplo: $p^2 - q^2 = 1$.

Do Probl. 3, Cap. XXVIII, segue-se que uma solução completa é

$$z = ax + h(a)y + c, \tag{4}$$

onde $f[a, h(a)] = 0$, e a e c são constantes arbitrárias.

As equações para a determinação da solução singular são:

$$z = ax + h(a)y + c, \quad 0 = x + h'(a)y, \quad 0 = 1.$$

Assim, não há solução singular.

A solução geral é obtida fazendo $c = \phi(a)$, ϕ arbitrário e eliminando a entre

$$z = ax + h(a)y + \phi(a) \quad \text{e} \quad 0 = x + h'(a)y + \phi'(a). \tag{5}$$

A primeira equação de (5) para uma determinada função $\phi(a)$ representa uma família de planos, a um parâmetro, e sua envoltória (uma parte da solução geral) é uma superfície desenvolvível. (Ver Probl. 10, Cap. XXVIII).

EXEMPLO 3. Resolver $p^2 - q^2 = 1$.

Temos: $f(p, q) = p^2 - q^2 - 1 = 0$, $f[a, h(a)] = a^2 - [h(a)]^2 - 1 = 0$ e $h(a) = (a^2 - 1)^{1/2}$. Uma solução completa é $z = ax + (a^2 - 1)^{1/2} y + c$.

Obtém-se uma forma mais simples, fazendo $a = \sec\alpha$; daí $h(a) = \operatorname{tg}\alpha$ o que dá:

$$z = x\sec\alpha + y\operatorname{tg}\alpha + c.$$

Fazendo $c = \phi(\alpha) = 0$, o resultado da eliminação de a de

$$z = x\sec\alpha + y\operatorname{tg}\alpha, \quad 0 = x\operatorname{tg}\alpha + y\sec\alpha \quad \text{ou} \quad 0 = x\operatorname{sen}\alpha + y$$

é

$$z^2 = x^2 - y^2.$$

Esta superfície desenvolvível (cone) é uma parte da solução geral da equação diferencial dada.

Note que podíamos ter tomado $h(a) = -(a^2 - 1)^{1/2}$ e obtido como uma solução completa:

$$z = ax - (a^2 - 1)^{1/2} y + c.$$

(Ver também Problemas 1-2).

TIPO II: $z = px + qy + f(p, q)$. Exemplo: $z = px + qy + 3p^{1/3}q^{1/3}$.

Do Probl. 4, Cap. XXVIII, segue-se que uma solução completa é:

$$z = ax + by + f(a, b), \tag{6}$$

conhecida como equação desenvolvida de Clairaut. Esta solução completa consiste de uma família de planos, a dois parâmetros. A solução singular (se houver) será uma superfície tendo a solução completa como seus planos tangentes.

Exemplo 4. Resolver $z = px + qy + 3p^{1/3}q^{1/3}$.

Uma solução completa é $z = ax + by + 3a^{1/3}b^{1/3}$.

As derivadas em relação a a e b são $x + a^{-2/3}b^{1/3} = 0$ e $y + a^{1/3}b^{-2/3} = 0$.

Então: $\quad ax + by = -2a^{1/3}b^{1/3}, \quad xy = a^{-1/3}b^{-1/3}$,

e, substituindo na solução completa, temos a solução singular:

$$z = a^{1/3}b^{1/3} = 1/xy \quad \text{ou} \quad xyz = 1.$$

(Ver também Problemas 3-4).

Tipo III: $f(z, p, q) = 0$. Exemplo: $z = p^2 + q^2$.

Supor $z = F(x + ay) = F(u)$, onde a é a constante arbitrária. Então:

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz}{du}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{dz}{du} \quad \text{e} \quad q = \frac{dz}{du}\frac{\partial u}{\partial y} = a\frac{dz}{du}.$$

Entrando com êsses valores na equação diferencial dada, temos uma equação diferencial ordinária de primeira ordem:

$$f\left(z, \frac{dz}{du}, a\frac{dz}{du}\right) = 0$$

cuja solução é a solução completa procurada.

Exemplo 5. Resolver $z = p^2 + q^2$.

Faz-se $z = F(x + ay) = F(u)$. Daí $p = dz/du$, $q = a\,dz/du$ e a equação dada reduz-se a $z = \left(\frac{dz}{du}\right)^2 + a^2\left(\frac{dz}{du}\right)^2$.

Resolvendo $\frac{dz}{du} = \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{1 + a^2}}$ ou $\frac{dz}{\sqrt{z}} = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}}du$, temos:

$$2\sqrt{z} = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}}u + k = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}}(u + b).$$

Assim, uma solução completa é $4(1 + a^2)z = (x + ay + b)^2$, que é uma família de cilindros parabólicos.

Derivando em relação a a e b, temos:

$$8az - 2(x + ay + b)y = 0, \quad x + ay + b = 0.$$

A solução singular é $z = 0$.

(Ver também Problemas 5-7)

TIPO IV: $f_1(x, p) = f_2(y, q)$. Exemplo: $p - x^2 = q + y^2$.

Faz-se $f_1(x, p) = a$, $f_2(y, q) = a$, onde a é uma constante arbitrária. Daí:

$$p = F_1(x, a) \qquad \text{e} \qquad q = F_2(y, a).$$

Como z é uma função de x e y,

$$dz = pdx + qdy = F_1(x, a)\, dx + F_2(y, a)\, dy.$$

Então:

$$z = \int F_1(x, a)\, dx + \int F_2(y, a)\, dy + b, \tag{7}$$

que contém duas constantes arbitrárias, é a solução completa procurada.

EXEMPLO 6. Resolver $p - q = x^2 + y^2$ ou $p - x^2 = q + y^2$.

Fazendo $p - x^2 = a$, $q + y^2 = a$, temos: $p = a + x^2$, $q = a - y^2$.

Integrando $dz = pdx + qdy = (a + x^2)\, dx + (a - y^2)\, dy$, a solução completa procurada é $z = ax + x^3/3 + ay - y^3/3 + b$. Não há solução singular.

(Ver também Problemas 8-9).

Transformações. Como no caso das equações diferenciais ordinárias, algumas vêzes é possível achar uma transformação das variáveis, que reduzirá a equação dada a um dos tipos apresentados acima.

A combinação px, por exemplo, sugere a transformação $X = \ln x$, porque acarreta

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial X}\,\frac{dX}{dx} = \frac{1}{x}\,\frac{\partial z}{\partial X} \qquad \text{e} \qquad px = \frac{\partial z}{\partial X}.$$

E $q = px + p^2x^2$ transforma-se em

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial X} + \left(\frac{\partial z}{\partial X}\right)^2,$$

do Tipo I.

Anàlogamente, a combinação qy sugere a transformação $Y = \ln y$.

A presença de $\frac{p}{z}$, $\frac{q}{z}$ numa equação sugere a transformação $Z = \ln z$, o que dá

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{dZ}\,\frac{\partial Z}{\partial x} = z\,\frac{\partial Z}{\partial x} \quad \text{e} \quad \frac{p}{z} = \frac{\partial Z}{\partial x};$$

anàlogamente:

$$\frac{q}{z} = \frac{\partial Z}{\partial y}.$$

Então, $\frac{q}{z} = \left(\frac{p}{z}\right)^2$ transforma-se em

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^2, \quad \text{do Tipo I.}$$

(Ver também Problemas 10-14).

Solução completa. Método de Charpit. Consideremos a equação parcial não-linear

$$(1) \qquad f(x, y, z, p, q) = 0.$$

Como z é uma função de x e y, segue-se que

$$(8) \qquad dz = pdx + qdy.$$

Suponhamos que $p = u(x, y, z, a)$, onde a é uma constante arbitrária, seja substituída na equação (1). Resolvendo, obtemos: $q = v(x, y, z, a)$. Para êstes valores de p e q, (8) transforma-se em:

$$(8_1) \qquad dz = u\,dx + v\,dy.$$

Se (8_1) puder ser integrada, temos:

$$(9) \qquad g(x, y, z, a, b) = 0,$$

que é uma solução completa de (1).

Exemplo 7. Resolver $pq + qx = y$.

Tomamos $p = a - x$ e substituímos em $pq + qx = y$. Daí: $q = y/a$.

Substituindo em $dz = p\,dx + q\,dy$, temos: $dz = (a - x)\,dx + (y/a)\,dy$, uma equação integrável, com solução

$$z = ax - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}y^2/a + k \quad \text{ou} \quad 2az = 2a^2x - ax^2 + y^2 + b.$$

Como o processo acima depende de se fazer uma escolha apropriada para p, não pode ser encarado como um processo padrão. Daremos agora um método geral para resolver (1). Consiste em achar uma equação

$$(10) \qquad F(x, y, z, p, q) = 0$$

tal que (1) e (10) possam ser resolvidas dando $p = P(x, y, z)$ e $q = Q(x, y, z)$, (isto é, dando:

$$\text{(11)} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial p} & \dfrac{\partial f}{\partial q} \\ \dfrac{\partial F}{\partial p} & \dfrac{\partial F}{\partial q} \end{vmatrix} \neq 0, \text{ idênticamente}),$$

e tal que para êstes valores de p e q a equação diferencial total

$$\text{(8)} \qquad dz = p\,dx + q\,dy = P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy$$

seja integrável, isto é,

$$P\frac{\partial Q}{\partial z} - Q\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} = 0.$$

Derivando (1) e (10) parcialmente, em relação a x e y, encontramos:

$$\text{(12)} \qquad \frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x} = 0,$$

$$\text{(13)} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial y} = 0,$$

$$\text{(14)} \qquad \frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x} = 0,$$

$$\text{(15)} \qquad \frac{\partial F}{\partial y} + q\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial y} = 0.$$

Multiplicando

(12) por $\dfrac{\partial F}{\partial p}$, (13) por $\dfrac{\partial F}{\partial q}$, (14) por $-\dfrac{\partial f}{\partial p}$, (15) por $-\dfrac{\partial f}{\partial q}$,

e somando, temos $\left(\text{notando que } \dfrac{\partial p}{\partial y} = \dfrac{\partial q}{\partial x}\right)$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{\partial F}{\partial p} + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{\partial F}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial F}{\partial y} -$$

$$-\left(p\frac{\partial f}{\partial p} + q\frac{\partial f}{\partial q}\right)\frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

Esta é uma equação diferencial parcial linear em F, considerada como uma função das variáveis independentes x, y, z, p, q. O sistema auxiliar é

$$(16) \quad \frac{dp}{\frac{\partial f}{\partial x}+p\frac{\partial f}{\partial z}} = \frac{dq}{\frac{\partial f}{\partial y}+q\frac{\partial f}{\partial z}} = \frac{dx}{-\frac{\partial f}{\partial p}} = \frac{dy}{-\frac{\partial f}{\partial q}} = \frac{dz}{-\left(p\frac{\partial f}{\partial p}+q\frac{\partial f}{\partial q}\right)} = \frac{dF}{0}.$$

Podemos, então, tomar para (10) qualquer solução dêste sistema que envolva p ou q, ou ambos, que contenha uma constante arbitrária e para a qual (11) esteja satisfeita.

EXEMPLO 8. Resolver $q = -xp + p^2$.

Temos: $f = p^2 - xp - q$, de modo que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -p, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial p} = 2p - x, \quad \frac{\partial f}{\partial q} = -1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z} = -p,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z} = 0, \quad -\left(p\frac{\partial f}{\partial p} + q\frac{\partial f}{\partial q}\right) = -2p^2 + xp + q.$$

O sistema auxiliar (16) é: $\dfrac{dp}{-p} = \dfrac{dq}{0} = \dfrac{dx}{-2p+x} = \dfrac{dy}{1} = \dfrac{dz}{-2p^2+xp+q}$.

De $\dfrac{dp}{-p} = \dfrac{dy}{1}$, temos: $\ln p = -y + \ln a$ ou $p = ae^{-y}$.

Usando a equação diferencial dada: $q = -xp + p^2 = -axe^{-y} + a^2e^{-2y}$.

Então $dz = p\,dx + q\,dy$ transforma-se em $dz = ae^{-y}\,dx + (-axe^{-y} + a^2e^{-2y})\,dy$.

Integrando: $\qquad z = axe^{-y} - \frac{1}{2}a^2e^{-2y} + b$.

Não há solução singular. (Ver também Problema 15).

PROBLEMAS RESOLVIDOS

(Nestas soluções, as equações que levam à solução geral não serão dadas).

TIPO I: $f(p, q) = 0$.

1) Resolver $p^2 + q^2 = 9$.

Uma solução completa é $z = ax + by + c$, onde $a^2 + b^2 = 9$.

As equações para determinar a solução singular são:

$$z = ax + \sqrt{9-a^2}\,y + c, \quad 0 = x - \frac{a}{\sqrt{9-a^2}}\,y, \quad 0 = 1.$$

Assim, não há solução singular.

2) Resolver $pq + p + q = 0$.

Uma solução completa é: $z = ax + by + c$, onde $ab + a + b = 0$, ou $z = ax - \frac{a}{a+1} y + c$.

Não há solução singular.

TIPO II: $z = px + qy + f(p, q)$.

3) Resolver $z = px + qy + p^2 + pq + q^2$.

Uma solução completa é: $z = ax + by + a^2 + ab + b^2$.

Derivando a solução completa em relação a a e b, temos:

$$0 = x + 2a + b, \quad 0 = y + a + 2b.$$

Daí: $a = (y - 2x)/3$, $b = (x - 2y)/3$ e substituindo na solução completa, temos a solução singular: $3z = xy - x^2 - y^2$.

4) Resolver $z = px + qy + p^2q^2$.

Uma solução completa é: $z = ax + by + a^2b^2$. As equações obtidas por derivação em relação a a e b são: $0 = x + 2ab^2$ e $0 = y + 2a^2b$.

Então: $a = -\sqrt[3]{\frac{y^2}{2x}}$, $b = -\sqrt[3]{\frac{x^2}{2y}}$ e a solução singular é:

$$z = -x\sqrt[3]{\frac{y^2}{2x}} - y\sqrt[3]{\frac{x^2}{2y}} + \sqrt[3]{\frac{x^2y^2}{16}} = -\frac{3}{4}\sqrt[3]{4}\, x^{2/3}y^{2/3}.$$

TIPO III: $f(z, p, q) = 0$.

5) Resolver $4(1 + z^3) = 9z^4pq$.

Fazemos: $z = F(x + ay) = F(u)$.

Daí: $p = \frac{dz}{du}$, $q = a\frac{dz}{du}$, e a equação dada transforma-se em:

$$4(1 + z^3) = 9az^4\left(\frac{dz}{du}\right)^2 \quad \text{ou} \quad \frac{3\sqrt{a\, z^2}}{\sqrt{1 + z^3}}\, dz = 2\, du.$$

Integrando: $\sqrt{a(1 + z^3)} = u + b$, e uma solução completa é

$$a(1 + z^3) = (x + ay + b)^2.$$

Derivando em relação a a e b, temos:

$$1 + z^3 = 2(x + ay + b)\, y \quad \text{e} \quad 0 = 2(x + ay + b),$$

e a solução singular é: $z^3 + 1 = 0$.

6) Resolver $p(1-q^2) = q(1-z)$.

Fazemos: $z = F(x+ay) = F(u)$.

Daí: $p = \dfrac{dz}{du}$, $q = a\dfrac{dz}{du}$, e a equação dada transforma-se em:

$$\left(\frac{dz}{du}\right)\left[1-a^2\left(\frac{dz}{du}\right)^2\right] = a\frac{dz}{du}(1-z) \quad \text{ou} \quad \left(\frac{dz}{du}\right)\left[1-a+az-a^2\left(\frac{dz}{du}\right)^2\right] = 0.$$

Então:

$$\frac{dz}{du} = 0 \ \text{ e } \ z = c; \ \text{ ou } \ 1-a+az-a^2\left(\frac{dz}{du}\right)^2 = 0, \ \frac{a\,dz}{\sqrt{1-a+az}} = du$$

$$\text{e} \ \ 2\sqrt{1-a+az} = u+b = x+ay+b \ \text{ ou } \ 4(1-a+az) = (x+ay+b)^2.$$

$z = c$ e $4(1-a+az) = (x+ay+b)^2$ são soluções; a última é uma solução completa. Com ela, as equações para obter a solução singular são:

$$g = 4(1-a+az)-(x+ay+b)^2 = 0, \ \frac{\partial g}{\partial a} = 4(-1+z)-2y(x+ay+b) = 0,$$

$$\frac{\partial g}{\partial b} = -2(z+ay+b) = 0; \ \text{ não há solução singular.}$$

7) Resolver $1+p^2 = qz$.

Fazemos: $z = F(x+ay) = F(u)$.

Daí: $p = \dfrac{dz}{du}$, $q = a\dfrac{dz}{du}$, e a equação dada transforma-se em:

$$\left(\frac{dz}{du}\right)^2 - az\frac{dz}{du} + 1 = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{dz}{az-\sqrt{a^2z^2-4}} = \tfrac{1}{2}\,du.$$

Racionalizando o primeiro membro da última equação, temos: $(az+\sqrt{a^2z^2-4})\,dz = 2\,du$, cuja solução é:

$$\tfrac{1}{2}az^2 + \frac{1}{a}\left[\frac{az}{2}\sqrt{a^2z^2-4} - 2\ln(az+\sqrt{a^2z^2-4})\right] = 2(u+b).$$

Uma solução completa é:

$$a^2z^2 + az\sqrt{a^2z^2-4} - 4\ln(az+\sqrt{a^2z^2-4}) = 4a(x+ay+b).$$

Note que $a^2z^2 - az\sqrt{a^2z^2-4} + 4\ln(az+\sqrt{a^2z^2-4}) = 4a(x+ay+b)$, obtida de $\dfrac{dz}{az+\sqrt{a^2z^2-4}} = \tfrac{1}{2}\,du$, é, também, uma solução completa.

TIPO VI : $f_1(x, p) = f_2(y, q)$.

8) Resolver $\sqrt{p} - \sqrt{q} + 3x = 0$ ou $\sqrt{p} + 3x = \sqrt{q}$.

Façamos : $\sqrt{p} + 3x = a$ e $\sqrt{q} = a$.

Daí : $p = (a - 3x)^2$ e $q = a^2$. Uma solução completa é :

$$z = \int p\,dx + \int q\,dy + b = \int (a - 3x)^2\,dx + a^2 \int dy + b$$

ou
$$z = -\frac{1}{9}(a - 3x)^3 + a^2 y + b.$$

Não há solução singular.

9) Resolver $q = -px + p^2$.

Façamos : $p^2 - px = a$ e $p = a$. Daí : $p = \frac{1}{2}(x + \sqrt{x^2 + 4a})$.

Uma solução completa é :

$$z = \tfrac{1}{2} \int (x + \sqrt{x^2 + 4a})\,dx + a \int dy + b$$

ou
$$z = \tfrac{1}{4}(x^2 + x\sqrt{x^2 + 4a}) + a \ln (x + \sqrt{x^2 + 4a}) + ay + b.$$

Outra solução completa é obtida pelo método de Charpit, no Exemplo 8.

Não há solução singular.

USO DE TRANSFORMAÇÕES

10) Resolver $pq = x^m y^n z^{2l}$ ou $\dfrac{pz^{-l}}{x^m} \cdot \dfrac{qz^{-l}}{y^n} = 1$.

A transformação

$$Z = \frac{z^{1-l}}{1-l},\quad X = \frac{x^{m+1}}{m+1},\quad Y = \frac{y^{n+1}}{n+1},\quad \frac{\partial Z}{\partial X} = \frac{\partial Z}{\partial x}\frac{dx}{dX} = z^{-l} p \frac{1}{x^m},$$

$$\frac{\partial Z}{\partial Y} = \frac{\partial Z}{\partial y}\frac{dy}{dY} = z^{-l} q \frac{1}{y^n}$$

reduz a equação diferencial dada a $\dfrac{\partial Z}{\partial X} \cdot \dfrac{\partial Z}{\partial Y} = 1$.

Esta equação é do Tipo I e sua solução é : $Z = aX + \dfrac{1}{a} Y + c$.

Uma solução completa da equação dada é :

$$\frac{z^{1-l}}{1-l} = a\frac{x^{m+1}}{m+1} + \frac{y^{n+1}}{a(n+1)} + c.$$

Não há solução singular.

11) Resolver $x^2 p^2 + y^2 q^2 = z$.

1) A transformação

$$X = \ln x,\ \ Y = \ln y,\ \ Z = 2z^{\frac{1}{2}},\ \ \frac{\partial Z}{\partial X} = \frac{\partial Z}{\partial x}\frac{dx}{dX} = pxz^{-\frac{1}{2}},$$

$$\frac{\partial Z}{\partial Y} = \frac{\partial Z}{\partial y}\frac{dy}{dY} = qyz^{-\frac{1}{2}}$$

reduz a equação dada a

$$z\left(\frac{\partial Z}{\partial X}\right)^2 + z\left(\frac{\partial Z}{\partial Y}\right)^2 = z \quad \text{ou} \quad \left(\frac{\partial Z}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial Y}\right)^2 = 1, \text{ do Tipo I.}$$

Uma solução completa é:

$$Z = aX + bY + c \quad \text{ou} \quad 4z = (a \ln x + b \ln y + c)^2, \quad \text{onde} \quad a^2 + b^2 = 1 .$$

A solução singular é: $z = 0$.

2) A transformação

$$X = \ln x,\ \ Y = \ln y,\ \ p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial X}\frac{dX}{dx} = \frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial X},\ \ q = \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial Y}$$

reduz a equação diferencial dada a $\left(\frac{\partial z}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial Y}\right)^2 = z$, do Tipo III.

Fazemos: $z = F(X + aY) = F(u)$.

Então: $$\frac{\partial z}{\partial X} = \frac{dz}{du}\frac{\partial u}{\partial X} = \frac{dz}{du},\quad \frac{dz}{dY} = a\frac{dz}{du}$$

e $$\left(\frac{dz}{du}\right)^2 + a^2\left(\frac{dz}{du}\right)^2 = z \quad \text{ou} \quad \sqrt{1+a^2}\,\frac{dz}{\sqrt{z}} = du.$$

Integrando: $2\sqrt{1+a^2}\, z^{\frac{1}{2}} = u + b = X + aY + b = \ln x + a \ln y + b$

Uma solução completa é: $4(1+a^2)z = (\ln x + a \ln y + b)^2$.

A solução singular é: $z = 0$.

12) Resolver $4xyz = pq + 2px^2y + 2qxy^2$.

Fazemos: $x = X^{\frac{1}{2}},\ y = Y^{\frac{1}{2}}$.

Então: $p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial X}\frac{dX}{dx} = 2X^{\frac{1}{2}}\frac{\partial z}{X\partial}$ e $q = \frac{\partial z}{\partial Y}\frac{dY}{dy} = 2Y^{\frac{1}{2}}\frac{\partial z}{\partial Y}$.

Substituindo na equação dada, temos: $z = X\frac{\partial z}{\partial X} + Y\frac{\partial z}{\partial Y} + \frac{\partial z}{\partial X}\frac{\partial z}{\partial Y}$ do Tipo II.

Uma solução completa é: $z = aX + bY + ab$ ou $z = ax^2 + by^2 + ab$.

Eliminando a e b desta equação e de $0 = x^2 + b$, $0 = y^2 + a$, obtidas por derivação da primeira em relação a a e b, encontra-se a solução singular: $z + x^2y^2 = 0$.

13) Resolver $p^2x^2 = z(z - qy)$.

A transformação

$$Y = \ln y, \quad X = \ln x, \quad p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial X}\frac{dX}{dx} = \frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial X}, \quad q = \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial Y}$$

reduz a equação dada a $A)$ $\left(\frac{\partial z}{\partial X}\right)^2 = z\left(z - \frac{\partial z}{\partial Y}\right)$, do Tipo III.

Fazemos: $z = F(X + aY) = F(u)$. Daí: $\frac{\partial z}{\partial X} = \frac{dz}{du}$, $\frac{\partial z}{\partial Y} = a\frac{dz}{du}$ e

$A)$ transforma-se em $\left(\frac{dz}{du}\right)^2 = z^2 - az\frac{dz}{du}$.

Então: $\frac{dz}{du} = \frac{1}{2}z(\sqrt{a^2+4} - a)$, $2\frac{dz}{z} = (\sqrt{a^2+4} - a)\,du$

e $\ln z^2 = (\sqrt{a^2+4} - a)(u + b)$.

Uma solução completa é: $\ln z^2 = (\sqrt{a^2+4} - a)(\ln x + a\ln y + b)$.

Não há solução singular.

14) Resolver $p^2 + q^2 = z^2(x + y)$ ou $\left(\frac{p}{z}\right)^2 + \left(\frac{q}{z}\right)^2 = x + y$.

A transformação $Z = \ln z$, $p = z\frac{\partial Z}{\partial x}$, $q = z\frac{\partial Z}{\partial y}$
reduz a equação dada a

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)^2 = x + y \quad \text{ou} \quad \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^2 - x = y - \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)^2, \text{ do Tipo IV.}$$

Fazendo: $\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^2 - x = a = y - \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)^2$. Daí: $\frac{\partial Z}{\partial x} = (a + x)^{\frac{1}{2}}$

e $\frac{\partial Z}{\partial y} = (y - a)^{\frac{1}{2}}$.

Uma solução completa é: $Z = \int (a + x)^{\frac{1}{2}}\,dx + \int (y - a)^{\frac{1}{2}}\,dy + b$

ou $$\ln z = \frac{2}{3}(a + x)^{3/2} + \frac{2}{3}(y - a)^{3/2} + b.$$

MÉTODO DE CHARPIT

15) Resolver $16p^2 z^2 + 9q^2 z^2 + 4z^2 - 4 = 0$.

Seja: $f(x, y, z, p, q) = 16p^2 z^2 + 9q^2 z^2 + 4z^2 - 4$.

Daí: $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 = \dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial f}{\partial z} = 32p^2 z + 18q^2 z + 8z$, $\dfrac{\partial f}{\partial p} = 32pz^2$, $\dfrac{\partial f}{\partial q} = 18qz^3$

e o sistema auxiliar $\dfrac{dp}{\dfrac{\partial f}{\partial x} + p\dfrac{\partial f}{\partial z}} = \dfrac{dq}{\dfrac{\partial f}{\partial y} + q\dfrac{\partial f}{\partial z}} = \dfrac{dx}{-\dfrac{\partial f}{\partial p}} = \dfrac{dy}{-\dfrac{\partial f}{\partial q}} = \dfrac{dz}{-\left(p\dfrac{\partial f}{\partial p} + q\dfrac{\partial f}{\partial q}\right)}$

é
$$\frac{dp}{32p^3 z + 18pq^2 z + 8pz} = \frac{dq}{32p^2 qz + 18q^3 z + 8qz} =$$
$$= \frac{dx}{-32pz^2} = \frac{dy}{-18qz^2} = \frac{dz}{-32p^2 z^2 - 18q^2 z^2}.$$

Usando os multiplicadores $4z$, 0, 1, 0, $4p$, temos:

$$4z(32p^3 z + 18pq^2 z + 8pz) + 1(-32pz^2) + 4p(-32p^2 z^2 - 18q^2 z^2) = 0$$

e
$$dx + 4p\,dz + 4z\,dp = 0.$$

Então: $x + 4pz = a$ e $p = -\dfrac{x - a}{4z}$. Substituindo na equação diferencial dada, encontramos: $(x - a)^2 + 9q^2 z^2 + 4z^2 - 4 = 0$. Usando a raiz $q = \dfrac{2}{3z}\sqrt{1 - z^2 - \frac{1}{4}(x - a)^2}$, $dz = p\,dx + q\,dy = -\dfrac{x - a}{4z}dx + $ $+ \dfrac{2}{3z}\sqrt{1 - z^2 - \frac{1}{4}(x - a)^2}\,dy$ ou $dy = \dfrac{3\left[z\,dz + \frac{1}{4}(x - a)\,dx\right]}{2\sqrt{1 - z^2 - \frac{1}{4}(x - a)^2}}$.

Então: $y - b = -\dfrac{3}{2}\sqrt{1 - z^2 - \frac{1}{4}(x - a)^2}$ ou $\dfrac{(x - a)^2}{4} + \dfrac{(y - b)^2}{9/4} + z^2 = 1$ é uma solução completa. É uma família de elipsóides com centros no plano xOy. Os semi-eixos dos elipsóides são: 2 unidades, paralelo ao eixo dos x; 3/2 unidades, paralelo ao eixo dos y; e 1 unidade paralelo ao eixo dos z. A solução singular é dada pelos planos paralelos $z = \pm 1$.

Outra solução completa pode ser encontrada, notando que a equação é do Tipo III. Usando $F(x + ay) = F(u)$ e fazendo $p = \dfrac{dz}{du}$ e $q = a\dfrac{dz}{du}$, a equação dada transforma-se em:

$$16z^2\left(\frac{dz}{du}\right)^2 + 9a^2z^2\left(\frac{dz}{du}\right)^2 + 4z^2 - 4 = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{z\,dz}{\sqrt{1 - z^2}} = \frac{2}{\sqrt{16 + 9a^2}}du.$$

Daí: $$-\sqrt{1 - z^2} = \frac{2}{\sqrt{16 + 9a^2}}(u + b) = \frac{2}{\sqrt{16 + 9a^2}}(x + ay + b).$$

Esta solução completa $(16 + 9a^2)(1 - z^2) = 4(x + ay + b)^2$ representa uma família de cilindros elíticos com a geratriz paralela ao plano xOy. O eixo maior de uma seção transversal se situa no plano xOy e o eixo menor é de 2 unidades e paralelo ao eixo dos z.

PROBLEMAS PROPOSTOS

Achar uma solução completa e a solução singular (se houver).

16) $p = q^2$ *Resp.:* $z = b^2 x + by + c$

17) $p^2 + p = q^2$ *Resp.:* $z = ax + by + c$ onde $b^2 = a^2 + a$

18) $pq = p + q$ *Resp.:* $(b-1) z = bx + b(b-1) y + c$

19) $z = px + qy + pq$ *Resp.:* $z = ax + by + ab$; s.s., $z = -xy$

20) $p^2 + q^2 = 4z$ *Resp.:* $z(1 + a^2) = (x + ay + b)^2$; s.s., $z = 0$

21) $pz = 1 + q^2$ *Resp.:* $z^2 - z\sqrt{z^2 - 4a^2} + 4a^2 \ln (z + \sqrt{z^2 - 4a^2}) = 4(x + ay + b)$

22) $z^2(p^2 + q^2 + 1) = 1$ *Resp.:* $(1 + a^2)(1 - z^2) = (x + ay + b)^2$; s.s., $z^2 - 1 = 0$

23) $p^2 + pq = 4z$ *Resp.:* $(1 + a) z = (x + ay + b)^2$; s.s., $z = 0$

24) $p^2 - x = q^2 - y$ *Resp.:* $3(z - b) = 2(x + a)^{3/2} + 2(y + a)^{3/2}$

25) $yp - x^2 q^2 = x^2 y$ *Resp.:* $4(a - 1) y^3 = (3z - ax^3 - b)^2$

26) $(1 - y^2) xq^2 + y^2 p = 0$ *Resp.:* $(2z - ax^2 + b)^2 = 4a(y^2 - 1)$

27) $x^4 p^2 - yzq - z^2 = 0$ *Resp.:* $x \ln z = a + (a^2 - 1) x \ln y + bx$
Sugestão: Use $X = 1/x$, $Y = \ln y$, $Z = \ln z$.

28) $x^4 p^2 + y^2 zq - 2z^2 = 0$ *Resp.:* $xy \ln z = ay + (a^2 - 2) x + bxy$
Sugestão: Use $X = 1/x$, $Y = 1/y$, $Z = \ln z$.

29) $x^4 p^2 + y^2 q = 0$ *Resp.:* $x^2 (zy + a + by)^2 + ay^2 = 0$

30) $2py^2 - q^2 z = 0$ *Resp.:* $z^2 = a^2 x + ay^2 + b$

31) $q = xp + p^2$ *Resp.:* $z = 2axe^y + 2a^2 e^{2y} + b$

32) $zp^2 - y^2 p + y^2 q = 0$ *Resp.:* $yz^2 = 2(axy + ay^2 + a^2 + by)$
Sugestão: $\dfrac{dp}{p^3} = \dfrac{dz}{-p^2 z}$; $pz = a$ e $q = \dfrac{a}{z}\left(1 - \dfrac{a}{y^2}\right)$.

33) $pq + 2x(y + 1) p + y(y + 2) q - 2(y + 1) z = 0$
Resp.: $z = ax + b(y^2 + 2y + a)$; s.s., $z + x(y^2 + 2y) = 0$

Capítulo XXXI

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS HOMOGÊNEAS DE ORDEM SUPERIOR COM COEFICIENTES CONSTANTES

Uma equação tal como

$$(1) \qquad (x^2 + y^2)\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + 2x\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 5xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + $$

$$+ x^3\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} + yz = e^{x+y}$$

linear na variável dependente z e em suas derivadas parciais é denominada uma equação diferencial parcial. A ordem de (1) é a terceira, que é a da derivada de ordem mais elevada.

Uma equação diferencial linear tal como

$$(2) \qquad x^2\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + xy\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} + 2\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = x^2 + y^3,$$

em que as derivadas são tôdas da mesma ordem, será chamada homogênea, não obstante não haver concordância entre os autores na aplicação dêsse têrmo.

Equações diferenciais lineares homogêneas com coeficientes constantes. Consideremos

$$(3) \qquad A\frac{\partial z}{\partial x} + B\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

$$(4) \qquad A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

$$(5) \qquad A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x + 2y,$$

onde os números A, B, C são constantes reais.

Será visto, em prosseguimento, que os métodos para a solução das equações (3) - (5) são paralelos aos usados na solução da equação diferencial ordinária linear

$$f(D)y = Q(x) \quad \text{onde} \quad D = \frac{d}{dx}.$$

Empregaremos dois operadores, $D_x = \frac{\partial}{\partial x}$ e $D_y = \frac{\partial}{\partial y}$, de modo que as equações (3) - (5) possam ser escritas:

$$(3') \qquad f(D_x, D_y)\, z = (AD_x + BD_y)\, z = 0,$$

$$(4') \qquad f(D_x, D_y)\, z = (AD_x^2 + BD_xD_y + CD_y^2)\, z = 0,$$

$$(5') \qquad f(D_x, D_y)\, z = (AD_x^2 + BD_xD_y + CD_y^2)\, z = x + 2y.$$

A equação (3′) é de primeira ordem e a solução geral (Capítulo XXIX) é

$$z = \phi(y - \frac{B}{A}x), \qquad \phi \text{ arbitrário.}$$

Suponhamos, agora, que $z = \phi(y + mx) = \phi(u)$, ϕ arbitrário, é uma solução de (4′); substituindo

$$D_xz = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{d\phi}{du}\,\frac{\partial u}{\partial x} = m\,\frac{d\phi}{du}, \qquad D_yz = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{d\phi}{du}\,\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{d\phi}{du}$$

em (4′), temos:

$$\left(\frac{d\phi}{du}\right)^2 (Am^2 + Bm + C) = 0.$$

Como ϕ é arbitrário, $d\phi/du$ não é idênticamente nulo; assim, m é uma das raízes $m = m_1,\ m_2$ de $Am^2 + Bm + C = 0$. Se $m_1 \neq m_2$, $z = \phi_1(y + m_1x)$ e $z = \phi_2(y + m_2x)$ são soluções distintas de (4′). Evidentemente,

$$z = \phi_1(y + m_1x) + \phi_2(y + m_2x)$$

é também uma solução; encerra duas funções arbitrárias e é a solução geral.

Mais geralmente, se

$$(6) \quad f(D_x, D_y)z = (D_x - m_1D_y)(D_x - m_2D_y) \cdots\cdots (D_x - m_nD_y)z = 0$$

e se $m_1 \neq m_2 \neq \cdots\cdots\cdots \neq m_n$, então

$$(7) \quad z = \phi_1(y + m_1x) + \phi_2(y + m_2x) + \cdots\cdots\cdots + \phi_n(y + m_nx)$$

é a solução geral de $f(D_x, D_y)z = 0$.

EXEMPLO 1. Resolver $(D_x^2 - D_xD_y - 6D_y^2)z = (D_x + 2D_y)(D_x - 3D_y)z = 0$.

Temos: $m_1 = -2$, $m_2 = 3$ e a solução geral é: $y = \phi_1(y - 2x) + \phi_2(y + 3x)$.

(Ver também Problemas 1-2).

Se $m_1 = m_2 = \cdots\cdots = m_k \neq m_{k+1} \neq \cdots\cdots \neq m_n$, de modo que (6) transforme-se em

$$(6') \quad f(D_x, D_y)z = (D_x - m_1D_y)^k(D_x - m_{k+1}D_y)\cdots\cdots(D_x - m_nD_y)z = 0$$

a parte da solução geral, dada pelos k fatôres iguais, correspondentes, é

$$\phi_1(y+m_1x) + x\phi_2(y+m_1x) + x^2\phi_3(y+m_1x) + \cdots\cdots + x^{k-1}\phi_k(y+m_1x)$$

e a solução geral de (6′) é

$$z = \phi_1(y + m_1x) + x\phi_2(y + m_1x) + \cdots\cdots + \\ + x^{k-1}\phi_k(y + m_1x) + \phi_{k+1}(y + m_{k+1}x) + \cdots\cdots + \phi_n(y + m_nx),$$

onde $\phi_1, \phi_2, \cdots\cdots \phi_n$ são funções arbitrárias.

EXEMPLO 2. Resolver

$$(D_x^3 - D_x^2D_y - 8D_xD_y^2 + 12D_y^3)z = (D_x - 2D_y)^2(D_x + 3D_y)z = 0.$$

Temos: $m_1 = m_2 = 2$, $m_3 = -3$ e a solução geral é:

$$z = \phi_1(y + 2x) + x\phi_2(y + 2x) + \phi_3(y - 3x).$$

(Ver também Problemas 3-4).

Se um dos números, digamos m_1, de (6) fôr imaginário, um outro, digamos m_2, será o conjugado de m_1. Sejam $m_1 = a + bi$ e $m_2 = a - bi$ de modo que (6) transforme-se em:

$$(6'') \quad f(D_x, D_y)z = \\ = [D_x - (a+bi)D_y][D_x - (a-bi)D_y](D_x - m_3D_y)\cdots\cdots(D_x - m_nD_y)z = 0.$$

A parte da solução geral dada pelos dois primeiros fatôres é:

$$\phi_1(y+ax+ibx) + \phi_1(y+ax-ibx) + i[\phi_2(y+ax+ibx) - \phi_2(y+ax-ibx)],$$

(ϕ_1, ϕ_2 arbitrários, funções reais), e a solução geral de (6″) é:

$$z = \phi_1(y + ax + ibx) + \phi_1(y + ax - ibx) + i[\phi_2(y + ax + ibx) - \\ - \phi_2(y + ax - ibx)] + \phi_3(y + m_3x) + \cdots\cdots\cdots + \phi_n(y + m_nx).$$

EXEMPLO 3. Resolver $(D_x^4 - D_x^3 D_y + 2D_x^2 D_y^2 - 5D_x D_y^3 + 3D_x^4) z =$

$$= (D_x - D_y)^2 [D_x + \tfrac{1}{2}(1 + i\sqrt{11}) D_y] [D_x + \tfrac{1}{2}(1 - i\sqrt{11}) D_y] z = 0.$$

Temos: $m_1 = m_2 = 1$, $m_3 = -\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{11})$, $m_4 = -\frac{1}{2}(1 - i\sqrt{11})$, e a solução geral é: $z = \phi_1(y + x) + x\phi_2(y + x) + \phi_3 [y - \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{11}) x] +$

$$+ \phi_3 [y - \tfrac{1}{2}(1 - i)\sqrt{11}) x] + i [\phi_4 \{y - \tfrac{1}{2}(1 + i\sqrt{11}) x\} -$$

$$- \phi_4 \{y - \tfrac{1}{2}(1 - i\sqrt{11}) x\}].$$

(Ver também Problema 5).

A solução geral de

$$(5') \qquad f(D_x, D_y) z = (AD_x^2 + BD_x D_y + CD_y^2) z = x + 2y$$

é a solução geral da equação reduzida

$$(4') \qquad f(D_x, D_y) z = (AD_x^2 + BD_x D_y + CD_y^2) z = 0$$

mais uma integral particular de (5'). Designaremos a solução geral de (4') como a função complementar de (5').

Para estabelecer processos para obter uma integral particular de

$$(8) \quad f(D_x, D_y) z = (D_x - m_1 D_y)(D_x - m_2 D_y) \cdot \cdots \cdot (D_x - m_n D_y) z = F(x, y),$$

definiremos o operador $\dfrac{1}{f(D_x, D_y)}$ pela identidade

$$f(D_x, D_y) \frac{1}{f(D_x, D_y)} F(x, y) = F(x, y).$$

A integral particular, representada por

$$z = \frac{1}{f(D_x, D_y)} F(x, y) =$$

$$= \frac{1}{(D_x - m_1 D_y)(D_x - m_2 D_y) \cdot \cdots \cdot (D_x - m_n D_y)} F(x, y),$$

pode ser determinada, como no Capítulo XIII, resolvendo n equações de primeira ordem

$$(9) \quad u_1 = \frac{1}{D_x - m_n D_y} F(x, y), \quad u_2 = \frac{1}{D_x - m_{n-1} D_y} u_1, \; \cdots,$$

$$z = u_n = \frac{1}{D_x - m_1 D_y} u_{n-1}.$$

Note que as equações de (9) são da forma

$$(10) \qquad p - mq = g(x, y)$$

e que necessitamos apenas de uma solução, quanto mais simples melhor. No Probl. 6, abaixo, estabelece-se a seguinte regra para se obter uma tal solução de (10): calcula-se $z = \int g(x, a - mx)\, dx$, omitindo-se a constante arbitrária de integração e, em seguida, substitui-se a por $y + mx$.

EXEMPLO 4. Resolver $(D_x^2 - D_xD_y - 6D_y^2)z = (D_x + 2D_y)(D_x - 3D_y)z = x + y$.

Do Exemplo 1, a função complementar é: $z = \phi_1(y - 2x) + \phi_2(y + 3x)$.

Para obter a integral particular, designada por

$$z = \frac{1}{D_x + 2D_y}\left[\frac{1}{D_x - 3D_y}(x + y)\right]:$$

a) Faz-se $u = \dfrac{1}{D_x - 3D_y}(x + y)$ e obtém-se uma integral particular de $(D_x - 3D_y)u = x + y$.

Pelo processo do Problema 6, tem-se $u = \int (x + a - 3x)\, dx = ax - x^2$ e, substituindo a por $y + 3x$, $u = xy + 2x^2$.

b) Faz-se $z = \dfrac{1}{D_x + 2D_y}u = \dfrac{1}{D_x + 2D_y}(xy + 2x^2)$ e obtém-se uma integral particular de

$$(D_x + 2D_y)z = xy + 2x^2.$$

Então: $z = \int [x(a + 2x) + 2x^2]\, dx = \dfrac{1}{2}ax^2 + \dfrac{4}{3}x^3$ e, substituindo a por $y - 2x$, $z = \dfrac{1}{2}x^2y + \dfrac{1}{3}x^3$.

A solução geral é: $z = \phi_1(y - 2x) + \phi_2(y + 3x) + \dfrac{1}{2}x^2y + \dfrac{1}{3}x^3$.

(Ver também Problemas 8-9).

O método dos coeficientes indeterminados pode ser usado se $F(x, y)$ contém $\operatorname{sen}(ax + by)$ ou $\cos(ax + by)$.

EXEMPLO 5. Resolver

$$(D_x^2 + 5D_xD_y + 5D_y^2)z = [D_x - \tfrac{1}{2}(-5 + \sqrt{5})D_y][D_x - \tfrac{1}{2}(-5 - \sqrt{5})D_y]z =$$
$$= x \operatorname{sen}(3x - 2y).$$

A função complementar é:

$$z = \phi_1[y + \tfrac{1}{2}(-5 + \sqrt{5})x] + \phi_2[y + \tfrac{1}{2}(-5 - \sqrt{5})x].$$

Tomemos como uma integral particular:

$$z = Ax \operatorname{sen}(3x-2y) + Bx\cos(3x-2y) + C\operatorname{sen}(3x-2y) + D\cos(3x-2y).$$

Então:

$$D_x^2 z = (6A-9D)\cos(3x-2y) - (6B+9C)\operatorname{sen}(3x-2y) - 9Ax\operatorname{sen}(3x-2y) - 9Bx\cos(x-2y),$$

$$D_xD_y z = (-2A+6D)\cos(3x-2y) + (2B+6C)\operatorname{sen}(3x-2y) + 6Ax\operatorname{sen}(3x-2y) + 6Bx\cos(3x-2y),$$

$$D_y^2 z = -4D\cos(3x-2y) - 4C\operatorname{sen}(3x-2y) - 4Ax\operatorname{sen}(3x-2y) - 4Bx\cos(3x-2y),$$

e $(D_x^2 + 5D_xD_y + 5D_y^2)z = Ax\operatorname{sen}(3x-2y) + Bx\cos(3x-2y) + (C+4B)\operatorname{sen}(3x-2y) + (D-4A)\cos(3x-2y) = x\operatorname{sen}(3x-2y).$

Logo: $A = 1$, $B = C = 0$, $D = 4$ e a integral particular é:

$$z = x\operatorname{sen}(3x-2y) + 4\cos(3x-2y).$$

A solução geral é:

$$z = \phi_1[y + \tfrac{1}{2}(-5+\sqrt{5})x] + \phi_2[y + \tfrac{1}{2}(-5-\sqrt{5})x] + x\operatorname{sen}(3x-2y) + 4\cos(3x-2y).$$

(Ver também Problema 10).

Podemos usar métodos abreviados na obtenção das integrais particulares semelhantes aos que foram vistos no Capítulo XVI.

a) $\dfrac{1}{f(D_x, D_y)} e^{ax+by} = \dfrac{1}{f(a,b)} e^{ax+by}$, sendo $f(a,b) \neq 0$.

Se $f(a,b) = 0$, temos $f(D_x, D_y) = (D_x - \frac{a}{b}D_y)^r g(D_x, D_y)$, onde $g(a,b) \neq 0$; então

$$\frac{1}{(D_x - \frac{a}{b}D_y)^r} \frac{1}{g(D_x, D_y)} e^{ax+by} = \frac{1}{g(a,b)} \frac{1}{(D_x - \frac{a}{b}D_y)^r} e^{ax+by} = \frac{1}{g(a,b)} \frac{x^r}{r!} e^{ax+by}.$$

b) $\dfrac{1}{f(D_x^2, D_xD_y, D_y^2)} \operatorname{sen}(ax+by) = \dfrac{1}{f(-a^2, -ab, -b^2)} \operatorname{sen}(ax+by)$

e

$\dfrac{1}{f(D_x^2, D_xD_y, D_y^2)} \cos(ax+by) = \dfrac{1}{f(-a^2, -ab, -b^2)} \cos(ax+by)$,

sendo $f(-a^2, -ab, -b^2) \neq 0$.

Exemplo 6. Resolver

$$(D_x^2 - 3D_xD_y + 2D_y^2)z = (D_x - D_y)(D_x - 2D_y)z = e^{2x+3y} + e^{x+y} + \operatorname{sen}(x - 2y).$$

A função complementar é: $z = \phi_1(y + x) + \phi_2(y + 2x)$.

Então: $$\frac{1}{D_x^2 - 3D_xD_y + 2D_y^2} e^{2x+3y} = \frac{1}{2^2 - 3\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3^2} e^{2x+3y} = \frac{1}{4} e^{2x+3y}$$

é um têrmo da integral particular. Como $\phi_1(y + x)$ inclui e^{x+y}, temos:

$$\frac{1}{D_x^2 - 3D_xD_y + 2D_y^2} e^{x+y} = \frac{1}{D_x - D_y}\left(\frac{1}{D_x - 2D_y} e^{x+y}\right) =$$

$$= \frac{1}{D_x - D_y}\left(\frac{1}{1 - 2\cdot 1} e^{x+y}\right) = -\frac{1}{D_x - D_y} e^{x+y} = -xe^{x+y}.$$

Tem-se também: $$\frac{1}{D_x^2 - 3D_xD_y + 2D_y^2} \operatorname{sen}(x - 2y) =$$

$$= \frac{1}{-1 - 3(2) + 2(-1)(-2)^2} \operatorname{sen}(x - 2y) = -\frac{1}{15} \operatorname{sen}(x - 2y).$$

A solução geral é:

$$z = \phi_1(y + x) + \phi_2(y + 2x) + \frac{1}{4} e^{2x+3y} - xe^{x+y} - \frac{1}{15} \operatorname{sen}(x - 2y).$$

c) Se $F(x, y)$ fôr um polinômio, isto é, $F(x, y) = \Sigma p_{ij}x^iy^j$, onde i, j sejam inteiros positivos ou nulos e p_{ij} sejam constantes, pode-se empregar o processo exemplificado abaixo.

Exemplo 7. Resolver $(D_x^2 - D_xD_y - 6D_y^2)z = x + y$. (Exemplo 4.)

Para uma integral particular, temos:

$$\frac{1}{D_x^2 - D_xD_y - 6D_y^2}(x + y) = \frac{1}{D_x^2} \frac{1}{1 - \frac{D_y}{D_x} - 6\frac{D_y^2}{D_x^2}}(x + y) =$$

$$= \frac{1}{D_x^2}\left\{\left[1 + \frac{D_y}{D_x} + \cdots\right](x + y)\right\} = \frac{1}{D_x^2}\left(x + y + \frac{1}{D_x}\right) =$$

$$= \frac{1}{D_x^2}(x + y + x) = \frac{1}{D_x^2}(2x + y) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2y.$$

Note que $D_y(x + y) = 1$ e $\frac{1}{D_x} = \int dx$.

(Ver também Problemas 11-13).

PROBLEMAS RESOLVIDOS

1) Resolver:

$$(D_x^3 + 2D_x^2 D_y - D_x D_y^2 - 2D_y^3)\, z = (D_x - D_y)(D_x + D_y)(D_x + 2D_y)\, z = 0.$$

Temos: $m_1 = 1$, $m_2 = -1$, $m_3 = -2$ e a solução geral é:

$$z = \phi_1 (y + x) + \phi_2 (y - x) + \phi_3 (y - 2x).$$

2) Resolver: $(D_x^3 - 5D_x^2 D_y + 5D_x D_y^3 + 3D_y^3)\, z =$

$$= (D_x - 3D_y)\,[D_x - (1 + \sqrt{2})\, D_y]\,[D_x - (1 - \sqrt{2})\, D_y]\, z = 0.$$

Temos: $m_1 = 3$, $m_2 = 1 + \sqrt{2}$, $m_3 = 1 - \sqrt{2}$ e a solução geral é:

$$z = \phi_1 (y + 3x) + \phi_2\, [y + (1 + \sqrt{2})\, x] + \phi_3\, [y + (1 - \sqrt{2})\, x].$$

3) Resolver: $(D_x^3 + 3D_x^2 D_y - 4D_y^3)\, z = (D_x - D_y)(D_x + 2D_y)^2\, z = 0.$

Como $m_1 = 1$, $m_2 = m_3 = -2$, a solução geral é:

$$z = \phi_1 (y + x) + \phi_2 (y - 2x) + x\, \phi_3 (y - 2x).$$

Outra forma da solução geral é:

$$z = \phi_1 (y + x) + \phi_2 (y - 2x) + y\, \phi_3 (y - 2x).$$

4) Resolver: $(D_x^4 - 2D_x^2 D_y^2 + D_y^4)\, z = (D_x - D_y)^2 (D_x + D_y)^2\, z = 0.$

Temos: $m_1 = m_2 = 1$, $m_3 = m_4 = -1$ e a solução geral é:

$$z = \phi_1 (y + x) + x\, \phi_2 (y + x) + \phi_3 (y - x) + x\, \phi_4 (y - x).$$

5) Resolver:

$$(D_x^2 - 2D_x D_y + 5D_y^2)\, z = [D_x - (1 + 2i)\, D_y]\,[D_x - (1 - 2i)\, D_y]\, z = 0.$$

Como $m_1 = 1 + 2i$, $m_2 = 1 - 2i$, a solução geral é:

$$z = \phi_1 (y + x + 2ix) + \phi_1 (y + x - 2ix) + i\, [\phi_2 (y + x + 2ix) - \phi_2 (y + x - 2ix)],$$

onde ϕ_1, ϕ_2 são funções reais.

Tomando:

$\phi_1 (u) = \cos u$ e $\phi_2 (u) = e^u$, como

$$e^{ibx} = \cos bx + i \operatorname{sen} bx, \qquad \operatorname{sen} bx = \frac{1}{2i}(e^{ibx} - e^{-ibx}),$$

$$e^{-ibx} = \cos bx - i \operatorname{sen} bx, \qquad \cos bx = \frac{1}{2}(e^{ibx} + e^{-ibx}),$$ temos:

$$\begin{aligned}\phi_1 (y + x + 2ix) &= \cos (y + x) \cos (2ix) - \operatorname{sen} (y + x) \operatorname{sen} (2ix) = \\ &= \cos (y + x) \cosh 2x - i \operatorname{sen} (y + x) \operatorname{senh} 2x,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_1 (y + x - 2ix) &= \cos (y + x) \cos (2ix) + \operatorname{sen} (y + x) \operatorname{sen} (2ix) = \\ &= \cos (y + x) \cosh 2x + i \operatorname{sen} (y + x) \operatorname{senh} 2x,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_2 (y + x + 2ix) - \phi_2 (y + x - 2ix) &= e^{y+x+2ix} - e^{y+x-2ix} = \\ &= e^{y+x} (e^{2ix} - e^{-2ix}) = 2ie^{y+x} \operatorname{sen} 2x.\end{aligned}$$

Obtém-se, então, como uma integral particular:

$$z = [\cos(y + x)\cosh 2x - i\,\mathrm{sen}\,(y + x)\,\mathrm{senh}\,2x] +$$
$$+ [\cos(y + x)\cosh 2x + i\,\mathrm{sen}\,(y + x)\,\mathrm{senh}\,2x] +$$
$$+ i\,(2ie^{y+x}\,\mathrm{sen}\,2x) = 2\cos(y + x)\cosh 2x - 2e^{y+x}\,\mathrm{sen}\,2x.$$

Note que z é uma função real de x e y.

6) Mostrar que uma integral particular de $p - mq = g(x, y)$. pode ser determinada integrando $dz = g(x, a - mx)\,dx$, omitindo a constante arbitrária de integração e, em seguida, substituindo a por $y + mx$.

O sistema auxiliar é: $\dfrac{dx}{1} = \dfrac{dy}{-m} = \dfrac{dz}{g(x, y)}$. Integrando a equação formada com os dois primeiros têrmos, temos: $y + mx = a$. Com esta relação, a equação

$$\frac{dx}{1} = \frac{dz}{g(x, y)} \text{ transforma-se em } \frac{dx}{1} = \frac{dz}{g(x, a - mx)}.$$

Então: $z = \int g(x, a - mx)\,dx$ e, a fim de não se ter constante arbitrária, substituímos a por $y + mx$ na solução.

7) Com o processo do Problema 6, achar integrais particulares de:

$$a)\quad p + 3q = \cos(2x + y), \qquad b)\quad p - 2q = (y + 1)\,e^{3x}.$$

a) Temos: $m = -3$ e $g(x, y) = \cos(2x + y)$.

Daí: $z = \int g(x, a - mx)\,dx = \int \cos(2x + a + 3x)\,dx = \dfrac{1}{5}\,\mathrm{sen}\,(5x + a)$ e, substituindo a por $y - 3x$, a integral particular procurada é: $z = \dfrac{1}{5}\,\mathrm{sen}\,(2x + y)$.

b) $z = \int g(x, a - mx)\,dx = \int (a - 2x + 1)\,e^{3x}\,dx =$

$$= \frac{1}{3}(a + 1)\,e^{3x} - \frac{2}{3}\,xe^{3x} + \frac{2}{9}\,e^{3x}.$$

Substituindo a por $y + 2x$, temos:

$$z = \frac{1}{3}(y + 2x + 1)\,e^{3x} - \frac{2}{3}\,xe^{3x} + \frac{2}{9}\,e^{3x} = \frac{1}{3}\left(y + \frac{5}{3}\right)e^{3x}.$$

8) Resolver: $(D_x^2 + 2D_xD_y - 8D_y^2)\,z = (D_x - 2D_y)(D_x + 4D_y)\,z = \sqrt{2x + 3y}$.

A função complementar é: $z = \phi_1(y + 2x) + \phi_2(y - 4x)$.

Para obter a integral particular, designada por

$$\frac{1}{(D_x - 2D_y)(D_x + 4D_y)}\sqrt{2x + 3y},$$

obtemos de $(D_x + 4D_y)u = \sqrt{2x+3y}$ a solução

$$u = \int [2x + 3(a - mx)]^{1/2}\,dx = \int [2x + 3(a + 4x)]^{1/2}\,dx =$$

$$= \int (14x + 3a)^{1/2}\,dx = \frac{1}{21}(14x + 3a)^{3/2} = \frac{1}{21}(2x + 3y)^{3/2}$$

e de $(D_x - 2D_y)z = u = \frac{1}{21}(2x + 3y)^{3/2}$, a solução

$$z = \frac{1}{21}\int [(2x + 3(a - 2x)]^{3/2}\,dx = -\frac{1}{210}(3a - 4x)^{5/2} = -\frac{1}{210}(2x + 3y)^{5/2}.$$

A solução geral é: $z = \phi_1(y + 2x) + \phi_2(y - 4x) - \frac{1}{210}(2x + 3y)^{5/2}$.

9) Resolver: $(D_x - 2D_y)^2(D_x + 3D_y)z = e^{2x+y}$.

A função complementar é: $z = \phi_1(y + 2x) + x\phi_2(y + 2x) + \phi_3(y - 3x)$.

Para obter a integral particular, designada por

$$\frac{1}{(D_x - 2D_y)(D_x - 2D_y)(D_x + 3D_y)}e^{2x+y},$$

obtemos de $(D_x + 3D_y)u = e^{2x+y}$ a solução

$$u = \int e^{2x+(a+3x)}\,dx = \int e^{5x+a}\,dx = \frac{1}{5}e^{5x+a} = \frac{1}{5}e^{2x+y};$$

de $(D_x - 2D_y)v = u = \frac{1}{5}e^{2x+y}$ a solução

$$v = \frac{1}{5}\int e^{2x+(a-2x)}\,dx = \frac{1}{5}x\,e^{a} = \frac{1}{5}xe^{2x+y};$$

e de $(D_x - 2D_y)z = v = \frac{1}{5}x\,e^{2x+y}$ a solução

$$z = \frac{1}{5}\int xe^{a}\,dx = \frac{1}{10}x^2e^{a} = \frac{1}{10}x^2e^{2x+y}.$$

A solução geral é:

$$z = \phi_1(y + 2x) + x\,\phi_2(y + 2x) + \phi_3(y - 3x) + \frac{1}{10}x^2e^{2x+y}.$$

10) Resolver: $(D_x^3 + D_x^2D_y - D_xD_y^2 - D_y^3)z = (D_x + D_y)^2(D_x - D_y)z = e^x\cos 2y$.

A função complementar é: $z = \phi_1(y - x) + x\phi_2(y - x) + \phi_3(y + x)$.

Tomemos como uma integral particular $z = Ae^x\cos 2y + Be^x\,\text{sen}\,2y$.

Então:

$D_x^3 z = Ae^x\cos 2y + Be^x\,\text{sen}\,2y$, $\quad D_xD_y^2 z = -4Ae^x\cos 2y - 4Be^x\,\text{sen}\,2y$,

$D_x^2D_y z = -2Ae^x\,\text{sen}\,2y + 2Be^x\cos 2y$, $\quad D_y^3 z = 8Ae^x\,\text{sen}\,2y - 8Be^x\cos 2y$.

Substituindo na equação diferencial dada, temos:

$$(5A + 10B)\, e^x \cos 2y + (5B - 10A)\, e^x \operatorname{sen} 2y = e^x \cos 2y,$$

de modo que $A = 1/25$ e $B = 2/25$.

A integral particular é: $z = \frac{1}{25} e^x \cos 2y + \frac{2}{25} e^x \operatorname{sen} 2y$, e a solução geral é:

$$z = \phi_1(y - x) + x\phi_2(y - x) + \phi_3(y + x) + \frac{1}{25} e^x \cos 2y + \frac{2}{25} e^x \operatorname{sen} 2y.$$

11) Resolver: $(D_x^2 - 2D_xD_y)\, z = D_x(D_x - 2D_y)\, z = e^{2x} + x^3y$.

A função complementar é: $z = \phi_1(y) + \phi_2(y + 2x)$.

Uma integral particular é dada por $\dfrac{1}{D_x^2 - 2D_xD_y} e^{2x} + \dfrac{1}{D_x^2 - 2D_xD_y} x^3y$.

O primeiro têrmo dá: $\dfrac{1}{(2)^2 - 2(2)(0)} e^{2x} = \dfrac{1}{4} e^{2x}$. Do segundo têrmo:

$$\frac{1}{D_x^2} \frac{1}{1 - 2\dfrac{D_y}{D_x}} x^3y = \frac{1}{D_x^2}\left(1 + 2\frac{D_y}{D_x} + \cdots\right) x^3y =$$

$$= \frac{1}{D_x^2}\left(x^3y + \frac{2}{D_x} x^3\right) = \frac{1}{D_x^2}\left(x^3y + \frac{1}{2} x^4\right),$$

obtemos: $\dfrac{x^5y}{20} + \dfrac{x^6}{60}$. A solução geral é:

$$z = \phi_1(y) + \phi_2(y + 2x) + \frac{1}{4} e^{2x} + \frac{x^5y}{20} + \frac{x^6}{60}.$$

12) Resolver:

$$(D_x^3 - 7D_xD_y^2 - 6D_y^3)\, z = (D_x + D_y)(D_x + 2D_y)(D_x - 3D_y)\, z = \operatorname{sen}(x + 2y) + e^{3x+y}.$$

A função complementar é: $z = \phi_1(y - x) + \phi_2(y - 2x) + \phi_3(y + 3x)$.

Uma integral particular é dada por

$$\frac{1}{(D_x + D_y)(D_x^2 - D_xD_y - 6D_y^2)} \operatorname{sen}(x + 2y) + \frac{1}{(D_x - 3D_y)(D_x^2 + 3D_xD_y + 2D_y^2)} e^{3x+y}.$$

NOTA. A separação no primeiro têrmo é apenas por conveniência, i. e., poderíamos ter escrito: $\dfrac{1}{(D_x + 2D_y)(D_x^2 - 2D_xD_y - 3D_y^2)} \operatorname{sen}(x + 2y)$. A separação no segundo têrmo, porém, é necessária, porque e^{3x+y} é uma parte do têrmo $\phi_3(y + 3x)$ da função complementar.

Para o primeiro têrmo:

$$\frac{1}{(D_x+D_y)(D_x^2-D_xD_y-6D_y^2)}\operatorname{sen}(x+2y)=\frac{1}{D_x+D_y}\ \frac{1}{-1+2+24}\operatorname{sen}(x+2y)=$$

$$=\frac{1}{25}\ \frac{D_x-D_y}{D_x^2-D_y^2}\operatorname{sen}(x+2y)=\frac{1}{25\,(3)}(D_x-D_y)\operatorname{sen}(x+2y)=-\frac{1}{75}\cos(x+2y).$$

Para o segundo têrmo:

$$\frac{1}{(D_x-3D_y)(D_x^2+3D_xD_y+2D_y^2)}\,e^{3x+y}=\frac{1}{D_x-3D_y}\ \frac{e^{3x+y}}{9+9+2}=$$

$$=\frac{1}{20}\ \frac{1}{D^x-3D_y}\,e^{3x+y}=\frac{1}{20}\,x\,e^{3x+y}.$$

A solução geral é:

$$z=\phi_1(y-x)+\phi_2(y-2x)+\phi_3(y+3x)-\frac{1}{75}\cos(x+2y)+\frac{1}{20}\,x\,e^{3x+y}.$$

13) Resolver: $(D_x^3-7D_xD_y^2-6D_y^3)\,z=\cos(x-y)+x^2+xy^2+y^3.$

A equação reduzida é a do Problema 12. Uma integral particular é dada por

$$\frac{1}{(D_x+D_y)(D_x^2-D_xD_y-6D_y^2)}\cos(x-y)+\frac{1}{D_x^3-7D_xD_y^2-6D_y^3}(x^2+xy^2+y^3).$$

[Note que $\cos(x-y)$ é parte da função complementar; assim, o fator correspondente (D_x+D_y) deve ser tratado separadamente.]

Para o primeiro têrmo:

$$\frac{1}{(D_x+D_y)(D_x^2-D_xD_y-6D_y^2)}\cos(x-y)=\frac{1}{4}\ \frac{1}{D_x+D_y}\cos(x-y).$$

Devemos resolver $(D_x+D_y)\,u=\frac{1}{4}\cos(x-y)$, o que dá:

$$u=\frac{1}{4}\int\cos[x-(a+x)]\,dx=\frac{1}{4}\int\cos(-a)\,dx=$$

$$=\frac{1}{4}\,x\cos(-a)=\frac{1}{4}\,x\cos(x-y).$$

Para o segundo têrmo:

$$\frac{1}{D_x^3-7D_xD_y^2-6D_y^3}(x^2+xy^2+y^3)=\frac{1}{D_x^3\left(1-7\dfrac{D_y^2}{D_x^2}-6\dfrac{D_y^3}{D_x^3}\right)}(x^2+xy^2+y^3)=$$

$$=\frac{1}{D_x^3}\left(1+7\frac{D_y^2}{D_x^2}+6\frac{D_y^3}{D_x^3}\right)(x^2+xy^2+y^3)=\frac{1}{D_x^3}[x^2+xy^2+y^3+$$

$$+ \frac{7}{D_x^2}(2x+6y)+\frac{6}{D_x^3}(6)] = \frac{1}{D_x^3}(x^2+xy^2+y^3)+\frac{7}{D_x^5}(2x+6y)+$$

$$+ \frac{36}{D_x^6} = \frac{5}{72}x^6+\frac{1}{60}x^5(1+21y)+\frac{1}{24}x^4y^2+\frac{1}{6}x^3y^3.$$

A solução geral é:

$$z = \phi_1(y-x)+\phi_2(y-2x)+\phi_3(y+3x)+\frac{1}{4}x\cos(x-y)+\frac{5}{72}x^6+$$

$$+\frac{1}{60}x^5(1+21y)+\frac{1}{24}x^4y^2+\frac{1}{6}x^3y^3.$$

PROBLEMAS PROPOSTOS

14) $(D_x^2 - 8D_xD_y + 15D_y^2)z = 0.$ *Resp.:* $z = \phi_1(y+3x)+\phi_2(y+5x)$

15) $(D_x^2 - 2D_xD_y - D_y^2)z = 0.$
Resp.: $z = \phi_1[y + x(1+\sqrt{2})] + \phi_2[y + x(1-\sqrt{2})]$

16) $(D_x^2 - 4D_xD_y + 4D_y^2)z = 0.$ *Resp.:* $z = \phi_1(y+2x) + x\phi_2(y+2x)$

17) $(D_x^3 + 2D_x^2D_y - D_xD_y^2 - 2D_y^3)z = 0.$
Resp.: $z = \phi_1(y+x)+\phi_2(y-x)+\phi_3(y-2x)$

18) $(D_x^3D_y^2 + D_x^2D_y^3)z = 0.$
Resp.: $z = \phi_1(y) + x\phi_2(y) + \phi_3(x) + y\phi^4(x) + \phi^5(y-x)$

19) $(D_x^2 + 5D_xD_y + 6D_y^2)z = e^{x-y}.$
Resp.: $z = \phi_1(y-2x)+\phi_2(y-3x)+\frac{1}{2}e^{x-y}$

20) $(D_x^2 + D_y^2)z = x^2y^2.$
Resp.: $z = \phi_1(y+ix)+\phi_1(y-ix)+i[\phi_2(y+ix)-\phi_2(y-ix)] +$
$+ \frac{1}{180}(15x^4y - x^6)$

21) $(D_x^3 - 3D_x^2D_y + 4D_y^3)z = e^{y+2x}.$
Resp.: $z = \phi_1(y-x)+\phi_2(y+2x)+x\phi_3(y+2x)+\frac{1}{6}x^2e^{y+2x}$

22) $(D_x^3 + 2D_x^2D_y - D_xD_y^2 - 2D_y^3)z = (y+2)e^x.$
Resp.: $z = \phi_1(y+x)+\phi_2(y-x)+\phi_3(y-2)+ye^x$

23) $(D_x^3 - 3D_x^2D_y - 4D_xD_y^3 + 12D_y^3)z = \operatorname{sen}(y+2x).$
Resp.: $z = \phi_1(y-2x)+\phi_2(y+2x)+\phi_3(y+3x)+\frac{1}{4}x\operatorname{sen}(y+2x)$

24) $(D_x^3 - 3D_xD_y^2 + 2D_y^3)\,z = \sqrt{x + 2y}$.

Resp.: $z = \phi_1(y + x) + x\phi_2(y + x) + \phi_3(y - 2x) + \frac{8}{525}(x + 2y)^{7/2}$

25) $(D_x^3 + D_x^2D_y - 6D_xD_y^2)\,z = x^2 + y^2$.

Resp.: $z = \phi_1(y) + \phi_2(y + 2x) + \phi_3(y - 3x) + \frac{2}{15}x^5 - \frac{1}{12}x^4y + \frac{1}{6}x^3y^2$

26) $(D_x^3 - 4D_x^2D_y + 5D_xD_y^2 - 2D_y^3)\,z = e^{y+x} + e^{y-2x} + e^{y+2x}$.

Resp.: $z = \phi_1(y + x) + x\phi_2(y + x) + \phi_3(y + 2x) - \frac{1}{2}x^2e^{y+x} - \frac{1}{36}e^{y-2x} + xe^{y+2x}$

27) $(D_x^3 - 2D_x^2D_y)\,z = 2e^{2x} + 3x^2y$.

Resp.: $z = \phi_1(y) + x\phi_2(y) + \phi_3(y + 2x) + \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{1}{20}x^5y + \frac{1}{60}x^6$

28) $(D_x^3 - 3D_xD_y^2 - 2D_y^3)\,z = \cos(x + 2y) - e^y(3 + 2x)$.

Resp.: $z = \phi_1(y - x) + x\phi_2(y - x) + \phi_3(y + 2x) + \frac{1}{27}\operatorname{sen}(x + 2y) + xe^y$

Capítulo XXXII

EQUAÇÕES LINEARES NÃO-HOMOGÊNEAS COM COEFICIENTES CONSTANTES

Uma equação diferencial parcial linear não-homogênea com coeficientes constantes, tal como

$$f(D_x, D_y)z = (D_x^2 - D_y^2 + 3D_x + D_y + 2)z =$$
$$= (D_x + D_y + 1)(D_x - D_y + 2)z = x^2 + xy,$$

é denominada *redutível*, porque o primeiro membro pode ser fatorado, cada fator sendo do primeiro grau em D_x, D_y, enquanto que

$$f(D_x, Dy)z = (D_xD_y + 2D_y^3)z = D_y(D_x + 2D_y^2)z = \cos(x-2y),$$

que não pode ser fatorada é chamada *irredutível*.

Equações não-homogêneas redutíveis. Consideremos a equação não-homogênea redutível

(1) $f(D_x, Dy)z =$
$$= (a_1D_x+b_1D_y+c_1)(a_2D_x+b_2D_y+c_2)\cdot\cdots\cdot(a_nD_x+b_nD_y+c_n)z=0,$$

onde a_i, b_i, c_i são constantes. Qualquer solução de

(2) $$(a_iD_x + b_iD_y + c_i)z = 0$$

é uma solução de (1). Do Problema 5, Capítulo XXIX, a solução geral de (2) é

(3) $$z = e^{-c_ix/a_i}\phi(a_iy - b_ix), \qquad a_i \neq 0,$$

ou

(3′) $$z = e^{-c_iy/b_i}\psi(a_iy - b_ix), \qquad b_i \neq 0,$$

com ϕ e ψ funções arbitrárias de seus argumentos. Então, se nenhum par de fatôres de (1) fôr linearmente dependente (isto é, se nenhum fator fôr um simples múltiplo de outro) a solução geral de (1) é dada pela soma de n funções arbitrárias dos tipos (3) e (3′).

EXEMPLO 1. Resolver: $(2D_x + D_y + 1)(D_x - 3D_y + 2)z = 0$.

A solução geral é: $z = e^{-y}\phi_1(2y - x) + e^{-2x}\phi_2(y + 3x)$. Note que o primeiro têrmo do segundo membro pode ser substituído por $e^{-x/2}\psi_1(2y - x)$ e o segundo por $e^{2y/3}\psi_2(y + 3x)$.

EXEMPLO 2. Resolver: $(2D_x + 3D_y - 5)(D_x + 2D_y)(D_x - 2)(D_y + 2)z = 0$.

A solução geral é:

$$z = e^{5x/2}\phi_1(2y - 3x) + \phi_2(y - 2x) + e^{2x}\phi_3(y) + e^{-2y}\phi_4(x).$$

(Ver também Problemas 1-2).

Se

$$(4)\quad f(D_x, D_y)z = (a_1D_x + b_1D_y + c_1)^k(a_{k+1}D_x + b_{k+1}D_y + c_{k+1})\cdots(a_nD_x + b_nD_y + c_n)z = 0,$$

onde nenhum par dos n fatôres é linearmente dependente, exceto como está indicado, a parte da solução geral correspondente aos k fatôres repetidos é:

$$e^{-c_1x/a_1}[\phi_1(a_1y - b_1x) + x\phi_2(a_1y - b_1x) + \cdots + x^{k-1}\phi_k(a_1y - b_1x)].$$

EXEMPLO 3. Resolver: $(2D_x + D_y + 5)(D_x - 2D_y + 1)^2z = 0$.

A solução geral é: $z = e^{-5y}\phi_1(2y - x) + e^{-x}[\phi_2(y + 2x) + x\phi_3(y + 2x)]$.

(Ver também Problema 3).

A solução geral de

$$(5)\quad f(D_x, D_y)z = (a_1D_x + b_1D_y + c_1)(a_2D_x + b_2D_y + c_2)\cdots(a_nD_x + b_nD_y + c_n)z = F(x, y)$$

é a soma da solução geral de (1), [chamada, agora, a função complementar de (5)] e uma integral particular de (5),

$$(6)\qquad z = \frac{1}{f(D_x, D_y)}F(x, y).$$

O processo geral para calcular (6) bem como os métodos abreviados aplicáveis às formas particulares de $F(x, y)$ foram vistos no capítulo anterior.

EXEMPLO 4. Resolver:

$$f(D_x, D_y)z = (D_x^2 - D_xD_y - 2D_y^2 + 2D_x - 4D_y)z = (D_x - 2D_y)(D_x + D_y + 2)z = ye^x + 3xe^{-y}.$$

A função complementar é: $z = \phi_1(y + 2x) + e^{-2x}\phi_2(y - x)$.

Para calcular $\frac{1}{f(D_x, D_y)} ye^x = \frac{1}{(D_x - 2D_y)(D_x + D_y + 2)} ye^x$, resolvemos, primeiro, $(D_x + D_y + 2)u = ye^x$ cujo sistema auxiliar é: $\frac{dx}{1} = \frac{dy}{1} = \frac{du}{ye^x - 2u}$. Obtemos $y = x + a$ fàcilmente e a equação $\frac{du}{ye^x - 2u} = \frac{dx}{1}$ ou $\frac{du}{dx} + 2u = ye^x = (x + a)e^x$. Esta equação tem e^{2x} como fator de integração; assim,

$$ue^{2x} = \int (x + a) e^{3x} dx = \frac{1}{3} xe^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x} + \frac{1}{3} ae^{3x} =$$

$$= \frac{1}{3} xe^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x} + \frac{1}{3} (y - x) e^{3x} \quad \text{e} \quad u = \frac{1}{3} ye^{3x} - \frac{1}{9} e^x.$$

Resolvendo $(D_x - 2D_y) z = u = \frac{1}{3} ye^x - \frac{1}{9} e^x$ obtemos a integral particular procurada (ver Problema 6, Capítulo XXXI),

$$z = \int \left[\frac{1}{3}(a - 2x) e^x - \frac{1}{9} e^x\right] dx = \frac{1}{3} ae^x - \frac{2}{3} xe^x + \frac{2}{3} e^x - \frac{1}{9} e^x =$$

$$= \frac{1}{3}(y + 2x) e^x - \frac{2}{3} xe^x + \frac{5}{9} e^x = \frac{1}{3}\left(y + \frac{5}{3}\right) e^x.$$

Para calcular $\frac{1}{(D_x - 2D_y)(D_x + D_y + 2)} (3xe^{-y})$, resolvemos $(D_x + D_y + 2)u = 3xe^{-y}$ cujo sistema auxiliar é: $\frac{dx}{1} = \frac{dy}{1} = \frac{du}{3xe^{-y} - 2u}$. Então: $y = x + a$, e de $\frac{du}{3xe^{-y} - 2u} = \frac{dy}{1}$ ou $\frac{du}{dy} + 2u = 3xe^{-y} = 3(y - a)e^{-y}$

$ue^{2y} = 3\int (y - a) e^y dy = 3(y - 1 - a) e^y = 3(x - 1) e^y$ e $u = 3(x - 1) e^{-y}$.

Resolvendo $(D_x - 2D_y) z = u = 3(x - 1) e^{-y}$, a integral particular procurada, é: $z = 3\int (x - 1) e^{-a+2x} dx = \frac{3}{2}(xe^{-a+2x} - \frac{3}{2} e^{-a+2x}) = \frac{3}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right) e^{-y}$.

A solução geral é:

$$z = \phi_1(y + 2x) + e^{-2x}\phi_2(y - x) + \frac{1}{3}\left(y + \frac{5}{3}\right) e^x + \frac{3}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right) e^{-y}.$$

EXEMPLO 5. Resolver

$$f(D_x, D_y) z = (D_x^2 - D_xD_y - 2D_y^2 + 6D_x - 9D_y + 5) z =$$
$$= (D_x + D_y + 5)(D_x - 2D_y + 1) z = e^{2x+y} + e^{x+y}.$$

A função complementar é: $z = e^{-5x}\phi_1(y - x) + e^{-x}\phi_2(y + 2x)$.

Para a integral particular correspondente ao primeiro têrmo de $F(x, y)$, usamos

$$\frac{1}{f(D_x, D_y)} e^{ax+by} = \frac{1}{f(a, b)} e^{ax+by}, \quad f(a, b) \neq 0,$$

e obtemos

$$\frac{1}{D_x^2 - D_xD_y - 2D_y^2 + 6D_x - 9D_y + 5} e^{2x+y} = \frac{1}{4 - 2 - 2 + 12 - 9 + 5} e^{2x+y} = \frac{1}{8} e^{2x+y}.$$

Para calcular $\dfrac{1}{f(D_x, D_y)} e^{x+y}$, notamos que $f(1, 1) = 0$.

Isto significa que e^{x+y} é uma parte da função complementar. (Para ver isto, tomar $\phi_2(y + 2x) = e^{y+2x} + \psi_2(y + 2x)$; então: $e^{-x}\phi_2(y + 2x) = e^{-x}[e^{y+2x} + \psi_2(y + 2x)] = e^{y+x} + e^{-x}\psi_2(y + 2x)$. Temos:

$$\frac{1}{f(D_x,D_y)} e^{x+y} = \frac{1}{D_x - 2D_y + 1} \frac{1}{D_x + D_y + 5} e^{x+y} = \frac{1}{7} \frac{1}{D_x - 2D_y + 1} e^{x+y} = \frac{1}{7} xe^{x+y}.$$

A solução geral é:

$$z = e^{-5x}\phi_1(y - x) + e^{-x}\phi_2(y + 2x) + \frac{1}{8} e^{2x+y} + \frac{1}{7} xe^{x+y}.$$

(Ver também Problemas 4-5).

O emprêgo da fórmula

$$(7) \quad \frac{1}{f(D_x, D_y)} Ve^{ax+by} = e^{ax+by} \frac{1}{f(D_x + a, D_y + b)} V, \qquad V = V(x, y),$$

está ilustrado abaixo.

EXEMPLO 6. Resolver:

$$(D_x^3 + 3D_x^2 D_y - 2D_x^2) z = D_x^2 (D_x + 3D_y - 2) z = (x^2 + 2y) e^{2x+y}.$$

A função complementar é: $z = \phi_1(y) + x\phi_2(y) + e^{2x}\phi_3(y - 3x)$. Uma integral particular é:

$$z = \frac{1}{D_x^2 (D_x + 3D_y - 2)} (x^2 + 2y) e^{2x+y} = e^{2x+y} \frac{1}{(D_x + 2)^2 (D_x + 3D_y + 3)} (x^2 + 2y).$$

Fazendo: $(D_x + 3D_y + 3)u = x^2 + 2y$, o sistema auxiliar é:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{3} = \frac{du}{x^2 + 2y - 3u}.$$

Então: $y = 3x + a$, e de $\dfrac{du}{x^2 + 2y - 3u} = \dfrac{dx}{1}$ ou $\dfrac{du}{dx} + 3u = x^2 + 2y$, temos:

$$ue^{3x} = \int (x^2 + 6x + 2a) e^{3x}\, dx = e^{3x}\left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{16}{9}x - \frac{16}{27} + \frac{2}{3}a\right)$$

e

$$u = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}x - \frac{16}{27} + \frac{2}{3}y.$$

Agora, fazendo $(D_x + 2)v = u$ e empregando o fator de integração e^{2x}, y sendo considerado aqui como uma constante, temos:

$$ve^{2x} = \int e^{2x}\left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}x - \frac{16}{27} + \frac{2}{3}y\right) dx = \left(\frac{1}{6}x^2 - \frac{5}{18}x - \frac{17}{108} + \frac{1}{3}y\right) e^{2x}$$

e

$$v = \frac{1}{6}x^2 - \frac{5}{18}x - \frac{17}{108} + \frac{1}{3}y.$$

Finalmente, fazendo $(D_x + 2)\,w = v$, temos:

$$we^{2x} = \int e^{2x}\left(\frac{1}{6}x^2 - \frac{5}{18}x - \frac{17}{108} + \frac{1}{3}y\right)dx = \left(\frac{1}{12}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{7}{216} + \frac{1}{6}y\right)e^{2x}$$

e
$$w = \frac{1}{12}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{7}{216} + \frac{1}{6}y.$$

Daí: $z = we^{2x+y}$ e a solução geral é:

$$z = \phi_1(y) + x\,\phi_2(y) + e^{2x}\,\phi_3(3y - x) + \left(\frac{1}{12}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{7}{216} + \frac{1}{6}y\right)e^{2x+y}.$$

(Ver também Problemas 6-7).

Equações irredutíveis com coeficientes constantes. Consideremos a equação linear com coeficientes constantes

$$(8) \qquad f(D_x, D_y)z = 0.$$

Como $D_x^r D_y^s\,(ce^{ax+by}) = ca^r b^s e^{ax+by}$, onde a, b, c são constantes, entrando com

$$(9) \qquad z = ce^{ax+by}$$

em (8), vem $cf(a, b)\,e^{ax+by} = 0$. Então, (9) é uma solução de (8) desde que

$$(10) \qquad f(a, b) = 0,$$

com c arbitrário. Para qualquer valor de a (ou b) um ou mais valores de b (ou a) são obtidos pela relação (10). Assim, existe uma infinidade de pares (a_i, b_i) satisfazendo (10). Além disso,

$$(11) \qquad z = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e^{a_i x + b_i y}, \quad \text{onde } f(a_i, b_i) = 0,$$

é uma solução de (8).

Se $\quad f(D_x, D_y)z = (D_x + hD_y + k)g(D_x, D_y)z,$
qualquer par (a, b) em que $a + hb + k = 0$, satisfaz (10). Consideremos todos êsses pares $(a_i, b_i) = (-hb_i - k, b_i)$. De (11), temos:

$$z = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e^{-(hb_i + k)x + b_i y} = e^{-kx}\sum_{i=1}^{\infty} c_i e^{b_i(y - hx)}$$

que é uma solução de (8) correspondente ao fator linear $(D_x + hD_y + k)$ de $f(D_x, D_y)$. Esta é, naturalmente, $e^{-kx}\phi(y - hx)$, ϕ arbitrário, empregada acima. Então, se $f(D_x, D_y)$ não tiver fator linear, (11) será denominada a solução de (8); entretanto, se $f(D_x, D_y)$ tiver $m < n$ fatôres lineares, escreveremos parte da solução envolvendo funções arbitrárias (correspondentes aos fatôres lineares) e a parte restante envolvendo constantes arbitrárias.

EXEMPLO 7. Resolver: $f(D_x, D_y)z = (D_x^2 + D_x + D_y)z = 0$.

A equação é irredutível. Temos $f(a, b) = a^2 + a + b = 0$ de modo que para qualquer $a = a_i$, $b_i = -a_i(a_i + 1)$. A solução é:

$$z = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e^{a_i x + b_i y} = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e^{a_i x - a_i(a_i+1)y},$$

com c_i e a_i constantes arbitrárias.

EXEMPLO 8. Resolver: $(D_x + 2D_y)(D_x - 2D_y + 1)(D_x - D_y^2)z = 0$.

Correspondendo aos fatôres lineares temos: $\phi_1(y - 2x)$ e $e^{-x}\phi_2(y + 2x)$, respectivamente.

Para o fator irredutível $D_x - D_y^2$ temos: $a - b^2 = 0$ ou $a = b^2$.

A solução procurada é:

$$z = \phi_1(y - 2x) + e^{-x}\phi_2(y + 2x) + \sum_{i=1}^{\infty} c_i e^{b_i^2 x + b_i y},$$

com c_i e b_i constantes arbitrárias.

Para obter uma integral particular de $f(D_x, D_y)z = F(x, y)$, podem ser empregados todos os processos vistos até aqui.

EXEMPLO 9. Resolver: $f(D_x, D_y)z = (D_x - D_y^2)z = e^{2x+3y}$.

Do Exemplo 8, a função complementar é: $z = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e^{b_i^2 x + b_i y}$.

A integral particular é: $\dfrac{1}{D_x - D_y^2} e^{2x+3y} = \dfrac{1}{2-(3)^2} e^{2x+3y} = -\dfrac{1}{7} e^{2x+3y}$.

A solução procurada é: $z = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e^{b_i^2 x + b_i y} - \dfrac{1}{7} e^{2x+3y}$.

(Ver também Problemas 8-11).

A equação diferencial (ordinária) de Cauchy $f(xD)y = F(x)$ transforma-se numa equação linear, com coeficientes constantes, por meio da substituição $x = e^z$ (ver Cap. XVII). Anàlogamente, uma equação diferencial parcial da forma:

$$f(xD_x, yD_y)z = \sum_{r,s} c_{rs} x^r y^s D_x^r D_y^s z = F(x, y), \quad c_{rs} = \text{constante},$$

reduz-se a uma equação diferencial parcial linear, com coeficientes constantes, fazendo-se:

$$x = e^u, \quad y = e^v.$$

Exemplo 10. Resolver: $(x^2D_x^2 + 2xyD_xD_y - xD_x)\, z = x^3/y^2$.

A substituição $x = e^u$, $y = e^v$, $xD_xz = D_uz$, $yD_yz = D_vz$, $x^2D_x^2 z = D_u(D_u - 1)\, z$, $xyD_xD_y = D_uD_v\, z$, $y^2D_y^2\, z = D_v(D_v - 1)\, z$ transforma a equação dada em:

$$[D_u(D_u - 1) + 2D_uD_v - D_u]\, z = D_u(D_u + 2D_v - 2)\, z = e^{3u-2v}$$

cuja solução é: $z = \phi_1(v) + e^{2u}\phi_2(v - 2u) - \frac{1}{9}e^{3u-2v}$.

Assim, a solução geral (expressa nas variáveis originais), é:

$$z = \phi_1(\ln y) + x^2\phi_2\left(\ln\frac{y}{x^2}\right) - \frac{1}{9}\,\frac{x^3}{y^2} \quad \text{ou} \quad z = \psi_1(y) + x^2\psi_2\left(\frac{y}{x^2}\right) - \frac{1}{9}\,\frac{x^3}{y^2}.$$

(Ver também Problemas 12-13).

PROBLEMAS RESOLVIDOS

EQUAÇÕES REDUTÍVEIS

1) Resolver: $(D_x^2 - D_y^2 + 3D_x - 3D_y)\, z = (D_x - D_y)(D_x + D_y + 3)\, z = 0$.

A solução geral é: $z = \phi_1(y + x) + e^{-3x}\phi_2(y - x)$.

2) Resolver: $D_x(2D_x - D_y + 1)(D_x + 2D_y - 1)\, z = 0$.

A solução geral é: $z = \phi_1(y) + e^y\phi_2(2y + x) + e^x\phi_3(y - 2x)$.

3) Resolver: $(2D_x + 3D_y - 1)^2(D_x - 3D_y + 3)^3\, z = 0$.

A solução geral é:

$$z = e^{\frac{1}{2}x}[\phi_1(2y - 3x) + x\,\phi_2(2y - 3x)] + e^y[\phi_3(y + 3x) + y\,\phi^4(y + 3x) + y^2\phi^5(y + 3x)].$$

4) Resolver: $(2D_xD_y + D_y^2 - 3D_y)\, z = D_y(2D_x + D_y - 3)\, z = 3\cos(3x - 2y)$.

A função complementar é: $z = \phi_1(x) + e^{3y}\phi_2(2y - x)$.

Uma integral particular é:

$$\frac{1}{2D_xD_y + D_y^2 - 3D_y}\,3\cos(3x - 2y) = \frac{3}{2(6) - 4 - 3D_y}\cos(3x - 2y) =$$

$$= \frac{3}{8 - 3D_y}\cos(3x - 2y) = \frac{3(8 + 3D_y)}{64 - 9D_y^2}\cos(3x - 2y) =$$

$$= \frac{3}{100}(8 + 3D_y)\cos(3x - 2y) = \frac{3}{50}[4\cos(3x - 2y) + 3\,\text{sen}\,(3x - 2y)].$$

A solução geral é:

$$z = \phi_1(x) + e^{3y}\phi_2(2y - x) + \frac{3}{50}[4\cos(3x - 2y) + 3\,\text{sen}\,(3x - 2y)].$$

5) Resolver: $D_x(D_x + D_y - 1)(D_x + 3D_y - 2)z = x^2 - 4xy + 2y^2$.

A função complementar é: $z = \phi_1(y) + e^x\phi_2(y-x) + e^{2x}\phi_3(y-3x)$.

Uma integral particular é indicada por:

$$z = \frac{1}{D_x(D_x + D_y - 1)(D_x + 3D_y - 2)}(x^2 - 4xy + 2y^2).$$

Para calculá-la, consideremos:

$$\frac{1}{D_x + 3D_y - 2}(x^2 - 4xy + 2y^2) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{-1 + \frac{1}{2}(D_x + 3D_y)}(x^2 - 4xy + 2y^2) =$$

$$= \tfrac{1}{2}\,[-1 - \tfrac{1}{2}(D_x + 3D_y) - \tfrac{1}{4}(D_x + 3D_y)^2 - \cdots](x^2 - 4xy + 2y^2) =$$

$$= \tfrac{1}{2}\,[-(x^2 - 4xy + 2y^2) - (-5x + 4y) - 7/2] = -\tfrac{1}{2}(x^2 - 4xy + 2y^2 - 5x + 4y + 7/2).$$

Consideremos, agora: $\dfrac{-\frac{1}{2}}{D_x + D_y - 1}(x^2 - 4xy + 2y^2 - 5x + 4y + 7/2) =$

$$= \tfrac{1}{2}\,\frac{1}{1 - (D_x + D_y)}(x^2 - 4xy + 2y^2 - 5x + 4y + 7/2) =$$

$$= \tfrac{1}{2}\,[1 + (D_x + D_y) + (D_x + D_y)^2 + \cdots](x^2 - 4xy + 2y^2 - 5x + 4y + 7/2) =$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(x^2 - 4xy + 2y^2 - 7x + 4y + \tfrac{1}{2}\right).$$

Finalmente: $z = \dfrac{\frac{1}{2}}{D_x}\left(x^2 - 4xy + 2y^2 - 7x + 4y + \tfrac{1}{2}\right) =$

$$= \tfrac{1}{2}(x^3/3 - 2x^2y + 2xy^2 - 7x^2/2 + 4xy + x/2).$$

A solução geral é: $z = \phi_1(y) + e^x\phi_2(y-x) + e^{2x}\phi_3(y-3x) +$

$$+ \frac{1}{12}(2x^3 - 12x^2y + 12xy^2 - 21x^2 + 24xy + 3x).$$

TIPO: $\dfrac{1}{f(D_x, D_y)}\, e^{ax+by}\, V(x, y)$.

6) Resolver: $(D_x + D_y - 1)(D_x + D_y - 3)(D_x + D_y)z = e^{x+y+2}\cos(2x - y)$.

A função complementar é: $z = e^x\phi_1(y-x) + e^{3x}\phi_2(y-x) + \phi_3(y-x)$.

Temos a integral particular:

$$\frac{1}{(D_x + D_y - 1)(D_x + D_y - 3)(D_x + D_y)}\, e^{x+y+2}\cos(2x - y) =$$

$$= e^{x+y}\,\frac{1}{(D_x + D_y + 1)(D_x + D_y - 1)(D_x + D_y + 2)}\, e^2\cos(2x - y) =$$

$$= e^{x+y+2} \frac{1}{(D_x^2 + 2D_xD_y + D_y^2 - 1)(D_x + D_y + 2)} \cos(2x - y) =$$

$$= -\tfrac{1}{2} e^{x+y+2} \frac{1}{D_x + D_y + 2} \cos(2x - y) =$$

$$= -\frac{1}{2} e^{x+y+2} \frac{D_x + D_y - 2}{D_x^2 + 2D_xD_y + D_y^2 - 4} \cos(2x - y) =$$

$$= \frac{1}{10} e^{x+y+2} (D_x + D_y - 2) \cos(2x - y) =$$

$$= -\frac{1}{10} e^{x+y+2} [\text{sen}(2x - y) + 2\cos(2x - y)].$$

A solução geral é: $z = e^x \phi_1(y - x) + e^{3x} \phi_2(y - x) + \phi_3(y - x) - \frac{1}{10} e^{x+y+2} [\text{sen}(2x - y) + 2\cos(2x - y)]$.

7) Resolver: $D_x(D_x - 2D_y)(D_x + D_y)z = e^{x+2y}(x^2 + 4y^2)$.

A função complementar é: $z = \phi_1(y) + \phi_2(y + 2x) + \phi_3(y - x)$.

Para a integral particular $\frac{1}{D_x(D_x - 2D_y)(D_x + D_y)} e^{x+2y}(x^2 + 4y^2) =$

$= e^{x+2y} \frac{1}{(D_x + 1)(D_x - 2D_y - 3)(D_x + D_y + 3)} (x^2 + 4y^2)$, primeiro achamos

$$u = \frac{1}{D_x + D_y + 3}(x^2 + 4y^2) = \frac{1}{3} \frac{1}{1 + \frac{1}{3}(D_x + D_y)} (x^2 + 4y^2) =$$

$$= \frac{1}{3}[1 - \frac{1}{3}(D_x + D_y) + \frac{1}{9}(D_x + D_y)^2 + \cdots\cdots](x^2 + 4y^2) =$$

$$= \frac{1}{3}\left[x^2 + 4y^2 - \frac{2}{3}(x + 4y) + \frac{10}{9}\right] = \frac{1}{27}(9x^2 + 36y^2 - 6x - 24y + 10),$$

em seguida

$$v = \frac{1}{D_x - 2D_y - 3} u = -\frac{1}{3} \frac{1}{1 + \frac{1}{3}(2D_y - D_x)} u =$$

$$= -\frac{1}{3}[1 - \frac{1}{3}(2D_y - D_x) + \frac{1}{9}(2D_y - D_x)^2 - \cdots] u =$$

$$= -\frac{1}{81}(9x^2 + 36y^2 - 72y + 58),$$

e finalmente

$$z = \frac{1}{D_x + 1} v = (1 - D_x + D_x^2 + \cdots) v = -\frac{1}{81}(9x^2 + 36y^2 - 18x - 72y + 76).$$

A solução geral é:

$$z = \phi_1(y) + \phi_2(y + 2x) + \phi_3(y - x) - \frac{1}{81}(9x^2 + 36y^2 - 18x - 72y + 76) e^{x+2y}.$$

TIPO : EQUAÇÕES IRREDUTÍVEIS

8) Resolver $f(D_x, D_y)\,z = (D_x - D_y^2)\,z = e^{x+y}$.

A função complementar é: $z = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e^{b_i^2 x + b_i y}$ do Exemplo 9.

O método abreviado para o cálculo da integral particular $\frac{1}{f(D_x, D_y)} e^{x+y}$ não pode ser usado, porque $f(a, b) = f(1, 1) = 0$. Usaremos o método dos coeficientes indeterminados, supondo que a integral particular seja da forma:

$$z = Axe^{x+y} + Bye^{x+y}.$$

Temos: $D_x z = (A + Ax + By)\,e^{x+y}$, $D_y^2 z = (Ax + 2B + By)\,e^{x+y}$ e $(D_x - D_y^2)\,z = (A - 2B)\,e^{x+y} = e^{x+y}$; daí: $A - 2B = 1$. Fazendo $A = 1$, $B = 0$, temos como integral particular $z = xe^{x+y}$; com $A = 0$, $B = -\frac{1}{2}$, temos: $z = -\frac{1}{2} ye^{x+y}$, etc. Escolhendo a primeira, a solução procurada é:

$$z = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e^{b_i^2 x + b_i y} + xe^{x+y}.$$

9) Resolver: $(2D_x^2 - D_y^2 + D_x)\,z = x^2 - y$.

A função complementar é: $z = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e^{a_i x + b_i y}$, $2a_i^2 - b_i^2 + a_i = 0$.

A integral particular:

$$\frac{1}{2D_x^2 - D_y^2 + D_x}(x^2 - y) = -\frac{1}{D_y^2}\,\frac{1}{1 - \dfrac{D_x + 2D_x^2}{D_y^2}}(x^2 - y) =$$

$$= -\frac{1}{D_y^2}\left[1 + \frac{D_x + 2D_x^2}{D_y^2} + \frac{(D_x + 2D_x^2)^2}{D_y^4} + \cdots\right](x^2 - y) =$$

$$= -\frac{1}{D_y^2}\left[x^2 - y + \frac{2x + 4}{D_y^2} + \frac{2}{D_y^4}\right] = -\frac{1}{D_y^2}\,(x^2 - y + xy^2 + 2y^2 + y^4/12) =$$

$$= -\frac{1}{2}\,x^2y^2 + \frac{1}{6}\,y^3 - \frac{1}{12}\,xy^4 - \frac{1}{6}\,y^4 - \frac{1}{360}\,y^6.$$

A solução procurada é:

$$z = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e^{a_i x \pm \sqrt{2a_i^2 \times a_i}\, y} - \frac{1}{2}\,x^2y^2 + \frac{1}{6}\,y^3 - \frac{1}{12}\,xy^4 - \frac{1}{6}\,y^4 - \frac{1}{360}\,y^6.$$

10) Achar a integral particular de: $(D_x^2 + D_y)(D_x - D_y - D_y^2)\, z = \text{sen}\,(2x + y)$.

Uma integral particular é dada por:

$$\frac{1}{(D_x^2+D_y)(D_x - D_y - D_y^2)} \text{sen}\,(2x+y) = \frac{1}{(-4+D_y)(D_x - D_y + 1)} \text{sen}\,(2x+y) =$$

$$= \frac{1}{D_xD_y - D_y^2 - 4D_x + 5D_y - 4} \text{sen}\,(2x+y) = \frac{1}{5D_y - 4D_x - 5} \text{sen}\,(2x+y) =$$

$$= \frac{5D_y - 4D_x + 5}{25D_y^2 - 40D_xD_y + 16D_x^2 - 25} \text{sen}\,(2x+y) = -\frac{1}{34}[5\,\text{sen}\,(2x+y) - 3\cos(2x+y)].$$

O método dos coeficientes indeterminados com $z = A\,\text{sen}\,(2x+y) + B\cos(2x+y)$ poderia, também, ser usado.

11) Achar uma integral particular de:

$$(D_x - 2D_y + 5)(D_x^2 + D_y + 3)\, z = e^{3x+4y}\,\text{sen}\,(x - 2y).$$

Uma integral particular é:

$$\frac{1}{(D_x - 2D_y + 5)(D_x^2 + D_y + 3)} e^{3x+4y}\,\text{sen}\,(x-2y) =$$

$$= e^{3x+4y} \frac{1}{(D_x - 2D_y)(D_x^2 + 6D_x + D_y + 16)} \text{sen}\,(x-2y) =$$

$$= e^{3x+4y} \frac{1}{(D_x - 2D_y)(6D_x + D_y + 15)} \text{sen}\,(x-2y) =$$

$$= e^{3x+4y} \frac{1}{6D_x^2 - 11D_xD_y - 2D_y^2 + 15D_x - 30D_y} \text{sen}\,(x-2y) =$$

$$= \frac{1}{5} e^{3x+4y} \frac{1}{3D_x - 6D_y - 4} \text{sen}\,(x-2y) =$$

$$= \frac{1}{5} e^{3x+4y} \frac{3D_x - 6D_y + 4}{9D_x^2 - 36D_xD_y + 36D_y^2 - 16} \text{sen}\,(x-2y) =$$

$$= -\frac{1}{1205} e^{3x+4y}(3D_x - 6D_y + 4)\,\text{sen}\,(x-2y) =$$

$$= -\frac{1}{1205} e^{3x+4y}[15\cos(x-2y) + 4\,\text{sen}\,(x-2y)].$$

TIPO: $f(xD_x, yD_y)z = 0$.

12) Resolver: $(xD_x^3D_y^2 - yD_x^2D_y^3)\, z = 0$ ou $(x^3y^2D_x^3D_x^2 - x^2y^3D_x^2D_y^3)\, z = 0$.

A substituição

$$x = e^u,\ y = e^v,\ x^3y^2D_x^3D_y^2 z = D_u(D_u - 1)(D_u - 2)D_v(D_v - 1)\, z,$$

$$x^2y^3D_x^2D_y^3 z = D_u(D_u - 1)D_v(D_v - 1)(D_v - 2)\, z$$

transforma a equação dada em:

$$D_uD_v(D_u-1)(D_v-1)(D_u-D_v)z=0.$$

A solução procurada é:

$$z=\phi_1(v)+\phi_2(u)+e^u\phi_3(v)+e^v\phi^4(u)+\phi^5(v+u)$$

ou, nas variáveis originais:

$$z=\phi_1(\ln y)+\phi_2(\ln x)+x\phi_3(\ln y)+y\phi^4(\ln x)+\phi^5(\ln xy)=$$

$$=\psi_1(y)+\psi_2(x)+x\psi_3(y)+y\psi^4(x)+\psi^5(xy).$$

13) Resolver: $(x^2D_x^2-4y^2D_y^2-4yD_y-1)\,z=x^2y^3\ln y.$

A substituição $x=e^u$, $y=e^v$ transforma a equação dada em:

$$[D_u(D_u-1)-4D_v(D_v-1)-4D_v-1]\,z=(D_u^2-4D_v^2-D_u-1)\,z=ve^{2u+3v}.$$

Uma integral particular desta equação é dada por:

$$\frac{1}{D_u^2-4D_v^2-D_u-1}\,ve^{2u+3v}=e^{2u+3v}\frac{1}{(D_u+2)^2-4(D_v+3)^2-(D_u+2)-1}\,v=$$

$$=e^{2u+3v}\frac{1}{D_u^2-4D_v^2+3D_u-24D_v-35}\,v.$$

Por inspeção, uma solução de $(D_u^2-4D_v^2+3D_u-24D_v-35)\,w=v$ é:

$w=-\frac{1}{35}v+\frac{24}{(35)^2}$. Assim, a integral particular é:

$$z=-\frac{1}{(35)^2}\,e^{2u+3v}(35v-24).$$

A solução da equação diferencial dada é:

$$z=\sum_{i=1}^{\infty}c_ie^{a_iu\times b_iv}-\frac{1}{1225}\,e^{2u+3v}(35v-24)$$

ou, nas variáveis originais:

$$z=\sum_{i=1}^{\infty}c_ix^{a_i}y^{b_i}-\frac{1}{1225}\,x^2y^3(35\ln y-24),\quad a_i^2-4b_i^2-a_i-1=0.$$

PROBLEMAS PROPOSTOS

Resolver as seguintes equações:

14) $(D_x + D_y + 1)(D_x - 2D_y - 1)z = 0.$

Resp.: $z = e^{-x}\phi_1(y - x) + e^x\phi_2(y + 2x)$

15) $(D_x + 2D_y - 3)(D_x + D_y - 1)z = 0.$

Resp.: $z = e^{3x}\phi_1(y - 2x) + e^x\phi_2(y - x)$

16) $(2D_x + D_y + 1)(D_x^2 + 3D_xD_y - 3D_x)z = 0.$

Resp.: $z = \phi_1(y) + e^{-y}\phi_2(2y - x) + e^y\phi_3(y - 3x)$

17) $(D_xD_y + D_y^2)(D_x - D_y - 2)z = 0.$

Resp.: $z = \phi_1(x) + \phi_2(y - x) + e^{2x}\phi_3(y + x)$

18) $(D_x + 2D_y)(D_x + 2D_y + 1)(D_x + 2D_y + 2)^2 z = 0.$

Resp.: $z = \phi_1(y - 2x) + e^{-x}\phi_2(y - 2x) + e^{-y}[\phi_3(y - 2x) + y\phi^4(y - 2x)]$

19) $(D_x + D_y)(D_x + D_y - 2)z = \text{sen}(x + 2y).$

Resp.: $z = \phi_1(y - x) + e^{2x}\phi_2(y - x) + \dfrac{1}{117}[6\cos(x + 2y) - 9\,\text{sen}(x + 2y)]$

20) $(D_x + D_y - 1)(D_x + 2D_y + 2)z = e^{3x+4y} + y(1 - 2x).$

Resp.: $z = e^x\phi_1(y - x) + e^{-y}\phi_2(y - 2x) + xy + \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{78}e^{3x+4y}$

21) $(D_x^2 + D_xD_y + D_y - 1)z = e^x + e^{-x}.$

Resp.: $z = e^{-x}\phi_1(y) + e^x\phi_2(y - x) + \dfrac{1}{2}xe^x - \dfrac{1}{2}xe^{-x}$

22) $(D_x^3 - D_xD_y^2 - D_x^2 + D_xD_y)z = (x + 2)/x^3.$

Resp.: $z = \phi_1(y) + \phi_2(y + x) + e^x\phi_3(y - x) + \ln x$

23) $(3D_xD_y - 2D_y^2 - D_y)z = \cos(3y + 2x).$

Resp.: $z = \phi_1(x) + e^{\frac{1}{2}y}\phi_2(3y + 2x) - \dfrac{1}{3}\,\text{sen}(3y + 2x)$

24) $(D_x^2 + D_xD_y - D_y^2 + D_x - D_y)z = e^{2x-3y}.$

Resp.: $z = \sum c_i e^{a_ix + b_iy} - \dfrac{1}{6}e^{2x-3y},\ a_i^2 = a_ib_i - b_i^2 + a_i - b_i = 0$

25) $(3D_x^2 - 2D_y^2 + D_x - 1)z = 3e^{x+y}\,\text{sen}(x + y).$

Resp.: $z = \sum c_i e^{a_ix + b_iy} - e^{x+y}\cos(x + y),\ 3a_i^2 - 2b_i^2 + a_i - 1 = 0$

26) $(D_x^2 + 2D_xD_y^2 - 2D_y + 3)\, z = e^{x+y} \cos(x + 2y).$

Resp.: $z = \sum c_i e^{a_i x + b_i y} - \frac{1}{13} e^{x+y} \cos(x + 2y),\ a_i^2 + 2a_ib_i - 2b_i + 3 = 0$

27) $(D_x^2 + D_xD_y + D_x + D_y + 1)\, z = e^{-2x}(x^2 + 2y^2).$

Resp.: $z = \sum c_i e^{a_i x + b_i y} + \frac{1}{27} e^{-2x}(9x^2 + 18y^2 + 18x + 12y + 16),$
$a_i^2 + a_ib_i + a_i + b_i + 1 = 0$

28) $(D_x^2D_y + D_y^2 - 2)\, z = e^{2y} \cos 3x + e^x \operatorname{sen} 2y.$

Resp.: $z = \sum c_i e^{a_i x + b_i y} - \frac{1}{16} e^{2y} \cos 3x - \frac{1}{20} e^x (\cos 2y + 3 \operatorname{sen} 2y),$
$a_i^2 b_i + b_i^2 - 2 = 0$

29) $(xyD_xD_y - y^2D_y^2 - 3xD_x + 2yD_y)\, z = 0.$

Resp.: $z = \phi_1(\ln xy) + y^3 \phi_2(\ln x) = \psi_1(xy) + y^3 \psi_2(x)$

30) $(x^2D_x^2 - 2xyD_xD_y - 3y^2D_y^2 + xD_x - 3yD_y) = x^2 y \operatorname{sen}(\ln x^2).$

Resp.: $z = \phi_1(x^3 y) + \phi_2(y/x) - \frac{1}{65} x^2 y\, [4 \cos(\ln x^2) + 7 \operatorname{sen}(\ln x^2)]$

31) $(x^2D_x^2 + xyD_xD_y - 2y^2D_y^2 - xD_x - 6yD_y)\, z = 0.$

Resp.: $z = \phi_1(y/x^2) + x^2 \phi^2(xy)$

32) $(x^2 D_x^2 - xyD_xD_y - 2y^2D_y^2 + xD_x - 2yD_y)\, z = \ln(y/x) - 1/2.$

Resp.: $z = \phi_1(x^2 y) + \phi_2(y/x) + \frac{1}{2} (\ln x)^2 \ln y + \frac{1}{2} \ln x \ln y$

33) $(x^2yD_x^2D_y - xy^2D_xD_y^2 - x^2D_x^2 + y^2D_y^2)\, z = \dfrac{x^3 + y^3}{xy}.$

Resp.: $z = x\,\phi_1(y) + y\,\phi_2(x) + \phi_3(xy) - \frac{1}{6}\left(\frac{x^3 - y^3}{xy}\right)$

Capítulo XXXIII

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS DE SEGUNDA ORDEM COM COEFICIENTES VARIÁVEIS

A equação diferencial parcial linear mais geral de segunda ordem, a duas variáveis independentes, tem a forma

$$(1) \qquad Rr + Ss + Tt + Pp + Qq + Zz = F$$

onde R, S. T, P, Q, Z, F são funções de x e y sòmente e nem sempre R, S, T são diferentes de zero.

Antes de considerarmos a equação geral, trataremos de um certo número de tipos especiais.

TIPO I.

$$(2a) \qquad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = F/R = F_1(x, y)$$

$$(2b) \qquad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = F/S = F_2(x, y)$$

$$(2c) \qquad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = F/T = F_3(x, y).$$

Estas são equações redutíveis com coeficientes constantes (Capítulo XXXII), porém veremos aqui um método mais direto de resolvê-las.

Exemplo 1. Resolver: $s = x - y$.

Integrando $s = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = x - y$ em relação a y, $p = \dfrac{\partial z}{\partial x} = xy - \frac{1}{2} y^2 + \psi(x)$, ψ arbitrário.

Integrando esta relação, com respeito a x, $z = \frac{1}{2} x^2 y - \frac{1}{2} xy^2 + \phi_1(x) + \phi_2(y)$, onde $\dfrac{d}{dx}\phi_1(x) = \psi(x)$ e $\phi_2(y)$ são funções arbitrárias.

TIPO II.

$$(3a) \qquad Rr + Pp = R\frac{\partial p}{\partial x} + Pp = F$$

$$(3b) \qquad Ss + Pp = S\frac{\partial p}{\partial y} + Pp = F$$

$$(3c) \qquad Ss + Qq = S\frac{\partial q}{\partial x} + Qq = F$$

$$(3d) \qquad Tt + Qq = T\frac{\partial q}{\partial y} + Qq = F.$$

Estas são, essencialmente, equações diferenciais ordinárias lineares de primeira ordem, nas quais p (ou q) é a variável dependente.

Exemplo 2. Resolver: $xr + 2p = (9x + 6)\,e^{3x+2y}$.

Considerando p como a variável dependente, x como a variável independente e y como constante, a equação é: $x\dfrac{\partial p}{\partial x} + 2p = (9x + 6)\,e^{3x+2y}$ para a qual x é um fator de integração.

Integrando, $x^2\dfrac{\partial p}{\partial x} + 2xp = (9x^2 + 6x)\,e^{3x+2y}$, temos:

$$x^2p = \frac{1}{D_x}(9x^2 + 6x)\,e^{3x+2y} = \frac{1}{3}e^{3x+2y}\left(1 - \frac{D_x}{3} + \frac{D_x^2}{9} - \cdots\right)(9x^2 + 6x) =$$

$$= 3x^2\,e^{3x+2y} + \phi_1(y) \quad \text{ou} \quad p = \frac{\partial z}{\partial x} = 3\,e^{3x+2y} + \frac{1}{x^2}\phi_1(y).$$

Então: $z = e^{3x+2y} - \dfrac{1}{x}\phi_1(y) + \phi_2(y)$ é a solução procurada.

TIPO III.

$$(4a) \qquad Rr + Ss + Pp = F \quad \text{ou} \quad R\frac{\partial p}{\partial x} + S\frac{\partial p}{\partial y} = F - Pp$$

$$(4b) \qquad Ss + Tt + Qq = F \quad \text{ou} \quad S\frac{\partial q}{\partial x} + T\frac{\partial q}{\partial y} = F - Qq.$$

Estas são equações diferenciais parciais lineares de primeira ordem com p (ou q) como variável dependente e x, y como variáveis independentes.

Exemplo 3. Resolver: $2xr - ys + 2p = 4xy^2$ ou $2x\dfrac{\partial p}{\partial x} - y\dfrac{\partial p}{\partial y} = 4xy^2 - 2p$.

Usando o método de Lagrange (Capítulo XXIX), o sistema auxiliar é:

$$\frac{dx}{2x} = \frac{dy}{-y} = \frac{dp}{4xy^2 - 2p}.$$

Das duas primeiras relações, temos, fàcilmente: $xy^2 = a$.

Por inspeção, $2y^4 (2x) + 2py(-y) - y^2 (4xy^2 - 2p) = 0$. Então:

$$2y^4\,dx + 2py\,dy - y^2\,dp = 0 \quad \text{ou} \quad 2\,dx - \frac{y^2\,dp - 2py\,dy}{y^4} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{p}{y^2} - 2x = b.$$

A solução geral é: $p/y^2 - 2x = \psi(xy^2)$. Daí:

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^2 + y^2\,\psi(xy^2) \quad \text{e} \quad z = x^2 y^2 + \phi_1(xy^2) + \phi_2(y),$$

onde

$$\frac{\partial}{\partial x}\phi_1(xy^2) = y^2\,\psi(xy^2).$$

TIPO IV.

$$(5a) \qquad Rr + Pp + Zz = F \quad \text{ou} \quad R\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + P\frac{\partial z}{\partial x} + Zz = F$$

$$(5b) \qquad Tt + Qq + Zz = F \quad \text{ou} \quad T\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + Q\frac{\partial z}{\partial y} + Zz = F.$$

Estas são, essencialmente, equações diferenciais ordinárias lineares, de segunda ordem, com x como variável independente em (5a) e y como variável independente em (5b).

EXEMPLO 4. Resolver: $t - 2xq + x^2 z = (x-2)\,e^{3x+2y}$.

A equação pode ser posta na forma:

$$(D_y^2 - 2xD_y + x^2)\,z = (D_y - x)^2\,z = (x-2)\,e^{3x+2y}.$$

A função complementar é: $z = e^{xy}\,\phi_1(x) + xe^{xy}\,\phi_2(x)$ e uma integral particular é:

$$\frac{1}{(D_y - x)^2}(x-2)\,e^{3x+2y} = \frac{x-2}{(2-x)^2}\,e^{3x+2y} = \frac{e^{3x+2y}}{x-2}.$$

A solução procurada é: $z = e^{xy}\,\phi_1(x) + xe^{xy}\,\phi_2(x) + \dfrac{e^{3x+2y}}{x-2}$.

(Ver também Problemas 1-8).

Transformação de Laplace. Esta transformação em

$$(1) \qquad Rr + Ss + Tt + Pp + Qq + Zz = G(u, v)$$

consiste na troca das variáveis independentes x, y por u, v, onde

$$(6) \qquad u = u(x, y), \quad v = v(x, y)$$

são escolhidas de modo que a equação resultante seja mais simples do que (1). De (6), temos:

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = z_u u_x + z_v v_x, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} = z_u u_y + z_v v_y,$$

$$r = \frac{\partial p}{\partial x} = z_u u_{xx} + (z_{uu} u_x + z_{uv} v_x) u_x + z_v v_{xx} + (z_{uv} u_x + z_{vv} v_x) v_x =$$
$$= z_{uu}(u_x)^2 + 2z_{uv} u_x v_x + z_{vv}(v_x)^2 + z_u u_{xx} + z_v v_{xx},$$

$$s = \frac{\partial p}{\partial y} = z_u u_{xy} + (z_{uu} u_y + z_{uv} v_y) u_x + z_v v_{xy} + (z_{uv} u_y + z_{vv} v_y) v_x =$$
$$= z_{uu} u_x u_y + z_{uv}(u_x v_y + u_y v_x) + z_{vv} v_x v_y + z_u u_{xy} + z_v v_{xy},$$

$$t = \frac{\partial q}{\partial y} = z_{uu}(u_y)^2 + 2z_{uv} u_y v_y + z_{vv}(v_y)^2 + z_u u_{yy} + z_v v_{yy}.$$

Admitamos que

$$(1') \qquad R' z_{uu} + S' z_{uv} + T' z_{vv} + P' z_u + Q' z_v + Zz = F$$

foi obtida fazendo as substituições acima em (1) e reagrupando.

Necessitamos, apenas, dos coeficientes:

$R' = R(u_x)^2 + Su_x u_y + T(u_y)^2$ e $T' = R(v_x)^2 + Sv_x v_y + T(v_y)^2$.

Nota-se que ambos são da forma

$$(7) \qquad R(\xi_x)^2 + S\xi_x\xi_y + T(\xi_y)^2 = (a\xi_x + b\xi_y)(e\xi_x + f\xi_y).$$

(I) Suponhamos $b/a \neq f/e$; então, se para u tomarmos qualquer solução de $a\xi_x + b\xi_y = 0$ e para v qualquer solução de $e\xi_x + f\xi_y = 0$, (1) transformar-se-á em (1') com $R' = T' = 0$.

Exemplo 5. Resolver:

a) $x^2(y-1)r - x(y^2-1)s + y(y-1)t + xyp - q = 0,$

b) $y(x+y)(r-s) - xp - yq - z = 0.$

a) Aqui (7) é $x^2(y-1)(\xi_x)^2 - x(y^2-1)\xi_x\xi_y + y(y-1)(\xi_y)^2 = 0$

ou $\qquad x^2(\xi_x)^2 - x(y+1)\xi_x\xi_y + y(\xi_y)^2 = (x\xi_x - y\xi_y)(x\xi_x - \xi_y) = 0.$

Agora $x\xi_x - y\xi_y = 0$ é satisfeita por $\xi = u = xy$ e $x\xi_x - \xi_y = 0$ é satisfeita por $\xi = v = xe^y$. Além disso, vê-se fàcilmente que estas soluções satisfazem também à equação diferencial dada. Assim, a solução procurada é:

$$z = \phi_1(xy) + \phi_2(xe^y).$$

b) Aqui (7) é $y(x+y)[(\xi_x)^2 - \xi_x\xi_y] = o$ ou $(\xi_x - \xi_y)\xi_x = 0$.

Agora $\xi_x - \xi_y = 0$ é satisfeita por $\xi = x + y$ e $\xi_x = 0$ por $\xi = y$. Entretanto, nenhuma dessas soluções satisfaz à equação diferencial dada.

Tomemos $u = x + y$ e $v = y$. Então:

$$p = z_u, \; q = z_u + z_v, \; r = z_{uu}, \; s = z_{uu} + z_{uv}$$

e a equação diferencial dada transforma-se em:

$$-y(x+y)z_{uv} - xz_u - yz_u - yz_v - z = 0 \quad \text{ou} \quad uvz_{uv} + uz_u + vz_v + z = 0$$

que pode ser escrita:

$$z_{uv} + \frac{1}{v}z_u + \frac{1}{u}zv + \frac{1}{uv}z = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial v} + \frac{1}{v}z\right) + \frac{1}{u}\left(\frac{\partial z}{\partial v} + \frac{1}{v}z\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{u}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial v} + \frac{1}{v}z\right) = 0.$$

Façamos: $\frac{\partial z}{\partial v} + \frac{1}{v}z = w$; então $\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{1}{u}w = 0$ e $wu = \psi(v)$. Agora:

$$\frac{\partial z}{\partial v} + \frac{1}{v}z = w = \frac{1}{u}\psi(v), \quad zv = \frac{1}{u}\lambda(v) + \phi_2(u) \quad \text{e}$$

$$z = \frac{1}{u}\phi_1(v) + \frac{1}{v}\phi_2(u),$$

onde $\frac{d}{dv}\lambda(v) = v\cdot\psi(v)$ e $\phi_1(v) = \frac{1}{v}\lambda(v)$. A solução procurada é:

$$z = \frac{\phi_1(y)}{x+y} + \frac{\phi_2(x+y)}{y}.$$

EXEMPLO 6. Resolver: $x^2r - y^2t + px - qy = x^2$.

Aqui (7) é: $x^2(\xi_x)^2 - y^2(\xi_y)^2 = (x\xi_x - \xi_y)(x\xi_x + y\xi_y) = 0$.

Agora $x\xi_x - y\xi_y = 0$ é satisfeita por $\xi = xy$ e $x\xi_x + y\xi_y = 0$ por $\xi = x/y$. Vê-se fàcilmente que estas soluções satisfazem à equação reduzida: $x^2r - y^2t + px - qy = 0$; assim, a função complementar é $z = \phi_1(x/y) + \phi_2(xy)$. Entretanto, esta função complementar pode ser obtida juntamente com a integral particular, como se segue. Façamos: $u = xy$ e $v = x/y$. Então:

$$p = yz_u + \frac{1}{y}z_v, \quad q = xz_u - \frac{x}{y^2}z_v, \quad r = y^2z_{uu} + 2z_{uv} + \frac{1}{y^2}z_{vv},$$

$$t = x^2 z_{uu} - 2\frac{x^2}{y^2}z_{uv} + \frac{x^2}{y^4}z_{vv} + \frac{2x}{y^3}z_v,$$

e a equação dada transforma-se em: $4x^2z_{uv} = x^2$ ou $z_{uv} = \frac{1}{4}$.

Integrando primeiro em relação a u, $z_v = \psi(v) + \frac{1}{4}u$, e, em seguida, em relação a v, $z = \phi_1(v) + \phi_2(u) + \frac{1}{4}uv = \phi_1(x/y) + \phi_2(xy) + \frac{1}{4}x^2$, onde $\frac{d}{dv}\phi_1(v) = \psi(v)$.

(Ver Problemas 9-10).

(II) Suponhamos $b/a = f/e$; então $R(\xi_x)^2 + S\xi_x\xi_y + T(\xi_y)^2 = m(a\xi_x + b\xi_y)^2$. Êste caso é tratado no Problema 11.

Equações diferenciais parciais não-lineares de segunda ordem. Um método capaz de resolver uma dada equação diferencial parcial não-linear de segunda ordem

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0 \tag{8}$$

é sugerido por vários dos exemplos de equações lineares, acima. Nos exemplos 1-3, o primeiro passo consistiu em se determinar uma relação da

$$u = \psi(v), \quad \psi \text{ arbitrário,} \tag{9}$$

onde $u = u(x, y, z, p, q)$ e $v = v(x, y, z, p, q)$, da qual a equação diferencial dada poderia ser obtida, pela eliminação das funções arbitrárias. Uma tal relação (9) é chamada uma *integral intermediária* de (8). Por exemplo: $p - xy + \frac{1}{2} y^2 = \psi(x)$ é uma integral intermediária de $S = x - y$. (Exemplo 1).

Pode-se mostrar que a mais geral das equações diferenciais parciais tendo

$$u = \psi(v), \quad \psi \text{ arbitrário,}$$

onde $u = u(x, y, z, p, q)$ e $v = v(x, y, z, p, q)$, como integral intermediária, tem a forma

$$Rr + Ss + Tt + U(rt - s^2) = V, \tag{10}$$

onde R, S, T, U, V são funções de x, y, z, p, q. Entretanto, é evidente das definições de $R, S, \cdots, V$, que nem tôda equação da forma (10) tem uma integral intermediária. O método de Monge para a determinação de uma integral intermediária de (10), discutido abaixo, admite a existência de uma.

TIPO: $Rr + Ss + Tt = V$. Consideremos a equação:

$$Rr + Ss + Tt = V, \tag{11}$$

isto é, (10) com U idênticamente nulo. Como procuramos z como uma função de x e y, temos sempre:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = p\,dx + q\,dy, \tag{12$_1$}$$

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy = r\,dx + s\,dy, \tag{12$_2$}$$

$$dq = \frac{\partial q}{\partial x} dx + \frac{\partial q}{\partial y} dy = s\,dx + t\,dy. \tag{12$_3$}$$

Das duas últimas, temos:

$$r = \frac{dp - s\,dy}{dx}, \quad t = \frac{dq - s\,dx}{dy}$$

que substituídos em (11), dão:

$$R\frac{dp - s\,dy}{dx} + Ss + T\frac{dq - s\,dx}{dy} = V$$

ou

(13) $s[R(dy)^2 - S\,dx\,dy + T(dx)^2] = R\,dy\,dp + T\,dx\,dq - V\,dx\,dy.$

As equações

$$(14_1) \qquad R(dy)^2 - S\,dx\,dy + T(dx)^2 = 0$$

$$(14_2) \qquad R\,dy\,dp + T\,dx\,dq - V\,dx\,dy = 0$$

são chamadas *equações de Monge.*

Suponhamos: $R(dy)^2 - S\,dx\,dy + T(dx)^2 = (A\,dy + B\,dx)^2 = 0.$ Se, agora, $u = u(x, y, z, p, q) = a$, $v = v(x, y, z, p, q) = b$ satisfizerem ao sistema

$$\begin{cases} A\,dy + B\,dx = 0 \\ R\,dy\,dp + T\,dx\,dq - V\,dx\,dy = 0, \end{cases}$$

então

$$u = \psi(v)$$

será uma integral intermediária de (11) porque $u = a$, $v = b$ satisfarão (13) e, assim, (11), também.

Suponhamos

$R(dy)^2 - S\,dx\,dy + T(dx)^2 = (A_1\,dy + B_1\,dx)(A_2\,dy + B_2\,dx) = 0,$

onde $A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$. Temos, agora, dois sistemas:

$$\begin{cases} A_1\,dy + B_1\,dx = 0 \\ R\,dy\,dp + T\,dx\,dq - V\,dx\,dy = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} A_2\,dy + B_2\,dx = 0 \\ R\,dy\,dp + T\,dx\,dq - V\,dx\,dy = 0. \end{cases}$$

Se um dos sistemas fôr integrável, temos uma integral intermediária de (11); se ambos forem integráveis, temos duas integrais intermediárias à nossa disposição. Nos exemplos e problemas resolvidos discutiremos processos próprios para determinar uma solução de uma dada equação, da qual se conhece uma integral intermediária.

EXEMPLO 7. Resolver: $q(yq + z)r - p(2yq + z)s + yp^2t + p^2q = 0.$

Aqui: $R = q(yq + z)$, $S = -p(2yq + z)$, $T = yp^2$, $V = -p^2q$; as equações de Monge, são:

$$R(dy)^2 - S\,dx\,dy + T(dx)^2 = q(yq + z)(dy)^2 + p(2yq + z)\,dx\,dy + yp^2(dx)^2 = $$
$$= (q\,dy + p\,dx)[(yq + z)\,dy + yp\,dx) = 0$$

e $\quad R\,dy\,dp + T\,dx\,dq - V\,dx\,dy = q(yq + z)\,dy\,dp + yp^2\,dx\,dq + p^2q\,dx\,dy = 0.$

Procuramos, primeiro, uma solução do sistema:

$$\left[\begin{array}{l} q\,dy + p\,dx = 0 \\ q\,(yq+z)\,dy\,dp + yp^2\,dx\,dq + p^2q\,dx\,dy = 0. \end{array}\right.$$

Combinando a primeira equação com (12_1), temos: $dz = 0$ e $z = a$. Entrando na segunda equação com $dy = -p\,dx/q$, obtido da primeira, temos:

$$(yq+z)\,dp - p\,(y\,dq + q\,dy) = 0.$$

Somando $-p\,dz = 0$ a esta última, temos:

$(yq+z)\,dp - p\,(y\,dq + q\,dy + dz) = 0$ ou $\dfrac{dp}{p} = \dfrac{y\,dq + q\,dy + dz}{yq+z}$ com solução $\dfrac{yq+z}{p} = b$. Então: $yq+z = p \cdot f(z)$ é uma integral intermediária. O sistema de Lagrange para esta equação de primeira ordem é: $\dfrac{dx}{f(z)} = \dfrac{dy}{-y} = \dfrac{dz}{z}$.

De $\dfrac{dy}{-y} = \dfrac{dz}{z}$ temos: $yz = a$ e de $\dfrac{dx}{f(z)} = \dfrac{dz}{z}$ temos: $x = \int f(z)\dfrac{dz}{z} = \phi_1(z) + b$.

Assim, a solução procurada é: $x = \phi_1(z) + \phi_2(yz)$.

Consideremos, agora, o segundo sistema:

$$\left[\begin{array}{l} (yq+z)\,dy + yp\,dx = 0 \\ q\,(yq+z)\,dy\,dp + yp^2\,dx\,dq + p^2q\,dx\,dy = 0. \end{array}\right.$$

Da primeira equação: $p\,dx + q\,dy = -z\,dy/y$; então $dz = -dy/y$ e $yz = a$. Combinando a primeira equação com a segunda, temos:

$$qy\,dp - py\,dq - pq\,dy = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{dp}{p} - \frac{dq}{q} - \frac{dy}{y} = 0$$

com a solução $qy/p = b$. Então: $qy = p \cdot g(yz)$ é uma integral intermediária. O sistema de Lagrange é: $\dfrac{dx}{g(yz)} = \dfrac{dy}{-y}$, $dz=0$. Então $z=a$ e a primeira equação $\dfrac{dx}{g(ya)} = \dfrac{dy}{-y}$ tem solução $x = -\int g(ya)\dfrac{dy}{y} = \phi_2(ya)+b$. Daí: $x=\phi_1(z)+\phi_2(yz)$, como anteriormente.

A solução pode também ser obtida, usando as duas integrais intermediárias, simultâneamente. Depois de resolvê-las, obtendo

$$p = \frac{z}{f(z) - g(yz)}, \quad q = \frac{z \cdot g(yz)}{y\,[f(z) - g(yz)]}$$

e substituir em $p\,dx + q\,dy = dz$, temos: $yz\,dx + zg(yz)\,dy = yf(z)\,dz - yg(yz)\,dz$. Fazendo $f(z) = z f_1(z)$ e $g(yz) = -yzg_1(yz)$, esta equação se transforma em:

$$dx = f_1(z)\,dz + g_1(yz)\,[z\,dy + y\,dz]$$

e, integrando:

$$x = \phi_1(z) + \phi_2(yz).$$

(Ver também Problemas 12-16).

TIPO: $Rr + Ss + Tt + U(rt - s^2) = V$. Consideremos a equação (10) com $U \neq 0$. Substituindo $r = \dfrac{dp - s\,dy}{dx}$, $t = \dfrac{dq - s\,dx}{dy}$, como no tipo precedente, temos:

$$s\,[R(dy)^2 - S\,dx\,dy + T(dx)^2 + U(dx\,dp + dy\,dq)] =$$
$$= R\,dy\,dp + T\,dx\,dq + U\,dp\,dq - V\,dx\,dy.$$

As equações

$$(15_1) \qquad R(dy)^2 - S\,dx\,dy + T(dx)^2 + U(dx\,dp + dy\,dq) = 0$$

$$(15_2) \qquad R\,dy\,dp + T\,dx\,dq + U\,dp\,dq - V\,dx\,dy = 0$$

são chamadas *equações de Monge*. Note que quando $U = 0$, estas equações são (14_1) e (14_2). Entretanto, ao contrário de (14_1) e (14_2), nenhuma pode ser fatorada.

Tentaremos fixar $\lambda = \lambda(x, y, z, p, q)$ de modo que se obtenha uma combinação fatorável

$$(16) \qquad \lambda\,[R(dy)^2 - S\,dx\,dy + T(dx)^2 + U(dx\,dp + dy\,dq)] +$$
$$+ R\,dy\,dp + T\,dx\,dq + U\,dp\,dq - V\,dx\,dy =$$
$$= (a\,dy + b\,dx + c\,dp)\,(\alpha\,dy + \beta\,dx + \gamma\,dq) =$$
$$= a\alpha(dy)^2 + (a\beta + b\alpha)\,dx\,dy + b\beta(dx)^2 + c\beta\,dx\,dp + a\gamma\,dy\,dq +$$
$$+ c\alpha\,dy\,dp + b\gamma\,dx\,dq + c\gamma\,dp\,dq = 0.$$

Comparando coeficientes, temos:

$$a\alpha = R\lambda,\quad a\beta + b\alpha = -S\lambda - V,\quad b\beta = T\lambda,\quad c\beta = U\lambda = a\gamma,\quad c\alpha = R,$$
$$b\gamma = T,\quad c\gamma = U.$$

A primeira relação será satisfeita tomando-se $a = \lambda$ e $\alpha = R$; esta escolha determina $b = T/U$, $\beta = \lambda U$, $c = 1$, $\gamma = U$. A relação restante $a\beta + b\alpha = -S\lambda - V$ toma a forma

$$U\lambda^2 = \frac{TR}{U} = -S\lambda - V$$

ou

$$(17) \qquad U^2\lambda^2 + SU\lambda + TR + UV = 0.$$

Em geral, (17) terá duas raízes distintas: $\lambda = \lambda_1$, $\lambda = \lambda_2$; então, (16) pode ser fatorado:

$$(18_1) \qquad (\lambda_1 U dy + T dx + U dp)\,(R dy + \lambda_1 U dx + U dq) = 0$$

e

$$(18_2) \qquad (\lambda_2 U dy + T dx + U dp)\,(R dy + \lambda_2 U dx + U dq) = 0.$$

Temos que considerar 4 (quatro) sistemas. O sistema

$$\lambda_1 U dy + T dx + U dp = 0,\ \lambda_2 U dy + T dx + U dp = 0$$

implica $(\lambda_1 - \lambda_2) U dy = 0$ e, assim, a menos que: $\lambda_1 = \lambda_2$, $U dy = 0$ idênticamente. Do mesmo modo o sistema

$$R dy + \lambda_1 U dx + U dq = 0,\ R dy + \lambda_2 U dx + U dq = 0$$

acarreta $U dx = 0$ idênticamente. Usaremos, portanto, sòmente os sistemas:

$$(19)\quad \left[\begin{array}{l}\lambda_1 U dy + T dx + U dp = 0\\ R dy + \lambda_2 U dx + U dq = 0\end{array}\right. \quad \text{e} \quad \left[\begin{array}{l}\lambda_2 U dy + T dx + U dp = 0\\ R dy + \lambda_1 U dx + U dq = 0.\end{array}\right.$$

Cada sistema integrável dá uma integral intermediária de (10).

EXEMPLO 8. Resolver: $3s - 2(rt - s^2) = 2$.

Aqui: $R = 0$, $S = 3$, $T = 0$, $U = -2$, $V = 2$. Então:

$U^2\lambda^2 + SU\lambda + TR + UV = 4\lambda^2 - 6\lambda - 4 = 0$, $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ e $\lambda_2 = 2$.

Procuramos soluções dos sistemas:

$$\left[\begin{array}{l}\lambda_1 U dy + T dx + U dp = dy - 2dp = 0\\ R dy + \lambda_2 U dx + U dq = -4dx - 2dq = 0\end{array}\right.$$

e

$$\left[\begin{array}{l}\lambda_2 U dy + T dx + U dp = -4dy - 2dp = 0\\ R dy + \lambda_1 U dx + U dq = dx - 2dq = 0.\end{array}\right.$$

Do primeiro sistema, $y - 2p = a$ e $2x + q = b$; então (I) $y - 2p = f(2x+q)$ é uma integral intermediária. Do segundo sistema, $2y + p = a$ e $x - 2q = b$; então (II) $2y + p = g(x - 2q)$ é uma integral intermediária. Como q aparece nos argumentos de f e g, não é mais possível obter uma solução da equação dada, envolvendo duas funções arbitrárias, pela substituição de p e q em $dz = p\,dx + q\,dy$.

Tentaremos achar uma solução envolvendo constantes arbitrárias, partindo da integral intermediária $y - 2p = f(2x+q)$. Para obtermos uma equação integrável, tomemos $f(2x+q) = \alpha(2x+q) + \beta$, onde α e β são constantes arbitrárias. O sistema de Lagrange para

$$y - 2p = a(2x + q) + \beta \quad \text{ou} \quad 2p + aq = y - 2ax - \beta$$

é

$$\frac{dx}{2} = \frac{dy}{\alpha} = \frac{dz}{y - 2\alpha x - \beta}.$$

Os dois primeiros membros dão: $\alpha x = 2y + \xi$. Êsse valor de αx, nos dois últimos membros, dá:

$$\frac{dy}{\alpha} = \frac{dz}{-3y - 2\xi - \beta}$$

$$\alpha\, dz = (-3y - 2\xi - \beta)\, dy \quad \text{e} \quad \alpha z = -\frac{3}{2} y^2 - 2\xi y - \beta y + \eta.$$

Então: $\alpha z = \frac{5}{2}y^2 - (2\alpha z + \beta)y + \phi_1(\alpha x - 2y)$ é uma solução da equação dada, envolvendo uma função arbitrária e duas constantes arbitrárias.

Operando do mesmo modo com a segunda integral intermediária, $2y + p = \gamma(x - 2q) + \delta$ ou $p + 2\gamma q = \gamma x - 2y + \delta$, onde γ e δ são constantes arbitrárias. O sistema de Lagrange correspondente é: $\frac{dx}{1} = \frac{dy}{2\gamma} = \frac{dz}{\gamma x - 2y + \delta}$. Dos dois primeiros membros, $y = 2\gamma x + \xi$. Agora, o primeiro e o terceiro membros transformam-se em: $\frac{dx}{1} = \frac{dz}{-3\gamma x - 2\xi + \delta}$ e $z = -\frac{3}{2}\gamma x^2 - 2\xi x + \delta x + \eta$.

Logo, $z = \frac{5}{2}\gamma x^2 - (2y - \delta)x + \phi_2(y - 2\gamma x)$ é também uma solução envolvendo uma função arbitrária e duas constantes arbitrárias.

Em seguida, determinaremos uma solução envolvendo duas funções arbitrárias de parâmetros λ e μ. Façamos: $2x + q = \lambda$ e $x - 2q = \mu$ de modo que $x = (2\lambda + \mu)/5$. Então (I) e (II) transformam-se em $y - 2p = f(\lambda)$ e $2y + p = g(\mu)$ e $y = [f(\lambda) + 2g(\mu)]/5$. Agora:

(III) $$p = \tfrac{1}{2}[y - f(\lambda)] = -2y + g(\mu)$$

e

(IV) $$q = \lambda - 2x = \tfrac{1}{2}(x - \mu).$$

Entrando com o segundo valor de p e o primeiro valor de q em $dz = p\,dx + q\,dy$, temos:

$$dz = [-2y + g(\mu)]\,dx + (\lambda - 2x)\,dy =$$

$$= -2(y\,dx + x\,dy) + \frac{1}{5}g(\mu)[2\,d\lambda + d\mu] + \frac{1}{5}\lambda[f'(\lambda)\,d\lambda + 2g'(\mu)\,d\mu] =$$

$$= -2(y\,dx + x\,dy) + \frac{2}{5}[\lambda g'(\mu)\,d\mu + g(\mu)\,d\lambda] + \frac{1}{5}[\lambda f'(\lambda) + f(\lambda)]\,d\lambda -$$

$$- \frac{1}{5}f(\lambda)\,d\lambda + \frac{1}{5}g(\mu)\,d\mu$$

e $$z = -2xy + \frac{2}{5}\lambda g(\mu) + \frac{1}{5}\lambda f(\lambda) - \phi_1(\lambda) + \phi_2(\mu) =$$

$$= -2xy + \lambda y - \phi_1(\lambda) + \phi_2(\mu).$$

Poderíamos obter esta solução entrando com o primeiro valor de p em (III) e o segundo valor de q em (IV). (Ver também Problemas 17-18).

PROBLEMAS RESOLVIDOS

1) Resolver: $r = x^2e^{-y}$ ou $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = x^2e^{-y}$.

Uma integração, em relação a x, dá: $p = \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{x^3}{3}e^{-y} + \phi_1(y)$ e a segunda integração, em relação a x, dá: $z = \dfrac{x^4}{12}e^{-y} + x\phi_1(y) + \phi_2(y)$.

2) Resolver: $xy^2s = 1 - 4x^2y$.

Integrando: $$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = x^{-1}y^{-2} - 4xy^{-1}$$

em relação a y: $$\frac{\partial z}{\partial x} = -x^{-1}y^{-1} - 4x\ln y + \psi(x).$$

Integrando agora em relação a x: $z = -\dfrac{1}{y}\ln x - 2x^2\ln y + \phi_1(x) + \phi_2(y)$, onde $\dfrac{d}{dx}\phi_1(x) = \psi(x)$.

3) Resolver: $xys - px = y^2$.

Integrando $\dfrac{y\dfrac{\partial p}{\partial y} - p}{y^2} = \dfrac{1}{x}$ em relação a y, temos:

$$\frac{p}{y} = \frac{y}{x} + \psi(x) \quad \text{ou} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y^2}{x} + y\,\psi(x).$$

Integrando em relação a x, temos:

$$z = y^2\ln x + y\phi_1(x) + \phi_2(y), \quad \text{onde} \quad \frac{d}{dx}\phi_1(x) = \psi(x).$$

4) Resolver: $t - xq = -\operatorname{sen} y - x\cos y$.

Integrando $\dfrac{\partial q}{\partial y} - xq = -(\operatorname{sen} y + x\cos y)$, usando o fator de integração e^{-xy}, obtemos: $e^{-xy}q = -\int e^{-xy}(\operatorname{sen} y + x\cos y)\,dy = e^{-xy}\cos y + \psi(x)$ ou $q = \dfrac{\partial z}{\partial y} = \cos y + e^{xy}\psi(x)$.

Uma segunda integração, em relação a y, dá:

$$z = \operatorname{sen} y + e^{xy}\phi_1(x) + \phi_2(x), \quad \text{onde} \quad \phi_1(x) = \psi(x)/x.$$

5) Resolver: $sy - 2xr - 2p = 6xy$.

O sistema auxiliar para a equação $2x\dfrac{\partial p}{\partial x} - y\dfrac{\partial p}{\partial y} = -6xy - 2p$ é

$$\frac{dx}{2x} = \frac{dy}{-y} = \frac{dp}{-6xy - 2p}.$$

Das primeira e segunda relações, temos: $xy^2 = a$. Por inspeção:

$$2y^3(2x) - (2yp + 2xy^2)(-y) + y^2(-6xy - 2p) = 0$$

de modo que: $\quad 2y^3dx - (2yp + 2xy^2)\,dy + y^2dp = 0,$

ou $\quad \dfrac{y^2\,(dp + 2x\,dy + 2y\,dx) - 2y\,(p + 2xy)\,dy}{y^4} = 0 \;$ e $\; \dfrac{p + 2xy}{y^2} = b.$

Logo, temos como solução: $p + 2xy = y^2\psi\,(xy^2)$. Então:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -2xy + y^2\,\psi\,(xy^2) \;\text{ e }\; z = -x^2y + \phi_1\,(xy^2) + \phi_2\,(y),$$

onde $$\frac{\partial}{\partial x}\,\phi_1\,(xy^2) = y^2\,\psi\,(xy^2).$$

6) Resolver: $xs + yt + q = 10x^3y$.

O sistema auxiliar para a equação

$$x\,\frac{\partial q}{\partial x} + y\,\frac{\partial q}{\partial y} = 10x^3y - q \;\text{ é }\; \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dq}{10x^3y - q}.$$

Das duas primeiras relações, temos: $x/y = a$. Por inspeção:

$$(q - 8x^3y)\,x - 2x^4\,(y) + x\,(10x^3y - q) = 0$$

de modo que:

$(q - 8x^3y)\,dx - 2x^4dy + xdq = 0, \quad$ ou $\quad xdq + qdx = 8x^3y\,dx + 2x^4dy$

e $$qx = 2x^4y + b.$$

A solução geral é: $qx = 2x^4y + \psi\,(y/x)$. Logo:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^3y + \frac{1}{x}\,\psi\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{e} \quad z = x^3y^2 + \phi_1\left(\frac{y}{x}\right) + \phi_2\,(x),$$

onde $$\frac{\partial}{\partial y}\,\phi_1\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x}\,\psi\left(\frac{y}{x}\right).$$

7) Resolver: $t - q - \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x} - 1\right)z = xy^2 - x^2y^2 + 2x^3y - 2x^3$.

Podemos escrever a equação do seguinte modo:

$$\left[D_y^2 - D_y - \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} - 1\right)\right]z = xy^2 - x^2y^2 + 2x^3y - 2x^3.$$

A função complementar é: $z = e^{y/x}\,\phi_1\,(x) + e^{y - y/x}\,\phi_2\,(x)$.

Para uma integral particular tentaremos: $z = Ay^2 + By + C$, onde A, B, C são funções de x ou constantes. Então:

$$\left[D_y^2 - D_y - \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} - 1\right)\right]z = 2A - 2Ay - B - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x}\right)(Ay^2 + By + C) =$$
$$= xy^2 - x^2y^2 + 2x^3y - 2x^3,$$

idênticamente. Igualando os coeficientes das diferentes potências de y, temos:

$$-\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right) A = x(1-x), \quad -2A-\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right) B = 2x^3,$$

$$2A - B - \left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right) C = -2x^3.$$

Então: $A = -x^3$, $B = C = 0$ e a solução procurada é:

$$z = e^{y/x}\phi_1(x) + e^{y-y/x}\phi_2(x) - x^3y^2.$$

8) Resolver: $ys + p - yq - z = (1-x)(1+\ln y)$.

Resolve-se fàcilmente, notando-se que a equação pode ser posta na forma:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{z}{y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{1}{y}z\right) - \left(\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{1}{y}z\right) =$$

$$= \frac{1-x}{y}(1+\ln y).$$

Fazendo $w = \frac{\partial z}{dy} + \frac{1}{y}z$, a equação transforma-se em

$$\frac{\partial w}{dx} - w = \frac{1-x}{y}(1+\ln y)$$

para a qual e^{-x} é um fator de integração. Então:

$$e^{-x}w = \frac{1+\ln y}{y}\int^x (e^{-x} - xe^{-x})\,dx = \frac{1+\ln y}{y}(xe^{-x}) + \psi(y)$$

e

$$w = x\frac{1+\ln y}{y} + e^x\psi(y).$$

Por sua vez, integrando $\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{1}{y}z = x\frac{1+\ln y}{y} + e^x\psi(y)$ e usando o fator de integração y, temos:

$$yz = x\int^y (1+\ln y)\,dy + e^x\int^y y\psi(y)\,dy = xy\ln y + e^x\phi_1(y) + \phi_2(x).$$

TRANSFORMAÇÃO DE LAPLACE

9) Resolver: $t - s + p - q(1+1/x) + z/x = 0$.

Fazendo $(\xi_y)^2 - \xi_x\xi_y = 0$ e resolvendo, temos: $\xi = x$ e $\xi = x+y$.

Escolhendo $u = x$ e $v = x+y$, temos: $p = z_u + z_v$, $q = z_v$, $s = z_{uv} + z_{vv}$ e $t = z_{vv}$. Substituindo na equação dada, temos:

$$z_{uv} - z_u + \frac{1}{x}(z_v - z) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial v} - z\right) + \frac{1}{x}\left(\frac{\partial z}{\partial v} - z\right) = 0.$$

Façamos $\frac{\partial z}{\partial v} - z = w$; então: $\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{w}{u} = 0$ e $uw = u\left(\frac{\partial z}{\partial v} - z\right) = \psi(v)$.

Integrando $\frac{\partial z}{\partial v} - z = \frac{1}{u}\psi(v)$, temos:

$$e^{-v} z = \frac{1}{u}\phi_1(v) + \phi(u) \text{ ou } z = \frac{e^v}{u}\phi_1(v) + e^v \phi(u).$$

Nas variáveis originais:

$$z = \frac{e^{x+y}}{x}\phi_1(x+y) + e^{x+y}\phi(x) = \frac{1}{x} f(x+y) + e^y g(x),$$

onde $f(x+y) = e^{x+y}\phi_1(x+y)$ e $g(x) = e^x \phi(x)$.

10) Resolver: $xys - x^2 r - px - qy + z = -2x^2 y$.

De $xy\xi_x\xi_y - x^2(\xi_x)^2 = x\xi_x(y\xi_y - x\xi_x) = 0$, temos: $\xi = y$ e $\xi = xy$.

Usando

$u = xy$, $v = y$, $p = yz_u$, $q = xz_u + z_v$, $r = y^2 z_{uu}$, $s = z_u + xyz_{uu} + yz_{uv}$,
a equação diferencial dada transforma-se em:

$$z_{uv} - \frac{1}{v}z_u - \frac{1}{u}z_v + \frac{1}{uv}z = -\frac{2u}{v^2} \text{ ou } \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{1}{v}z\right) - \frac{1}{u}\left(\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{1}{v}z\right) = -\frac{2u}{v^2}.$$

Façamos:

$\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{1}{v}z = w$; então: $\frac{\partial w}{\partial u} - \frac{w}{u} = -\frac{2u}{v^2}$ e $\frac{w}{u} = -\frac{2u}{v^2} + \psi(v)$

ou

$$w = -\frac{2u^2}{v^2} = u\psi(v).$$

Integrando $w = \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{1}{v}z = -\frac{2u^2}{v^2} + u\psi(v)$, temos:

$$\frac{z}{v} = \frac{u^2}{v^2} + u\psi_1(v) + \phi_2(u)$$

ou

$$z = \frac{u^2}{v} + uv\psi_1(v) + v\phi_2(u) = \frac{u^2}{v} + u\lambda_1(v) + v\phi_2(u).$$

Nas variáveis originais:

$$z = xy\lambda_1(y) + y\phi_2(xy) + x^2 y = x\phi_1(y) + y\phi_2(xy) + x^2 y.$$

11) Resolver: $x^2 r - 2xys + y^2 t - xp + 3yq = 8y/x$.

Aqui: $x^2(\xi_x)^2 - 2xy\xi_x\xi_y + y^2(\xi_y)^2 = (x\xi_x - y\xi_y)^2 = 0$ e, como os fatôres não são distintos, temos: $\xi = xy$.

Fazemos $u = xy$ e tomamos $v = y$; então: $p = yz_u$, $q = xz_u + z_v$, $r = y^2 z_{uu}$, $s = z_u + xyz_{uu} + yz_{uv}$, $t = x^2 z_{uu} + 2xz_{uv} + z_{vv}$ e a equação diferencial dada transforma-se em:

$$y^2 z_{vv} + 3yz_v = 8y/x \text{ ou } v^2 z_{vv} + 3vz_v = 8v^2/u,$$

uma equação do tipo da equação de Cauchy. Entretanto, vê-se que v é um fator de integração; assim:

$$v^3 z_{vv} + 3v^2 z_v = 8v^3/u \quad \text{e} \quad v^3 z_v = 2v^4/u + \phi(u).$$

Então: $z_v = \dfrac{2v}{u} + \dfrac{1}{v^3}\phi(u)$ e $z = \dfrac{v^2}{u} - \dfrac{1}{2v^2}\phi(u) + \phi_1(u) =$

$$= \frac{v^2}{u} + \frac{1}{v^2}\psi(u) + \phi_1(u) =$$

$$= \phi_1(xy)\frac{1}{y^2} + \psi(xy) + \frac{y}{x}$$

ou $z = \phi_1(xy) + x^2\phi_2(xy) + \dfrac{y}{x}$, onde $\psi(xy) = x^2y^2\phi_2(xy)$.

MÉTODO DE MONGE

12) Resolver: $qs - pt = q^3$.

As equações de Monge são:

$$q\,dx\,dy + p\,(dx)^2 = 0 \quad \text{e} \quad p\,dx\,dq + q^3\,dx\,dy = 0.$$

Da primeira, temos:

$$q\,dy + p\,dx = 0; \text{ então: } dz = p\,dx + q\,dy = 0 \text{ e } z = a.$$

Substituindo $q\,dy = -p\,dx$ na segunda equação, temos: $dq - q^2 dx = 0$; logo, $1/q + x = b$ e $1/q + x = f(z)$ ou $[x - f(z)]q = -1$ é uma integral intermediária.

Obtém-se a solução procurada, resolvendo-se esta equação de primeira ordem; então: $xz - \int f(z)\,dz = -y + \phi_2(x)$ ou $y + xz = \phi_1(z) + \phi_2(x)$, onde $\phi_1'(z) = f(z)$.

13) Resolver: $q^2r - 2pqs + p^2t = pq^2$.

As equações de Monge são:

$$(q\,dy + p\,dx)^2 = 0 \quad \text{e} \quad q^2\,dy\,dp + p^2\,dx\,dq - pq^2\,dx\,dy = 0.$$

Da primeira, temos:

$$q\,dy + p\,dx = 0; \text{ então: } dz = p\,dx + q\,dy = 0 \text{ e } z = a.$$

Substituindo $q\,dy = -p\,dx$ na segunda equação, temos:

$$-q\,dp + p\,dq + pq\,dx = 0 \text{ ou } -\frac{dp}{p} + \frac{dq}{q} + dx = 0 \text{ e } e^x q/p = b.$$

Logo, $e^x q - p\,f(z) = 0$ é uma integral intermediária. O sistema de Lagrange para esta equação é: $\dfrac{dx}{f(z)} = \dfrac{dy}{-e^x}$, $dz = 0$.

Da segunda, temos: $z = c$. A primeira torna-se: $\dfrac{dx}{f(c)} = \dfrac{dy}{-e^x}$ com solução $e^x/f(c) + y = d$. A solução procurada é:

$$\therefore \quad y = -e^x/f(z) + \phi_2(z) = e^x \phi_1(z) + \phi_2(z), \quad \text{onde} \quad \phi_1(z) = -1/f(z).$$

14) Resolver: $x(r + 2xs + x^2 t) = p + 2x^3$.

As equações de Monge são:

$$(dy)^2 - 2x\,dx\,dy + x^2(dx)^2 = (dy - x\,dx)^2 = 0$$

e

$$x\,dy\,dp + x^3\,dx\,dq - (p + 2x^3)\,dx\,dy = 0.$$

Procuramos uma solução do sistema:

$$dy - x\,dx = 0, \quad x\,dy\,dp + x^3\,dx\,dq - (p + 2x^3)\,dx\,dy = 0.$$

Da primeira equação, temos: $x^2 - 2y = a$. Substituindo $dy = x\,dx$ na segunda, temos: $x\,dp + x^2\,dq - (p + 2x^3)\,dx = 0$. Com o fator de integração $1/x^2$, obtemos a integral intermediária $p + xq = x^3 + xf(x^2 - 2y)$. O sistema de Lagrange é: $\dfrac{dx}{1} = \dfrac{dy}{x} = \dfrac{dz}{x^3 + xf(x^2 - 2y)}$. Os dois primeiros membros dão: $x^2 - 2y = c$ o que transforma o primeiro e o terceiro em:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dz}{x^3 + x f(c)}.$$

Resolvendo:

$$z = \tfrac{1}{4} x^4 + \tfrac{1}{2} x^2 f(c) + \phi(c) \quad \text{ou} \quad z = \tfrac{1}{4} x^4 + \tfrac{1}{2} x^2 f(x^2 - 2y) + \phi(x^2 - 2y).$$

15) Resolver: $q(1 + q)r - (1 + 2q)(1 + p)s + (1 + p)^2 t = 0$.

As equações de Monge são:

$$\begin{aligned} q(1 + q)(dy)^2 + (1 + 2q)(1 + p)\,dx\,dy + (1 + p)^2(dx)^2 &= \\ = [q\,dy + (1 + p)\,dx][(1 + q)\,dy + (1 + p)\,dx] &= 0 \end{aligned}$$

e

$$q(1 + q)\,dy\,dp + (1 + p)^2\,dx\,dq = 0.$$

Consideremos primeiro o sistema:

$$q\,dy + (1 + p)\,dx = 0$$
$$q(1 + q)\,dy\,dp + (1 + p)^2\,dx\,dq = 0.$$

Da primeira equação, temos: $p\,dx + q\,dy = -dx$; então: $dz = -dx$ e $x + z = a$. A substituição de $q\,dy = -(1 + p)\,dx$, na segunda, dá:

$$-(1 + q)\,dp + (1 + p)\,dq = 0$$

da qual obtemos: $\dfrac{1 + p}{1 + q} = b$. Logo, $\dfrac{1 + p}{1 + q} = f(x + z)$ é uma integral intermediária.

Consideremos agora o sistema:

$$(1 + q)\, dy + (1 + p)\, dx = 0$$
$$q\,(1 + q)\, dy\, dp + (1 + p)^2\, dx\, dq = 0.$$

Da primeira equação, temos: $p\, dx + q\, dy = -(dx + dy)$ de modo que $dz = -(dx + dy)$ e $x + y + z = a$. A substituição $(1 + q)\, dy = -(1+p)\, dx$, na segunda, dá: $-qdp + (1 + p)\,dq = 0$ que é satisfeita por $\frac{1 + p}{q} = b$.

Assim, $\frac{1 + p}{q} = g\,(x + y + z)$ é uma integral intermediária.

Resolvendo as duas integrais intermediárias, temos: $p = \frac{fg + f - g}{g - f}$, $q = \frac{f}{g - f}$, que substituídos na relação $p\, dx + q\, dy = dz$, dão:

$(fg + f - g)\, dx + f\, dy = (g - f)\, dz$, $\quad fg\, dx = -f\,(dx + dy + dz) + g\,(dx + dz)$,

$$dx = -\frac{dx + dy + dz}{g\,(x + y + z)} + \frac{dx + dz}{f\,(x + z)} \quad \text{e} \quad x = \phi_1\,(x + y + z) + \phi_2\,(x + z).$$

16) **Resolver:**

$$(x - z)\,[xq^2 r - q\,(x + z + 2px)\, s + (z + px + pz + p^2 x)\, t] = (1 + p)\, q^2\,(x + z).$$

As equações de Monge são:

$$xq^2\,(dy)^2 + q\,(x + z + 2px)\, dx\, dy + (1 + p)\,(z + px)\,(dx)^2 =$$
$$= [q\, dy + (1 + p)\, dx]\,[xq\, dy + (z + px)\, dx] = 0$$

e $\quad (x - z)\,[xq^2 dy\, dp + (1 + p)\,(z + px)\, dx\, dq] - (1 + p)\, q^2\,(x + z)\, dx\, dy = 0.$

Consideremos o primeiro sistema:

$$q\, dy + (1 + p)\, dx = 0$$
$$(x - z)\, xq^2\, dy\, dp + (1 + p)\,(z + px)\,(x - z)\, dx\, dq - (1 + p)\, q^2\,(x + z)\, dx\, dy = 0.$$

Da primeira equação, temos: $p\, dx + q\, dy = -dx$; então, $dz = -dx$ e $x + z = a$.

Substituindo $q\, dy = -(1 + p)\, dx$, $z = a - x$ na segunda, temos:

(I) $\qquad -(2x - a)\, xq\, dp + (2x - a)\,(a - x + px)\, dq + (1 + p)\, qa\, dx = 0.$

Para resolver esta equação, consideremos x como constante, de modo que $dx = 0$. Então, (I) transforma-se em:

$-(2x - a)\, xq\, dp + (2x - a)\,(a - x + px)\, dq = 0$ ou $x\,(q\, dp - p\, dq) - (a - x)\, dq = 0$

e $\frac{xp + a - x}{q} = \psi\,(x)$. Para determinar $\psi\,(x)$, tomamos a diferencial desta relação: $\qquad q\,(x\, dp + p\, dx - dx) - (xp + a - x)\, dq = q^2 d\psi$

e daí: $\qquad xq\, dp - xp\, dq = q^2 d\psi - pq\, dx + q\, dx + a\, dq - x\, dq.$

De (I):

$$xq\,dp - xp\,dq = \frac{(2x-a)(a-x)\,dq + (1+p)\,qa\,dx}{2x-a} = (a-x)\,dq + \frac{(1+p)\,qa\,dx}{2x-a};$$

então: $q^2\,d\psi - pq\,dx + q\,dx + a\,dq - x\,dq = (a-x)\,dq + \dfrac{(1+p)\,qa\,dx}{2x-a}$,

$$d\psi = \frac{2\,(px+a-x)}{q\,(2x-a)}\,dx = \frac{2\psi}{2x-a}\,dx \quad \text{e} \quad \frac{\psi}{2x-a} = b = f\,(x+z).$$

Logo, $\dfrac{xp+a-x}{q\,(2x-a)} = \dfrac{xp+z}{q\,(x-z)} = f\,(x+z)$ é uma integral intermediária.

Consideremos agora o sistema:

$$xq\,dy + (z+px)\,dx = 0$$

$$(x-z)\,xq^2 dy\,dp + (1+p)\,(z+px)\,(x-z)\,dx\,dq - (1+p)\,q^2\,(x+z)\,dx\,dy = 0.$$

Da primeira equação, temos: $p\,dx + q\,dy = -z\,dx/x$; então: $dz = -z\,dx/x$ e $xz = a$. Substituindo $xq\,dy = -(z+px)\,dx$, $z = a/x$ na segunda, temos:

II) $-xq\,(x^2-a)\,dp + x\,(1+p)\,(x^2-a)\,dq + (1+p)\,q\,(x^2+a)\,dx = 0.$

Considerando x como constante, temos: $q\,dp - (1+p)\,dq = 0$ e temos: $\dfrac{1+p}{q} = \psi\,(x)$. Desta relação vem: $q\,dp - (1+p)\,dq = q^2\,d\psi$, enquanto que de (II) $q\,dp - (1+p)\,dq = \dfrac{(1+p)\,q\,(x^2+a)}{x\,(x^2-a)}\,dx$. Então:

$$d\psi = \frac{(1+p)\,q\,(x^2+a)}{q^2 x\,(x^2-a)}\,dx = \frac{\psi\,(x^2+a)}{x\,(x^2-a)}\,dx = \left(-\frac{dx}{x} + \frac{2x\;dx}{x^2-a}\right)\psi,$$

$$\ln\psi = -\ln x + \ln\,(x^2-a) + \ln b \quad \text{e} \quad \psi = \frac{b\,(x^2-a)}{x} = \frac{1+p}{q}.$$

Logo: $\dfrac{1+p}{q\,(x-z)} = g\,(xz)$ é uma integral intermediária.

Resolvendo as duas integrais intermediárias, temos:

$$p = \frac{f-zg}{xg-f} \quad \text{e} \quad q = \frac{1}{xg-f};$$

então: $$dz = p\,dx + q\,dy = \frac{f-zg}{xg-f}\,dx + \frac{1}{xg-f}\,dy$$

ou $$f\,(x+z)\,(dx+dz) + dy = zg\,(xz)\,dx + xg\,(xz)\,dz.$$

Logo, $y + \phi_1\,(x+z) = \phi_2\,(xz)$ é a solução procurada.

17) Resolver: $3r + s + t + (rt - s^2) = -9$.

Aqui: $R = 3,\ S = T = U = 1,\ V = -9$; então:

$U^2\lambda^2 + SU\lambda + TR + UV = \lambda^2 + \lambda - 6 = 0$ e $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -3$.

Procuramos soluções para os sistemas [ver equações (19)]:

$$\lambda_1 U dy + T dx + U dp = 2dy + dx + dp = 0,$$
$$R dy + \lambda_2 U dx + U dq = 3dy - 3dx + dq = 0$$

e

$$\lambda_2 U dy + T dx + U dp = -3dy + dx + dp = 0,$$
$$R dy + \lambda_1 U dx + U dq = 3dy + 2dx + dq = 0.$$

Para o primeiro sistema, temos: $2y + x + p = a,\ 3y - 3x + q = b$: logo: $p + 2y + x = f(q + 3y - 3x)$ é uma integral intermediária. Do segundo sistema, temos: $-3y + x + p = c,\ 3y + 2x + q = d$; logo: $p - 3y + x = g(q + 3y + 2x)$ é uma integral intermediária. Como q aparece nos argumentos de f e g, não será possível resolver em p e q, como antes, e não será possível, também, achar uma solução envolvendo duas funções arbitrárias. Daremos duas soluções envolvendo constantes arbitrárias.

Substituindo a função arbitrária f da primeira integral intermediária por $\alpha(q + 3y - 3x) + \beta$, temos:

$$p + 2y + x = \alpha(q + 3y - 3x) + \beta \quad \text{ou} \quad p - \alpha q = (3\alpha - 2)y - (3\alpha + 1)x + \beta$$

para o qual o sistema de Lagrange é: $\dfrac{dx}{1} = \dfrac{dy}{-\alpha} = \dfrac{dz}{(3\alpha - 2)y - (3\alpha + 1)x + \beta}$.

De $\dfrac{dx}{1} = \dfrac{dy}{-\alpha}$, temos: $y + \alpha x = \xi$; então:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dz}{(3\alpha - 2)y - (3\alpha + 1)x + \beta} = \frac{dz}{-(3\alpha^2 + \alpha + 1)x + 3\alpha\xi - 2\xi + \beta}$$

e

$$z = -\tfrac{1}{2}(3\alpha^2 + \alpha + 1)x^2 + (3\alpha\xi - 2\xi + \beta)x + \eta =$$
$$= -\tfrac{1}{2}(3\alpha^2 + \alpha + 1)x^2 + (3\alpha y + 3\alpha^2 x - 2y - 2\alpha x + \beta)x + \eta.$$

Logo: $z = \frac{1}{2}(3\alpha^2 - 5\alpha - 1)x^2 + (3\alpha - 2)xy + \beta x + \phi_1(y + \alpha x)$ é uma solução envolvendo uma função arbitrária e duas constantes arbitrárias.

Substituindo a função arbitrária $g(q + 3y + 2x)$, da segunda integral intermediária, pela função linear $\gamma(q + 3y + 2x) + \delta$, temos:

$$p - 3y + x = \gamma(q + 3y + 2x) + \delta \quad \text{ou} \quad p - \gamma q = 3(\gamma + 1)y + (2\gamma - 1)x + \delta$$

para a qual o sistema de Lagrange é: $\dfrac{dx}{1} = \dfrac{dy}{-\gamma} = \dfrac{dz}{3(\gamma+1)y + (2\gamma - 1)x + \delta}$.

De $\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-\gamma}$, temos: $y + \gamma x = \xi$: então:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dz}{3(\gamma+1)y + (2\gamma-1)x + \delta} = \frac{dz}{-(3\gamma^2+\gamma+1)x + 3\gamma\xi + 3\xi + \delta}$$

e $$z = -\tfrac{1}{2}(3\gamma^2+\gamma+1)x^2 + (3\gamma\xi + 3\xi + \delta)x + \eta.$$

Logo: $z = \frac{1}{2}(3\gamma^2 + 5\gamma - 1)x^2 + 3(\gamma+1)xy + \delta x + \phi_2(y + \gamma x)$ é, também, uma solução.

18) Resolver: $xqr + (p+q)s + ypt + (xy-1)(rt-s^2) + pq = 0.$

Aqui: $R = xq,\ S = p+q,\ T = yp,\ U = xy-1,\ V = -pq$; então:

$$U^2\lambda^2 + SU\lambda + TR + UV = (xy-1)^2\lambda^2 + (p+q)(xy-1)\lambda + pq = 0$$

e $$\lambda_1 = \frac{-p}{xy-1},\quad \lambda_2 = \frac{-q}{xy-1}.$$

Consideremos primeiro o sistema: $\begin{cases} -p\,dy + yp\,dx + (xy-1)\,dp = 0 \\ xq\,dy - q\,dx + (xy-1)\,dq = 0. \end{cases}$

O sistema não é integrável porque suas equações não o são.

Consideremos, agora, o sistema:

$$-q\,dy + yp\,dx + (xy-1)\,dp = 0,\quad xq\,dy - p\,dx + (xy-1)\,dq = 0.$$

Multiplicando a segunda equação por y, somando a primeira e dividindo por $xy-1$, temos: $q\,dy + dp + y\,dq = 0$ e daí $p + yq = a$. Novamente, multiplicando a primeira por x, somando a segunda e dividindo por $xy-1$ obtemos $p\,dx + x\,dp + dq = 0$ e daí $xp + q = b$. Entretanto, a forma da integral intermediária resultante $xp+q = f(yq+p)$ ou $yq+p = g(xp+q)$ não permite uma solução envolvendo duas funções arbitrárias.

Para obter uma solução envolvendo uma função arbitrária e duas constantes arbitrárias, substituimos $f(yq+p)$ pela função linear $\alpha(yq+p)+\beta$ na primeira forma da integral intermediária acima, o que dá:

$$(x-\alpha)p + (1-\alpha y)q = \beta.$$

O sistema de Lagrange correspondente é: $\frac{dx}{x-\alpha} = \frac{dy}{1-\alpha y} = \frac{dz}{\beta}$. Dos dois primeiros membros, temos:

$$\alpha \ln(x-\alpha) + \ln(1-\alpha y) = \ln \xi \quad \text{ou} \quad (x-\alpha^{a})(1-\alpha y) = \xi,$$

e dos primeiro e terceiro membros, temos: $z = \beta \ln(x-\alpha) + \eta$. Logo, a solução é:

$$z = \beta \ln(x-\alpha) + \phi\,[(x-\alpha)^{a}\,(1-\alpha y)].$$

PROBLEMAS PROPOSTOS

Resolver:

19 $r = xy$ *Resp.:* $z = x\,\phi_1(y) + \phi_2(y) + \frac{1}{6}x^3y$

20) $s = x^2 + y^2$ *Resp.:* $z = \phi_1(x) + \phi_2(y) + \frac{1}{3}(x^3y + xy^3)$

21) $t = -x^2 \operatorname{sen}(xy)$ *Resp.:* $z = y\,\phi_1(x) + \phi_2(x) + \operatorname{sen}(xy)$

22) $xr - p = 0$ *Resp.:* $z = x^2\,\phi_1(y) + \phi_2(y)$

23) $xr + p = 1/x^2$ *Resp.:* $z = \phi_1(y)\ln x + \phi_2(y) + 1/x$

24) $yt - q = 2x^2y$ *Resp.:* $z = y^2\,\phi_1(x) + \phi_2(x) + x^2y^2\ln y$

25) $ys - p = xy^2 \operatorname{sen}(xy)$ *Resp.:* $z = y\,\phi_1(x) + \phi_2(y) - \operatorname{sen}(xy)$

26) $t + q = xe^{-y}$ *Resp.:* $z = e^{-y}\,\phi_1(x) + \phi_2(x) - xye^{-y}$

27) $r + s = 3y^2$ *Resp.:* $\phi_1(x-y) + \phi_2(y) + xy^3$

28) $xyr + x^2s - yp = x^3e^y$ *Resp.:* $z = \phi_1(x^2 - y^2) + \phi_2(y) + \frac{1}{2}x^2e^y$

29) $2yt - xs + 2q = x^2y$ *Resp.:* $z = \phi_1(x^2y) + \phi_2(x) + \frac{1}{4}x^2y^2$

30) $xr + ys + p = 8xy^2 + 9x^2$ *Resp.:* $z = \phi_1(x/y) + \phi_2(y) + x^2y^2 + x^3$

TRANSFORMAÇÃO DE LAPLACE

31) $6r - s - t = 18y - 4x$ *Resp.:* $z = \phi_1(x - 3y) + \phi_2(x + 2y) + y(2x^2 + y^2)$

32) $x(xy-1)r - (x^2y^2-1)s + y(xy-1)t + (x-1)p + (y-1)q = 0$
Resp.: $z = \phi_1(xe^y) + \phi_2(ye^x)$

33) $x(y-x)r - (y^2-x^2)s + y(y-x)t + (y+x)(p-q) = 2(x+y+1)$
Sugestão: Fazer $x + y = u,\ xy = v.$
Resp.: $z = \phi_1(x+y) + \phi_2(xy) + x - y + \ln x$

34) $(y-1)r - (y^2-1)s + y(y-1)t + p - q = 2ye^{2x}(1-y)^3$
Resp.: $z = \phi_1(x+y) + \phi_2(ye^x) + (x+y)y^2e^{2x}$

35) $xyr - (x^2-y^2)s - xyt + py - qx = 2(x^2-y^2)$
Resp.: $z = \phi_1(x^2+y^2) + \phi_2(y/x) - xy$

36) $r - 2s + t + p - q = e^x(2y - 3) - e^y$

Sugestão: Fazer $x + y = u$, $y = v$.

Resp.: $z = \phi_1(x+y) + e^y \phi_2(x+y) + xe^y + ye^x$

37) $y^2(r - 2s + t) - y(p - q) - z = y^2$

Resp.: $z = y\,\phi_1(x + y) + \dfrac{1}{y}\phi_2(x + y) + \dfrac{1}{3}y^2$

MÉTODO DE MONGE

38) $(e^x - 1)(qr - ps) = pqe^x$

I. I.: $p = \psi(z)$. S. G.: $x = \phi_1(z) + \phi_2(y) + e^x$

39) $r - 3s - 10t = -3$

I. I.: $p + 2q = \psi_1(y + 5x)$, $p - 5q = \psi_2(y - 2x)$

S. G.: $z = \phi_1(y + 5x) + \phi_2(y - 2x) + xy$

40) $q^2 r - 2pqs + p^2 t = 0$

I. I.: $p = q\,\psi(z)$. S. G.: $x\,\phi_1(z) + y = \phi_2(z)$

41) $qr - (1 + p + q)s + (1 + p)t = 0$

I. I.: $p - q = \psi_1(x + z)$, [illegible] $+ 1 = q\,\psi_2(x + y)$

S. G.: $z = f(x + z) + g(x + y)$

42) $(1 - q)^2 r - 2(2 - p - 2q + pq)s + (2 - p)^2 t = 0$

I. I.: $\dfrac{1 - q}{2 - p} = \psi(y + 2x - z)$

S. G.: $x + y\,\phi_1(y + 2x - z) = \phi_2(y + 2x - z)$

43) $5r - 10s + 4t - (rt - s^2) = -1$

I. I.: $3y + 4x - p = f(5y + 7x - q)$, $7y + 4x - p = g(5y + 3x - q)$

Sol.: $z = 2x^2 + 3xy + \dfrac{5}{2}y^2 - 2\alpha x^2 - \beta x + \phi_1(y + \alpha x)$ ou

$$z = 2x^2 + 7xy + \frac{5}{2}y^2 + 2\gamma x^2 - \delta x + \phi_2(y + \gamma x)$$

44) $2r - 6s + 2t + (rt - s^2) = 4$

I. I.: $2y + 2x + p = f(2y + 4x + q)$, $4y + 2x + p = g(2y + 2x + q)$

Sol.: $z = \alpha x^2 + \beta x - (x + y)^2 + \phi_1(y + \alpha x)$ ou

$$z = -\gamma x^2 + \delta x - x^2 - 4xy - y^2 + \phi_2(y + \gamma x)$$

45) $3r - 6s + 4t - (rt - s^2) = 3$

I. I.: $3y + 4x - p = f(3y + 3x - q)$.

Sol.: $z = 2x^2 + 3xy + \frac{3}{2} y^2 + \beta x + \phi(y + \alpha x)$.

46) $yr - ps + t + y(rt - s^2) = -1$

I. I.: $yp + x = f(q + y)$.

Sol.: $6\alpha^2 z = 2y^3 - 3\alpha^2 y^2 + 6\alpha xy + 6\beta y + \phi(\alpha x + \frac{1}{2} y^2)$.

47) $xqr - (x + y)s + ypt + xy(rt - s^2) = 1 - pq$

I. I.: $xp + y = f(yq + x)$.

Sol.: $z = \alpha x + y/\alpha + \beta \ln x + \phi(x^\alpha y)$.